# الفصل الرابع عشر

# تحويل زد (z) لتحليل الأنظمة

## (١٤.١) المقدمة والأهداف

هذا الفصل يتبع طريقاً مثل الذي في الفصل ١٣ على تحليل الأنظمة باستخدام تحويل لابلاس، فيما عدا أن التطبيق سيكون على الإشارات والأنظمة المتقطعة زمنياً بدلاً من الإشارات والأنظمة المستمرة زمنياً.

**أهداف الفصل**

١- لكي نقدر العلاقة بين تحويل زد وتحويل لابلاس

٢- لكي نطبق تحويل زد على التحليل العام للأنظمة LTI، بما في ذلك أنظمة التغذية العكسية، والاستقرار، والاستجابات الزمنية للإشارات القياسية

٣- لكي نقدم طريقة لبناء أنظمة الزمن المتقطع في أشكال مختلفة

## (١٤.٢) نماذج الأنظمة

**المعادلات الفرقية**

تكمن القوة الحقيقية لتحويل لابلاس في تحليل السلوك الديناميكي لأنظمة الزمن المستمر. بطريقة مماثلة، فإن تحليل السلوك الديناميكي لأنظمة الزمن المتقطع تعتبرالقوة الحقيقية لتحويل زد. معظم أنظمة الزمن المستمر التي يتم تحليلها بواسطة المهندسين يتم وصفها بمعادلات تفاضلية، ومعظم أنظمة الزمن المتقطع التي يتم تحليلها عن طريق المهنسين يتم وصفها بمعادلات فرقية. الصورة العامة لأي معادلة فرقية تصف نظام في الزمن المتقطع له إثارة هي x[n] واستجابته هي y[n] يمكن كتابتها كما يلي:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

بفرض أن كلاً من x[n] و y[n] سببيان، وبإجراء تحويل زد على طرفي المعادلة السابقة نحصل على:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\, Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\, X(z)$$

دالة العبور H(z) هي نسبة Y(z) على X(z):

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{b_0+b_1 z^{-1}+\cdots+b_M z^{-M}}{a_0+a_1 z^{-1}+\cdots+a_N z^{-N}}$$

أو:

$$\mathrm{H(z)} = \mathrm{z^{-N-M}}\, \frac{\mathrm{b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \cdots + b_{M-1} z + b_M}}{\mathrm{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_{N-1} z + a_N}}$$

وعلى ذلك، فإن دالة عبور النظام المتقطع زمنياً الموصوف بمعادلة فرقية تكون نسبة بين كثيرتي حدود في المتغير z، وذلك تماما مثل دالة عبور النظام المستمر زمنياً الموصوف بمعادلة تفاضلية تكون نسبة بين كثيرتي حدود في المتغير s.

## المخططات الصندوقية

يمكن بسهولة نمذجة الأنظمة المتقطعة باستخدام المخططات الصندوقية تماما مثلما كان الحال مع الأنظمة المستمرة زمنياً، ويمكن كتابة دوال العبور مباشرة من هذه المخططات الصندوقية. افترض النظام الموضح في شكل (١٤.١).

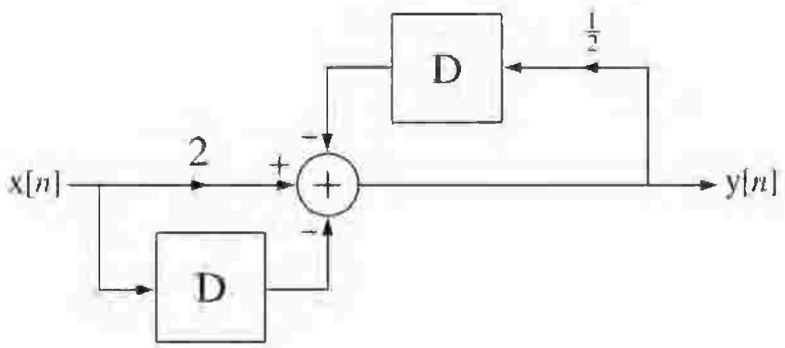
المعادلة الفرقية الواصفة لهذا النظام هي: y[n]=2x[n]-x[n-1]-(1/2)y[n-1]. يمكننا أن نعيد رسم المخطط الصندوقي لنجعله مخططاً صندوقياً في النطاق z بدلاً من المخطط الصندوقي في النطاق الزمني كما في شكل (١٤.٢).

المعادلة الواصفة لهذا النظام في النطاق z ستكون:

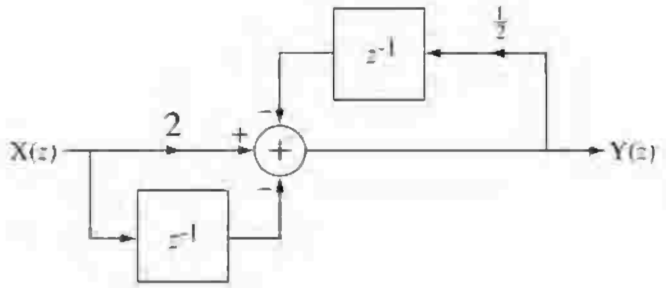
$$Y(z) = 2X(z) - z^{-1}X(z) - (1/2)z^{-1}Y(z)$$

وستكون دالة العبور على الصورة التالية:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2-z^{-1}}{1+(1/2)z^{-1}} = \frac{2z-1}{z+1/2}$$




**شكل رقم (١٤.١) المخطط الصندوقي لنظام في النطاق الزمني.**




**شكل رقم (١٤.٢) المخطط الصندوقي لنظام في النطاق z.**

## (١٤.٣) استقرار النظام

أي نظام سببي متقطع زمنياً يكون مستقراً BIBO إذا كانت استجابة الصدمة له قابلة للجمع المطلق، بمعنى، أن يكون مجموع مقادير الصدمات في استجابة الصدمة محدداً. بالنسبة لنظام تكون دالة العبور له نسبة بين كثيرتي حدود في المتغير z على الصورة التالية:

$$\mathrm{H(z)} = \frac{\mathrm{b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \cdots + b_M}}{\mathrm{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_N}}$$

حيث M<N وكل الأقطاب مختلفة أو متميزة، فإن دالة العبور لهذا النظام يمكن كتابتها في صورة الكسور الجزيئية كما يلي:

$$H(z) = \frac{K_1}{z-p1} + \frac{K_2}{z-p2} + \cdots + \frac{K_N}{z-pN}$$

وبالتالي، فإن استجابة الصدمة ستكون على الصورة التالية:

$$h[n] = (K_1 p1^{n-1} + K_2 p2^{n-1} + \cdots + K_N pN^{n-1})u[n-1],$$

(بعض الـ p's من الممكن أن تكون مركبة). لكي يكون النظام مستقراً، فإن كل كمية في المعادلة السابقة يجب أن تكون قابلة للجمع. مجموع القيمة المطلقة لإحدى هذه المقادير يكون على الصورة:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|Kp^{n-1}u[n-1]| = |K|\sum_{n=1}^{\infty}|p^{n-1}| = |K|\sum_{n=0}^{\infty}\left||p|^n(e^{j<p})^n\right| = |K|\sum_{n=0}^{\infty}\left||p|^n\underbrace{e^{jn<p}}_{=1}\right|$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|Kp^{n-1}u[n-1]| = |K|\sum_{n=1}^{\infty}|p|^n$$

تقارب المجموع السابق يتطلب أن تكون |p|<1. لذلك لكي يكون النظام مستقرا، فإن كل الأقطاب يجب أن تحقق الشرط $|p_k|<1$.

لأي نظام متقطع زمنياً يجب أن تقع كل أقطاب دالة العبور في الداخل المفتوح لدائرة الوحدة في المستوى z حتى يكون النظام مستقراً.

وهذا يكافئ تماماً شرط أن تقع كل أقطاب النظام المستمر زمنياً في النصف الأيسر من المستوى s حتى يكون النظام مستقراً. لقد تم إجراء هذه التحليل على الأحوال الأكثر شيوعاً التي تكون فيها كل الأقطاب مختلفة أو متميزة. إذا كان هناك أقطاب متكررة، فإنه يمكن إثبات أن متطلب أن كل الأقطاب يجب أن تقع في الداخل المفتوح لدائرة الوحدة في المستوى z لن يتغير.

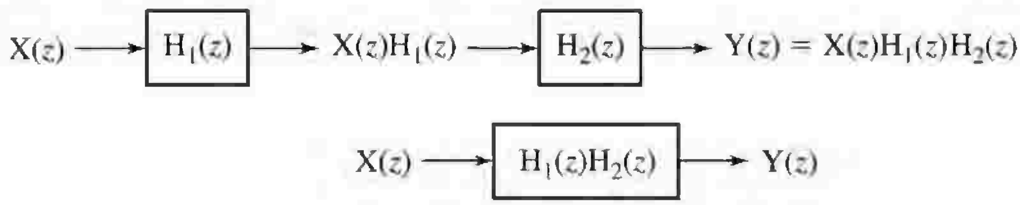
## (١٤.٤) توصيلات النظام

يتم التعامل مع دوال العبور لمكونات موصلة على التوالي، أو على التوازي بتغذية عكسية لأنظمة متقطعة زمنياً بالطريقة نفسها في حالة الأنظمة المستمرة زمنياً كما في شكل (١٤.٣) حتى شكل (١٤.٥).

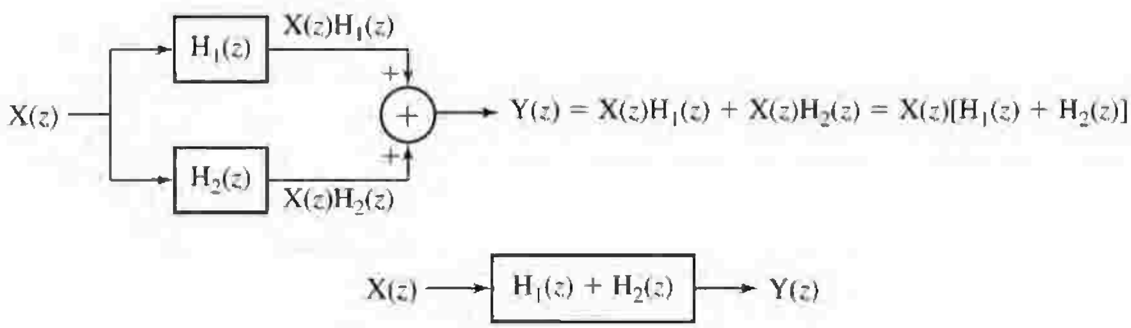
يمكننا إيجاد دالة العبور الكلية لنظام تغذية عكسية بالطريقة نفسها التي تم اتباعها في حالة الأنظمة المستمرة زمنياً وستكون النتيجة كما يلي:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{H_1(z)}{1+H_1(z)H_2(z)}=\frac{H_1(z)}{1+T(z)},$$ المعادلة رقم (١٤.١)

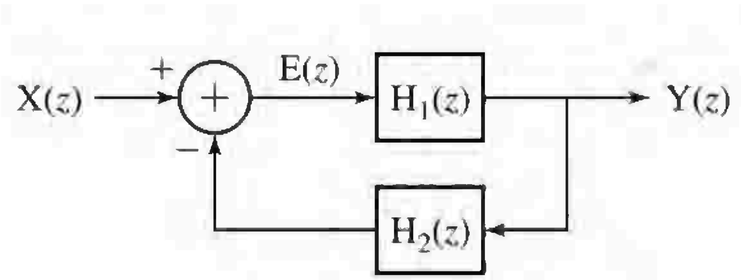
حيث $T(z)=H_1(z)H_2(z)$ هي دالة عبور الحلقة.




شكل رقم (١٤.٣) التوصيل على التوالي للأنظمة.




شكل رقم (١٤.٤) التوصيل على التوازي للأنظمة.




**شكل رقم (١٤.٥) أنظمة التغذية العكسية.**

مثلما كان الأمر حقيقياً بالنسبة لأنظمة التغذية العكسية المستمرة زمنياً، فإنه يمكن رسم الموضع الجذري لأنظمة التغذية العكسية المتقطعة زمنياً التي لها:

$$H_1(z) = K\frac{P_1(z)}{Q_1(z)} \quad \text{و} \quad H_2(z) = \frac{P_2(z)}{Q_2(z)}$$

خطوات رسم الموضع الجذري هي نفسها تماماً للأنظمة المستمرة زمنياً فيما عدا أن دالة عبور الحلقة:

$$T(z) = H_1(z)H_2(z)$$

تكون دالة في المتغير z بدلا من المتغير s. وعلى ذلك فإن تفسير الموضع الجذري، بعد رسمه، يكون مختلفاً قليلاً. بالنسبة للأنظمة المستمرة زمنياً، كانت قيمة معامل تكبير المسار الأمامي K التي يعبر عندها الموضع الجذري إلى النصف الأيمن من المستوى s هي القيمة التي يصبح عندها النظام غير مستقر. بالنسبة للأنظمة المتقطعة زمنياً، ستكون العبارة السابقة كما هي فيما عدا أن "النصف الأيمن من المستوى s" تستبدل بـ "خارج دائرة الوحدة".

**مثال ١٤.١**

**تحليل استقرار الأنظمة المتقطعة زمنياً باستخدام الموضع الجذري**

ارسم الموضع الجذري للنظام المتقطع زمنياً الذي له دالة عبور للمسار الأمامي كما يلي:

$$H_1(z) = K\frac{z-1}{z+1/2}$$

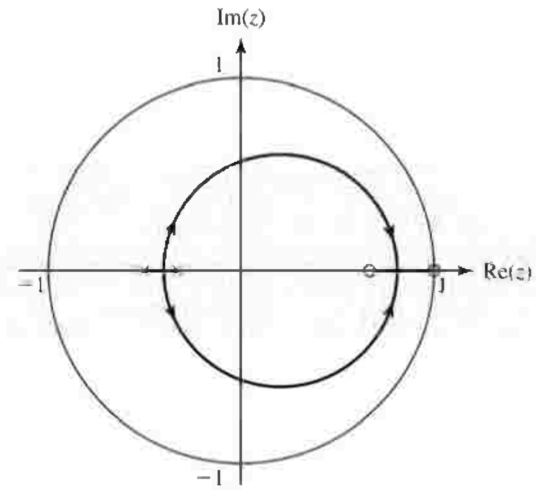
وله دالة عبور المسار العكسي كما يلي:

$$H_2(z) = \frac{z-2/3}{z+1/3}$$

فإن دالة عبور الحلقة ستكون على الصورة:

$$T(z) = K\frac{z-1}{z+1/2}\frac{z-2/3}{z+1/3}$$

هناك صفران عند z=2/3، و z=1، وقطبان عند z=-1/2، و z=-1/3. من الواضح من شكل الموضع الجذري في شكل (١٤.٦) أن النظام سيكون مستقراً بدون أي شرط لأي قيمة موجبة للـ K.




**شكل رقم (١٤.٦) الموضع الجذري لدالة عبور الحلقة التالية:**

$$\mathbf{T(z) = K\frac{z-1}{z+1/2}\frac{z-2/3}{z+1/3}}$$

## (١٤.٥) استجابات الأنظمة للإشارات القياسية

كما تم التوضيح في الفصل ١٣ ، فإنه من غير العملي أن نوجد استجابة الصدمة لنظام مستمر زمنياً عن طريق التطبيق الحقيقي للصدمة على النظام. في المقابل، فإن الصدمة المتقطعة زمنياً تكون دالة بسيطة جيدة السلوك ويمكن تطبيقها في المواقف العملية بدون أي مشاكل. بالإضافة لإيجاد استجابة الصدمة ، وإيجاد استجابات الأنظمة لوحدة التتابع وللدوال الجيبية المطبقة على النظام عند الزمن n=0 فإنها تكون أيضاً طرق جيدة لاختبار ديناميكية وأداء الأنظمة.

**استجابة وحدة التتابع**

افترض أن دالة عبور النظام تكون على الصورة :

$$H(z) = \frac{N_H(z)}{D_H(z)}$$

بالتالي ، فإن الاستجابة لوحدة تتابع للنظام في النطاق z ستكون :

$$Y(z) = \frac{Z}{Z-1}\frac{N_H(z)}{D_H(z)}$$

يمكن كتابة هذه الاستجابة لوحدة التتابع في صورة الكسور الجزيئية كما يلي :

$$Y(z) = z\left[\frac{N_H(z)}{D_H(z)} + \frac{H(1)}{Z-1}\right] = z\frac{N_{H1}(z)}{D_H(z)} + H(1)\frac{Z}{Z-1}$$

إذا كان النظام مستقراً وسببياً ، فإن تحويل z العكسي للكمية $zN_{H1}(z)/D_H(z)$ تكون إشارة تتناقص مع الزمن (الاستجابة العابرة) ، وتحويل z للكمية $H(1)z/(z-1)$ تكون عبارة عن حاصل ضرب وحدة التتابع في قيمة دالة العبور عند z=1 (الاستجابة المدفوعة).

### مثال ١٤.٢

### استجابة وحدة التتابع باستخدام تحويل زد

نظام له دالة العبور التالية :

$$H(z) = \frac{100z}{Z-1/2}$$

أوجد وارسم استجابة التتابع لهذا النظام.

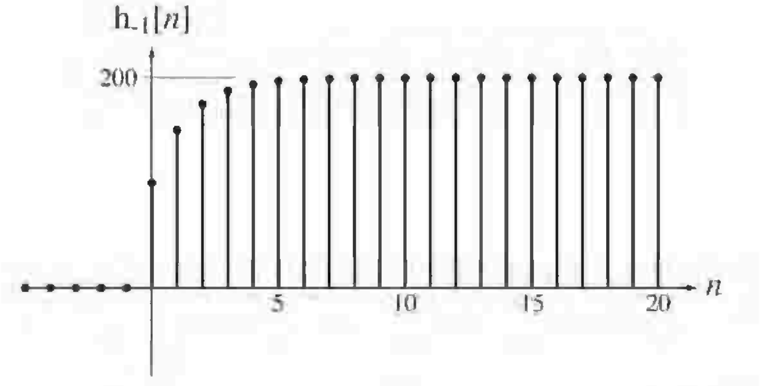
في النطاق z ستكون استجابة النظام لوحدة التتابع كما يلي :

$$H_{-1}(z) = \frac{z}{Z-1}\frac{100z}{Z-1/2} = z\left[\frac{-100}{Z-1/2} + \frac{200}{Z-1}\right] = 100\left[\frac{2z}{Z-1} - \frac{z}{Z-1/2}\right]$$

استجابة وحدة التتابع في النطاق الزمني هي تحويل زد العكسي الذي سيكون على الصورة التالية وكما في شكل (١٤.٧) :

$$h_{-1}[n] = 100[2 - (1/2)^n]u[n]$$

القيمة النهائية التي تقترب منها استجابة النظام لوحدة التتابع هي 200، وهي نفسها مثل H(1).




**شكل رقم (١٤.٧) استجابة وحدة التتابع**

في تحليل الإشارات والأنظمة، تكون الأنظمة الأكثر شيوعاً في الاستخدام هي أنظمة القطب الواحد والقطبين. دالة العبور لنظام القطب الواحد تكون على الصورة :

$$H(z) = \frac{kz}{z-p}$$

حيث p هي موضع القطب الحقيقي في المستوى زد. استجابة هذا النظام لوحدة التتابع في النطاق زد هي :

$$H_{-1}(z) = \frac{z}{Z-1}\frac{kz}{z-p} = \frac{K}{1-\mathrm{P}}\left(\frac{z}{Z-1} - \frac{Pz}{z-p}\right)$$

واستجابته في النطاق الزمني ستكون :

$$h_{-1}[n] = \frac{K}{1-\mathrm{P}}(1 - P^{n+1})u[n]$$

لتبسيط هذه المعادلة وفصل تأثيراتها، سنفترض أن معامل التكبير الثابت K يساوي 1-p. وبالتالي يمكننا كتابة :

$$h_{-1}[n] = (1 - P^{n+1})u[n]$$

الاستجابة المدفوعة هي u[n] والاستجابة العابرة هي $-p^{n+1}u[n]$.

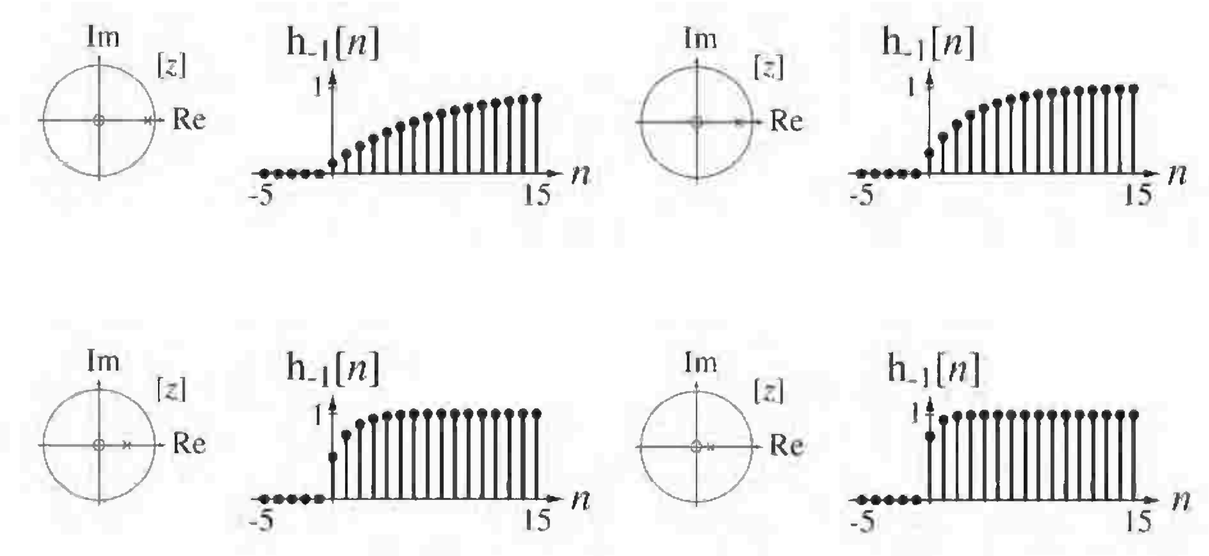
هذه هي الاستجابة المتقطعة زمنياً المقابلة لاستجابة وحدة الخطوة لنظام أحادي القطب في الزمن المستمر، ويتم تحديد سرعة الاستجابة عن طريق موضع القطب. عندما $0<p<1$، يكون النظام مستقراً وكلما كانت p أقرب من الواحد، كان النظام أبطأ كما في شكل (١٤.٨). عندما $p>1$ يكون النظام غير مستقر.

دالة عبور مثالية لنظام من الدرجة الثانية تكون على الصورة التالية :

$$H(z) = K\frac{z^2}{z^2 - 2r_0\cos(\Omega_0)z + r_0^2}$$

أقطاب H(z) تقع عند $p_{1,2} = r_0 e^{\pm j\Omega_0}$. إذا كانت $r_0<1$، فإن كل من القطبين سيقع داخل دائرة الوحدة وسيكون النظام مستقراً. تحويل زد لاستجابة وحدة التتابع سيكون :

$$H_{-1}(z) = K\frac{z}{z-1}\frac{z^2}{z^2 - 2r_0\cos(\Omega_0)z + r_0^2}$$




**شكل رقم (١٤.٨) استجابة نظام القطب الواحد لتتابع الوحدة مع تغيير موضع القطب**

عندما $\Omega_0 \neq \pm m\pi$ حيث m رقم صحيح، فإن تحليل الكسور الجزيئية لـ $H_{-1}(z)/Kz$ سيكون :

$$\frac{H_{-1}(z)}{kz} = \frac{1}{1 - 2r_0\cos(\Omega_0)z + r_0^2}\left[\frac{z}{z-1} + \frac{\left(r_0^2 - 2r_0\cos(\Omega_0)\right)z + r_0^2}{z^2 - 2r_0\cos(\Omega_0)z + r_0^2}\right]$$

وبالتالي :

$$H_{-1}(z) = \frac{kz}{1-2r_0\cos(\Omega_0)z+r_0^2}\left[\frac{z}{z-1}+\frac{\left(r_0^2-2r_0\cos(\Omega_0)\right)z+r_0^2}{z^2-2r_0\cos(\Omega_0)z+r_0^2}\right]$$

أو :

$$H_{-1}(z) = H(1)\left[\frac{z}{z-1}+Z\frac{\left(r_0^2-2r_0\cos(\Omega_0)\right)z+r_0^2}{z^2-2r_0\cos(\Omega_0)z+r_0^2}\right]$$

وهذه يمكن كتابتها كما يلي :

$$\mathrm{H}_{-1}(\mathrm{z}) = \mathrm{H}(1)\left(\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{z}-1}+\mathrm{r}_0\left\{[\mathrm{r}_0-2\cos(\Omega_0)]\frac{\mathrm{z}^2-2\mathrm{r}_0\cos(\Omega_0)\mathrm{z}}{\mathrm{z}^2-2\mathrm{r}_0\cos(\Omega_0)\mathrm{z}+\mathrm{r}_0^2}+\frac{1+[\mathrm{r}_0-2\cos(\Omega_0)]\cos(\Omega_0)}{\sin(\Omega_0)}\frac{\mathrm{z}\mathrm{r}_0\sin(\Omega_0)}{\mathrm{z}^2-2\mathrm{r}_0\cos(\Omega_0)\mathrm{z}+\mathrm{r}_0^2}\right\}\right)$$

وتحويل زد العكسي لها سيكون :

$$h_{-1}[n] = H(1)\left(1+r_0\left\{[r_0-2\cos(\Omega_0)]r_0^n\cos(n\Omega_0)+\frac{1+[r_0-2\cos(\Omega_0)]\cos(\Omega_0)}{\sin(\Omega_0)}r_0^n\sin(n\Omega_0)\right\}\right)u[n]$$

وهذا هو الحل العام لاستجابة وحدة التتابع لهذا النوع من أنظمة الدرجة الثانية. إذا افترضنا أن :

$$K = 1-2r_0\cos(\Omega_0)+r_0^2$$

بالتالي ، فإن النظام سيكون له معامل تكبير وحدة $(H(1)=1)$.

**مثال ١٤.٣**

**مخططات الأقطاب والأصفار واستجابة وحدة التتابع باستخدام تحويل زد**

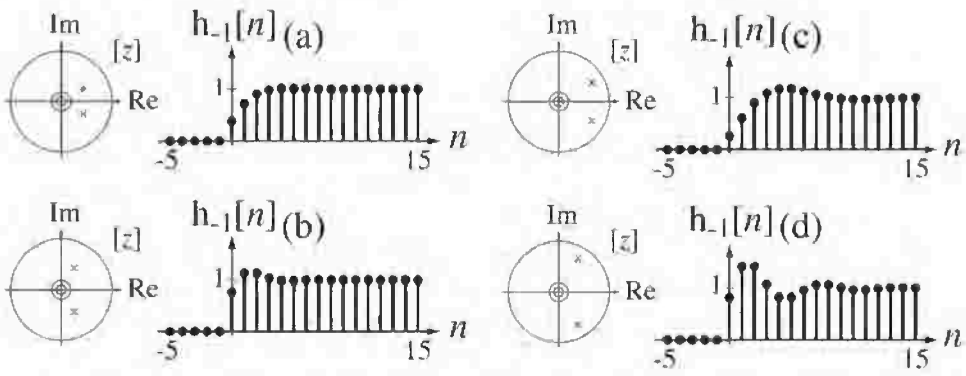
افترض نظاماً له دالة عبور على الصورة التالية :

$$H(z) = K\frac{z^2}{z^2-2r_0\cos(\Omega_0)z+r_0^2}\ with\ K = 1-2r_0\cos(\Omega_0)+r_0^2$$

ارسم مخططات الأصفار والأقطاب وارسم استجابة وحدة التتابع لهذا النظام في الحالات التالية :

(أ) $r_0 = 1/2,\ \Omega_0 = \pi/6,$ (ب) $r_0 = 1/2,\ \Omega_0 = \pi/3,$

(ت) $r_0 = 3/4,\ \Omega_0 = \pi/6,$ (ث) $r_0 = 3/4,\ \Omega_0 = \pi/3,$




**شكل رقم (٩.١٤) يبين مخططات الأقطاب والأصفار واستجابة وحدة التتابع لقيم r0 و Ω0 السابقة.**

مع زيادة $r_0$، فإن النظام يصبح تحت القمع، ويتردد لفترة زمنية أطول. مع زيادة $\Omega_0$ تزداد سرعة الذبذبة. لذلك يمكننا أن نعمم ذلك بالقول إنه مع اقتراب الأقطاب من دائرة الوحدة، فإن ذلك يعطي استجابة تحت قمعية أكثر من الأقطاب التي تكون أبعد من (وبالتالي داخل) دائرة الوحدة. يمكننا القول أيضاً أن معدل الذبذبات في الاستجابة سيعتمد على زاوية هذه الأقطاب، حيث يكون هذا المعدل أكبر للزوايا الأكبر.

**الاستجابة لدالة جيبية سببية**

استجابة النظام لجيب تمام مقداره الوحدة والتردد الزاوي له هو $\Omega_0$ يتم تطبيقه على النظام عند الزمن n=0 سيكون كما يلي :

$$Y(z)=\frac{N_H(z)}{D_H(z)}\frac{z[Z-cos(\Omega_0)]}{z^2-2z\,cos(\Omega_0)+1}$$

أقطاب هذه الاستجابة هي أقطاب دالة العبور زائد جذور المعادلة : $z^2-2z\cos(\Omega_0)+1=0$ وهي أزواج مركبة مترافقة $p_1=e^{j\Omega_0}$، و $p_1=e^{-j\Omega_0}$. لذلك فإن $p_1=p_2^*$، و $p_1+p_2=2\cos(\Omega_0)$، و $p_1-p_2=j2\sin(\Omega_0)$، و $p_1p_2=1$. بالتالي إذا كانت $\Omega_0\neq m\pi$، حيث m رقم صحيح، وإذا لم يكن هناك تلاشٍ بين الأقطاب والأصفار، فإن هذه الأقطاب ستكون مختلفة أو مميزة ويمكن كتابة الاستجابة في صورة الكسور الجزيئية كالتالي :

$$Y(z)=\frac{N_H(z)}{D_H(z)}+\frac{1}{P_1-P_2}\frac{H(P_1)(P_1-cos(\Omega_0))}{Z-P_1}+\frac{1}{P_2-P_1}\frac{H(P_2)(P_2-cos(\Omega_0))}{Z-P_2}$$

وبعد التبسيط يمكن كتابتها كما يلي :

$$Y(z)=z\left[\left\{\frac{N_{H1}(z)}{D_H(z)}+\left[\frac{H_r(P_1)(z-\mathrm{p1r})-\mathrm{Hi(p1)p1i}}{z^2-z(\mathrm{2p1r})+1}\right]\right\}\right]$$

حيث $p_1=p_{1r}+jp_{1i}$ و $H(p_1)=H_r(p_1)+jH_i(p_1)$ ، وهذه يمكن كتابتها بدلالة المعاملات الأصلية كما يلي :

$$Y(z) = \left\{z\frac{N_{H1}(z)}{D_H(z)} + \left[Re\left(H\left(cos(\Omega_0)+jsin(\Omega_0)\right)\right)\frac{z^2-z\,cos(\Omega_0)}{z^2-z\,(2cos(\Omega_0))+1} - Im\left(H\left(cos(\Omega_0)+jsin(\Omega_0)\right)\right)\frac{zsin(\Omega_0)}{z^2-z\,(2cos(\Omega_0))+1}\right]\right\}$$

وتحويل زد العكسي لها سيكون :

$$y[n] = z^{-1}\left(\frac{N_{H1}(z)}{D_H(z)}\right) + \left[Re\left(H\left(cos(\Omega_0)+jsin(\Omega_0)\right)\right)cos(\Omega_0 n) - Im\left(H\left(cos(\Omega_0)+jsin(\Omega_0)\right)\right)sin(\Omega_0 n)\right]u[n]$$

باستخدام المعادلة التالية :

$$Re(A)cos(\Omega_0 n) - Im(A)sin(\Omega_0 n) = |A|cos(\Omega_0 n + \measuredangle A)$$

يمكن إعادة كتابة الاستجابة كما يلي :

$$y[n] = z^{-1}\left(z\frac{N_{H1}(z)}{D_H(z)}\right) + \left|H\left(cos(\Omega_0)+jsin(\Omega_0)\right)\right|cos\left(\Omega_0 n + \measuredangle H\left(cos(\Omega_0)+jsin(\Omega_0)\right)\right)u[n]$$

أو :

$$y[n] = z^{-1}\left(z\frac{N_{H1}(z)}{D_H(z)}\right) +$$

$$y[n] = z^{-1}\left(z\frac{N_{H1}(z)}{D_H(z)}\right) + |H(p_1)|cos\left(\Omega_0 n + \measuredangle H(p_1)\right)u[n]. \qquad \text{المعادلة رقم (١٤.٢)}$$

إذا كان النظام مستقراً فإن المقدار :

$$z^{-1}\left(z\frac{N_{H1}(z)}{D_H(z)}\right)$$

سيتناقص مع الزمن (الاستجابة العابرة) حتى يصل إلى الصفر مع الزمن المتقطع ، وستكون الكمية :

$$|H(p_1)|cos\left(\Omega_0 n + \measuredangle H(p_1)\right)u[n]$$

التي تمثل الاستجابة المدفوعة تساوي دالة جيبية بعد الزمن المتقطع $n=0$ وتستمر إلى الما لانهاية.

**مثال ١٤.٤**

**استجابة النظام لجيب التمام السببي باستخدام تحويل زد**

النظام الموجود في مثال ١٤.٢ له دالة عبور كالتالي :

$$H(z) = \frac{100z}{z-1/2}$$

أوجد وارسم استجابة هذا النظام للدخل $x[n]=cos(\Omega_0 n)u[n]$ حيث $\Omega_0=\pi/4$.

هذه الاستجابة ستكون كما يلي في النطاق زد :

$$Y(z) = \frac{Kz}{z-p}\frac{z[z-cos(\Omega_0)]}{z^2-2zcos(\Omega_0)+1} = \frac{Kz}{z-p}\frac{z[z-cos(\Omega_0)]}{(z-e^{j\Omega_0})(z-e^{-j\Omega_0})}$$

حيث $K=100$ ، و $p=1/2$ ، و $\Omega_0=\pi/4$. يمكن كتابة هذه الاستجابة في صورة الكسور الجزيئية كما يلي :

$$Y(z) = kz\left[\underbrace{\frac{\frac{p[p-cos(\Omega_0)]}{(p-e^{j\Omega_0})(p-e^{-j\Omega_0})}}{z-p}}_{\text{الاستجابة العابرة}} + \underbrace{\frac{Az+B}{z^2-2zcos(\Omega_0)+1}}_{\text{الاستجابة المدفوعة}}\right]$$

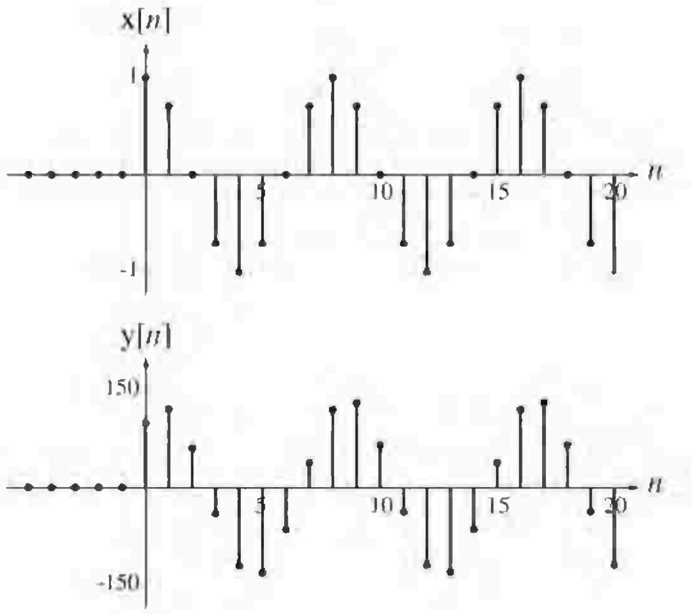
باستخدام المعادلة (١٤.٢):

$$y[n] = z^{-1}\left(100z\,\frac{\frac{(1/2)[1/2-\cos(\pi/4)]}{\left(1/2-e^{j\pi/4}\right)\left(1/2-e^{-j\pi/4}\right)}}{z-1/2}\right) + \left|\frac{100e^{j\pi/4}}{e^{j\pi/4}-1/2}\right| cos\left(\Omega_0 n + \measuredangle\frac{100e^{j\pi/4}}{e^{j\pi/4}-1/2}\right)u[n]$$

المعادلة رقم (١٤.٣)

$$y[n] = [-19.07(1/2)^n + 135.72cos(\pi\, n/4 - 0.5)]u[n]$$

أنظر شكل (١٤.١٠)




**شكل رقم (١٤.١٠) دالة جيب تمام سببي واستجابة النظام لها**

دعنا الآن نوجد استجابة النظام لدالة جيب تمام حقيقية يتم تطبيقها عند الزمن $n\to-\infty$ باستخدام الـ DTFT وذلك بغرض المقارنة. دالة العبور، معبرا عنها كدالة في التردد الزاوي $\Omega$، باستخدام العلاقة $z=e^{j\Omega}$، يمكن وضعها على الصورة التالية:

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{100e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-1/2}.$$

بإجراء DTFT لدالة الدخل x[n] :

$$X(e^{j\Omega}) = \pi[\delta_{2\pi}(\Omega-\Omega_0)+\delta_{2\pi}(\Omega+\Omega_0)].$$

وبالتالي ستكون الاستجابة كما يلي :

$$Y(e^{j\Omega}) = \pi[\delta_{2\pi}(\Omega-\Omega_0)+\delta_{2\pi}(\Omega+\Omega_0)]\frac{100e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-1/2}.$$

أو :

$$Y(e^{j\Omega}) = 100\pi\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-1/2}\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi k)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-1/2}\delta(\Omega+\Omega_0-2\pi k)\right]$$

باستخدام خاصية التكافؤ للصدمة :

$$Y(e^{j\Omega}) = 100\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{e^{j(\Omega_0+2\pi k)}}{e^{j(\Omega_0+2\pi k)}-1/2}\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi k)+\frac{e^{j(-\Omega_0+2\pi k)}}{e^{j(-\Omega_0+2\pi k)}-1/2}\delta(\Omega+\Omega_0-2\pi k)\right]$$

حيث إن

$e^{j(\Omega_0+2\pi k)}=e^{j\Omega_0}$ و $e^{j(-\Omega_0+2\pi k)}=e^{-j\Omega_0}$ لقيم K الصحيحة يمكننا كتابة ما يلي :

$$Y(e^{j\Omega}) = 100\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{e^{j\Omega_0}\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi k)}{e^{j\Omega_0}-1/2}+\frac{e^{-j\Omega_0}\delta(\Omega+\Omega_0-2\pi k)}{e^{-j\Omega_0}-1/2}\right]$$

أو :

$$Y(e^{j\Omega}) = 100\pi\left[\frac{e^{j\Omega_0}\delta_{2\pi}(\Omega-\Omega_0)}{e^{j\Omega_0}-1/2}+\frac{e^{-j\Omega_0}\delta_{2\pi}(\Omega+\Omega_0)}{e^{-j\Omega_0}-1/2}\right]$$

بإيجاد المقام المشترك، وتطبيق قانون أويلر والتبسيط نحصل على :

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{100\pi}{5/4-\cos(\Omega_0)}\left\{\begin{matrix}(1-(1/2)\cos(\Omega_0))[\delta_{2\pi}(\Omega-\Omega_0)+\delta_{2\pi}(\Omega+\Omega_0)]\\ +(j/2)sin(\Omega_0)[\delta_{2\pi}(\Omega+\Omega_0)-\delta_{2\pi}(\Omega-\Omega_0)]\end{matrix}\right\}.$$

بإيجاد DTFT العكسي نحصل على :

$$Y[n] = \frac{50}{5/4-\cos(\Omega_0)}\{[1-(1/2)\cos(\Omega_0)]2\cos(\Omega_0 n)+\sin(\Omega_0)\sin(\Omega_0 n)\}.$$

أو كما يلي حيث إن $\Omega_0=\pi/4$:

$$Y[n] = 119.06\,cos(\pi n/4)+65.113sin(\pi n/4) = 135.72\,cos(\pi n/4-0.5).$$

وهو تماما ما حصلنا عليه مسبقا (فيما عدا لوحدة التتابع u[n]) بالنسبة للاستجابة المدفوعة في المعادلة (١٤.٣).

## (١٤.٦) محاكاة الأنظمة المستمرة زمنياً باستخدام الأنظمة المتقطعة زمنياً

### العلاقات بين تحويل زد وتحويل لابلاس

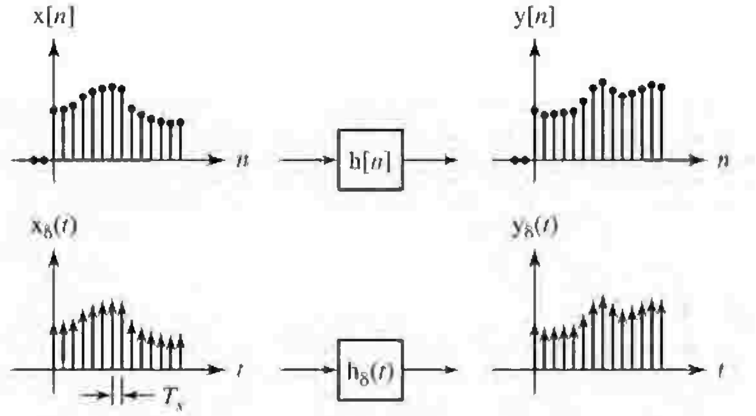
لقد استعرضنا في فصول سابقة علاقات مهمة بين طرق تحويل فورير. ولقد أوضحنا بالذات أن هناك تكافؤاً معلوماتياً بين الإشارة المتقطعة زمنياً x[n]=x(nTs) التي يتم تشكيلها عن طريق أخذ عينات من الإشارة المستمرة زمنياً، وإشارة صدمة مستمرة زمنياً $x_\delta(t)=x(t)\delta_{T_s}(t)$ المشكلة عن طريق أخذ عينات صدمية من الإشارة

المستمرة زمنياً، حيث $f_s=1/Ts$. ولقد استنتجنا أيضاً العلاقة بين DTFT لـ x[n]، و CTFT لـ $x_\delta(t)$ في الفصل ١٠. حيث أن تحويل زد يتم تطبيقه على الإشارات المتقطعة زمنياً وأنه تعميم للـ DTFT، وأن تحويل لابلاس يتم تطبيقه على الإشارات المستمرة زمنياً وهو تعميم للـ CTFT فإنه يجب أن نتوقع علاقة وثيقة بينهما أيضاً.

افترض النظامين التاليين، نظام متقطع زمنياً له استجابة صدمة h[n]، ونظام مستمر زمنياً له استجابة صدمة $h_\delta(t)$ وسنفترض أنهما يرتبطان بالعلاقة التالية:

$$h_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\delta(t - nT_s). \qquad \text{المعادلة رقم (١٤.٤)}$$

هذا التكافؤ يوضح أن كل شيء يحدث لـ x[n] في النظام المتقطع زمنياً، يحدث بطريقة مناظرة لـ $x_\delta(t)$ في النظام المستمر زمنياً كما في شكل (١٤.١١). لذلك من الممكن أن نحلل الأنظمة المتقطعة زمنياً باستخدام تحويل لابلاس باستخدام شدة الصدمات المستمرة زمنياً التي تمثل قيم الإشارات المتقطعة زمنياً عند نقاط متساوية التباعد في الزمن. ولكن من المريح رمزياً أن نستخدم تحويل زد بدلاً من ذلك.




**شكل رقم (١٤.١١) التكافؤ بين الأنظمة المتقطعة زمنياً والمستمرة زمنياً.**

دالة العبور للنظام المتقطع زمنياً تكون على الصورة:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

ودالة العبور للنظام المستمر زمنياً يمكن كتابتها على الصورة:

$$H_\delta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]e^{-nT_s s}.$$

إذا كانت استجابات الصدمة متكافئة بالمفهوم الموجود في المعادلة (١٤.٤)، بالتالي فإن دوال العبور يجب أن تكون متكافئة أيضاً. هذا التكافؤ يمكن رؤيته في العلاقة التالية:

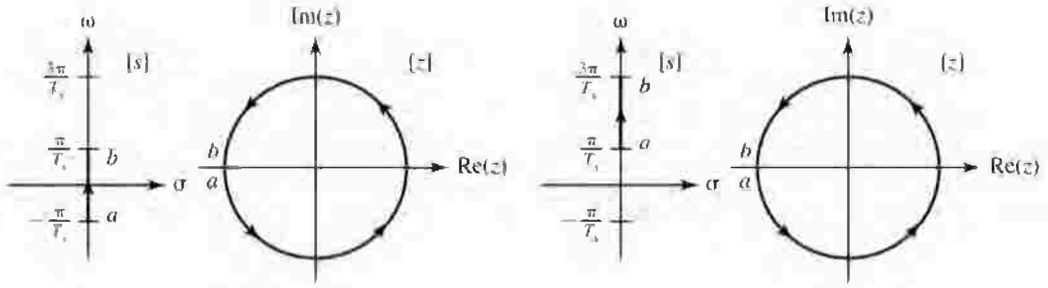
$$H_\delta(s) = H(z)|_{z\to e^{sT_s}}.$$

من المهم عند هذه النقطة أن نفترض بعض الآثار المترتبة على التحويل $z \to e^{sT_s}$. أحد الطرق لنرى العلاقة بين المستويين المركبين s و z هي أن ننقل محيطاً أو منطقة في المستوى s إلى محيط أو منطقة مقابلة في المستوى z.

سنفترض أولا محيطاً بسيطاً جداً في المستوى s ، المحيط هو s=jω=j2πf حيث ω و f تمثل التردد الزاوي والتردد الدوري الحقيقي على التوالي. هذا المحيط هو المحور ω في المستوى s. المحيط المقابل في المستوى زد سيكون $e^{j\omega T_s}$ أو $e^{j2\pi f T_s}$ ، ولأي قيمة حقيقية لـ ω أو f ، فإنها يجب أن تقع على دائرة الوحدة. على الرغم من ذلك فإن هذا النقل ليس بالبساطة التي تم بها التعبير عنه في العبارة السابقة.

لكي نوضح تعقيدات هذه العملية، سننقل المقطع $-\pi/T_s<\omega<\pi/T_s$ المساوي للمقطع $-f_s/2<f<f_s/2$ إلى ما يقابله في المستوى z. مع عبور ω لهذا المقطع من $-\pi/T_s\rightarrow \omega \rightarrow \pi/T_s$ ، فإن ال z ستقطع دائرة الوحدة من $e^{-j\pi}$ حتى $e^{+j\pi}$ في اتجاه عكس عقارب الساعة، حيث سيقطع دورة كاملة من دائرة الوحدة. الآن إذا افترضنا أن ω ستقطع المنطقة التالية $\pi/T_s\rightarrow\omega\rightarrow 3\pi/T_s$ ، فإن z ستقطع دائرة الوحدة من $e^{j\pi}$ حتى $e^{+j3\pi}$ ، وهي نفسها المحيط السابق نفسه لدائرة الوحدة ؛ لأن $e^{-j\pi} = e^{j\pi} = e^{j3\pi} = e^{j(2n+1)\pi}$ حيث n أي رقم صحيح. لذلك فإنه من الواضح أن التحويل $z \rightarrow e^{sT_s}$ ، ينقل المحور w في المستوى s إلى دائرة الوحدة في المستوى z ، العديد من المرات إلى المالانهاية كما هو موضح في شكل (١٤.١٢).

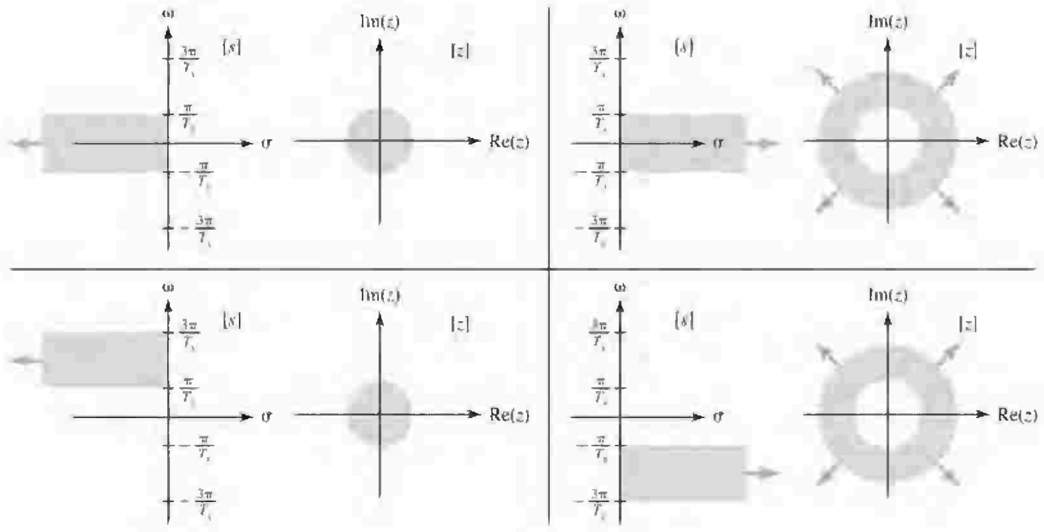
هذه طريقة أخرى للنظر إلى ظاهرة الاستعارة أو الخلط الترددي. كل هذه المقاطع من المحور التخيلي للمستوى s التي يبلغ طول كل منها $2\pi/T_s$ تظهر هي نفسها تماماً عند نقلها إلى المستوى z نتيجة تأثيرات أخذ العينات. لذلك، فإنه لكل نقطة على المحور التخيلي في المستوى s هناك نقطة وحيدة وفريدة على دائرة الوحدة في المستوى z. ولكن هذا التقابل الفريد ليس مطبقاً بالطريقة العكسية، حيث إنه لكل نقطة على دائرة الوحدة في المستوى z فإن هناك مالانهاية من النقط المقابلة على المحور التخيلي في المستوى s.



**شكل رقم (١٤.١٢) نقل المحور ω في المستوى s إلى دائرة الوحدة في المستوى z.**

بأخذ خطوة أخرى في مفهوم النقل، فإن النصف الأيسر من المستوى s سينتقل إلى داخل دائرة الوحدة في المستوى z ، والنصف الأيمن من المستوى s سينتقل إلى ما هو خارج دائرة الوحدة في المستوى z (عدد لا نهائي من المرات في كل حالة). الأفكار المقابلة عن استقرار الأنظمة ومواضع الأقطاب والأصفار ستنتقل ب الطريقة نفسها.

أي نظام مستمر زمنياً ومستقر تكون له دالة عبور كل أقطابها في النصف الأيسر المفتوح من المستوى s، وأي نظام متقطع زمنياً ومستقر تكون له دالة عبور تقع كل أقطابها في الداخل المفتوح لدائرة الوحدة في المستوى z كما هو مبين في شكل (١٤.٣١).




**شكل رقم (١٤.١٣) نقل مناطق في المستوى s إلى مناطق في المستوى z.**

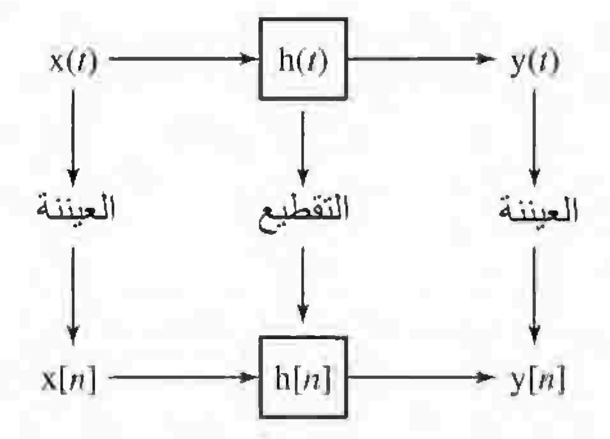
**الثبات الصدمي**

لقد فحصنا في الفصل ١٠ كيف يتم تحويل الإشارات المستمرة زمنياً إلى إشارات متقطعة زمنياً عن طريق أخذ العينات. ولقد وجدنا، أنه تحت شروط معينة، كانت الإشارة المتقطعة زمنياً هي تمثيل جيد للإشارة المستمرة زمنياً بمفهوم أنها تحتفظ عملياً بكل معلوماتها. الإشارة المتقطعة زمنياً المشكلة عن طريق أخذ عينات مناسبة من الإشارة المستمرة زمنياً تحاكي بمفهوم معين الإشارة المستمرة زمنياً. لقد شرحنا في هذا الفصل التكافؤ بين الأنظمة المتقطعة زمنياً التي لها استجابة صدمة $h[n]$ والأنظمة المستمرة زمنياً التي لها استجابة صدمة كالتالي :

$$h_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\delta(t - nT_s).$$

النظام الذي استجابة الصدمة له تساوي $h_\delta(t)$ يعتبر نوعاً خاصاً من الأنظمة لأن استجابة صدمته تتكون من صدمات فقط. عملياً، ليس من الممكن تحقيق ذلك؛ لأن دالة العبور لمثل هذه الأنظمة، لكونها دورية، تكون لها استجابة غير مساوية للصفر عند الترددات التي تقترب من الما لانهاية. لا يوجد نظام مستمر زمنياً حقيقياً يمكنه أن تكون له استجابة صدمة تحتوي صدمات حقيقية، على الرغم من أن ذلك من الممكن أن يكون تقريباً جيداً لأغراض التحليل.

لكي نحاكي الأنظمة المستمرة زمنياً باستخدام الأنظمة المتقطعة زمنياً يجب علينا أولاً أن نصل إلى مشكلة التكافؤ المفيد بين النظام المتقطع زمنياً، الذي يجب أن تكون استجابته الصدمية متقطعة، والنظام المستمر زمنياً، الذي يجب أن تكون استجابته الصدمية مستمرة. التكافؤ الأكثر مباشرة ووضوح بين الإشارة المتقطعة زمنياً والإشارة المستمرة زمنياً هي أن يكون لدينا قيم الإشارة المستمرة زمنياً عند لحظات أخذ العينات تساوي تماماً أو تكون قيم الإشارة المتقطعة زمنياً عند الأزمنة المتقطعة المقابلة x[n]=x(nTs). لذلك إذا كانت الإثارة لنظام متقطع زمنياً نسخة معيننة لإثارة النظام المستمر زمنياً، فإن استجابة النظام المتقطع زمنياً يجب أن تكون نسخة معيننة لاستجابة النظام المستمر زمنياً كما في شكل (١٤.١٤).




**شكل رقم (١٤.١٤) عيننة الإشارات وتقطيع الأنظمة.**

الاختيار الأكثر طبيعية للـ h[n] من الممكن أن يكون h[n]=h(nTs). حيث إن h[n] ليست إشارة تحدث حقيقيا في هذا النظام، ولكنها بدلاً من ذلك دالة تصف النظام، فإننا لا نستطيع أن نقول بدقة إن شكل (١٤.١٤) يبين عملية أخذ العينات. إننا لا نأخذ عينات من إشارة، ولكن بدلاً من ذلك، فإننا نقوم بتقطيع النظام. اختيار استجابة الصدمة للنظام المتقطع زمنياً h[n]=h(nTs) يحقق نوعاً من التكافؤ بين استجابات الصدمة للنظامين. بهذا الاختيار لاستجابة الصدمة، إذا تمت إثارة نظام مستمر زمنياً بوحدة صدمة مستمرة زمنياً، وإثارة نظام متقطع زمنياً بوحدة صدمة متقطعة زمنياً لها الشدة نفسها ، فإن الاستجابة y[n] ستكون نسخة معيننة للاستجابة y(t) وأن y[n]=y(nTs). ولكن على الرغم من أن النظامين سيكون لهما استجابات صدمة متكافئة بمفهوم أن h[n]=h(nTs)، و y[n]=y(nTs)، فإن ذلك لا يعني أن استجابات النظام للإثارات الأخرى ستكون متكافئة بالمفهوم نفسه. تصميم النظام الذي يكون له h[n]=h(nTs) يسمى تصميماً الصدمة نتيجة تكافؤ استجابات النظام مع وحدات الصدمات.

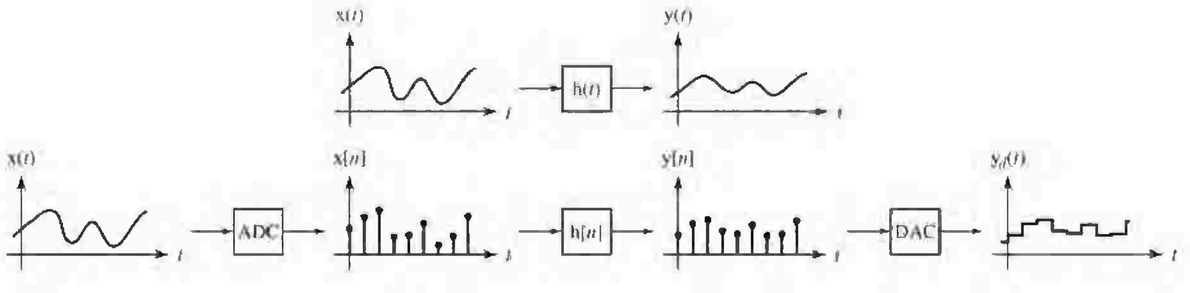
من المهم أن نشير هنا أننا إذا اخترنا أن نجعل h[n]=h(nTs)، وقمنا بإثارة النظامين بوحدات الصدمات، فإن الاستجابات ستكون بينها العلاقة التالية y[n]=y(nTs)، ولكننا لا نستطيع القول بأن x[n]=x(nTs) كما في شكل

(١٤.١٤). شكل (١٤.١٤) يبين أن الإشارة المتقطعة زمنياً يتم تشكيلها عن طريق أخذ عينات من الإثارة المستمرة زمنياً، ولكن إذا كانت الإثارة المستمرة زمنياً هي صدمة، فإننا لن نستطيع عينتها. حاول أن تتخيل أخذ عينات من صدمة مستمرة زمنياً. أولا، إذا كنا نأخذ العينات عند نقاط زمنية بمعدل محدد لمحاولة "مسك"، أو أخذ العينة عند حدوث الصدمة، فإن احتمال أن نرى الصدمة الحقيقية في العينات الناتجة ستكون صفراً لأن الصدمة الحقيقية لها عرض زمني يساوي صفراً. حتى إذا استطعنا أن نأخذ العينة عند حدوث الصدمة تماماً فإننا نستطيع القول أن $\delta[n]=\delta(nT_s)$، ولكن ذلك لا يكون معقولا لأن مقدار الصدمة المستمرة زمنياً عند لحظة حدوثها لا يكون محدداً (لأنها ليست دالة عادية)، وعلى ذلك، فإننا لن نستطيع تحقيق الشدة المقابلة للصدمة المتقطعة زمنياً $\delta[n]$.

**أنظمة البيانات المعينة**

نتيجة الزيادات الهائلة في سرعات المعالجات والذاكرة والانخفاض الهائل أيضاً في تكلفة هذه المعالجات، فإن تصميم الأنظمة الحديثة يستخدم عادة أنظمة جانبية متقطعة زمنياً لتحل محل الأنظمة الفرعية التي تستخدم عادة مع الأنظمة الفرعية المستمرة زمنياً لتوفير التكلفة والفراغ والطاقة المستخدمة ولزيادة مرونة واعتمادية النظام. بعض الأمثلة على ذلك القيادة الآلية للطائرات، والتحكم في العمليات الصناعية والكيميائية، والعمليات الصناعية، وتشغيل السيارة ونظام الوقود فيها. الأنظمة التي تحتوي على أنظمة فرعية متقطعة زمنياً، وأنظمة فرعية مستمرة زمنياً والآليات للتحويل بين إشارات هذه الأنظمة الفرعية تسمى أنظمة البيانات المعينة.

أول نوع من أنظمة البيانات المعينة المستخدم ليحل محل الأنظمة المستمرة زمنياً، وما زال هو النوع السائد أو المنتشر، يأتي من فكرة طبيعية. إننا نقوم بتحويل الإشارات المستمرة زمنياً إلى إشارات متقطعة زمنياً باستخدام المحول التماثلي الرقمي analog to digital converter, ADC، ثم نقوم بمعالجة العينات الخارجة من ADC في الأنظمة المتقطعة زمنياً. بعد ذلك نقوم بتحويل الاستجابة المتقطعة زمنياً إلى استجابة مستمرة زمنياً مرة أخرى باستخدام المحول الرقمي التماثلي digital to analog converter DAC كما في شكل (١٤.١٥).



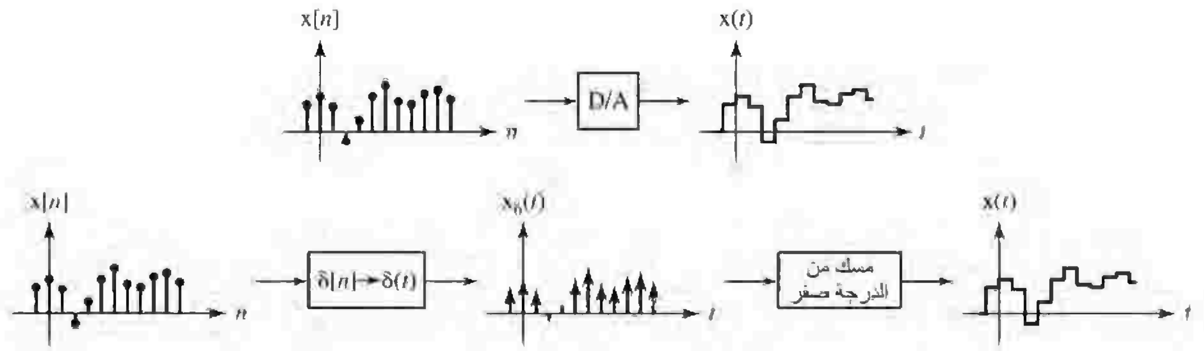

**شكل رقم (١٤.١٥) نوع شائع من محاكاة البيانات المعينة للأنظمة المستمرة زمنياً**

من الممكن أن يكون من متطلبات التصميم أن تكون استجابة النظام المعينن أقرب ما يكون للاستجابة المستمرة زمنياً المطلوبة. لكي يتم ذلك يجب علينا اختيار h[n] بطريقة مناسبة وجيدة، ولكي يتم هذا الاختيار لـ h[n] يجب علينا أيضاً أن نفهم التعامل مع كل من ADC و DAC.

من السهل جداً أن نمثل أو نضع نموذجاً للـ ADC. إنه يقرأ أو يكتسب قيمة إشارة الدخل عند لحظة أخذ العينة ويعطي أو يستجيب برقم يتناسب مع هذه القيمة. (إنه يقوم بتكميم الإشارة الداخلة، ولكننا سنهمل هذا التأثير في هذا التحليل). النظام الفرعي الذي له استجابة صدمة h[n] يتم تصميمه لجعل نظام البيانات المعيننة يحاكي تأثير النظام المستمر زمنياً الذي له استجابة صدمة h(t).

تأثير DAC يكون أكثر تعقيدا في النمذجة الرياضية عن ADC، حيث تتم إثارة DAC برقم قادم من النظام الفرعي المتقطع زمنياً، وهذ الرقم يمثل شدة الصدمة، وعليه أن يستجيب بإشارة مستمرة زمنياً تتناسب مع هذا الرقم، وتظل هذه الإشارة ثابتة حتى يتغير الرقم الداخل إلى قيمة جديدة. يمكن نمذجة ذلك عن طريق التفكير هذه العملية على خطوتين. أولا نفترض أن الصدمة المتقطعة زمنياً يتم تحويلها إلى صدمة مستمرة زمنياً ب الشدة نفسها. بعد ذلك ندع الصدمة المستمرة زمنياً أن تقوم بإثارة دائرة مسك من الدرجة صفر (تم تقديمها في الفصل ١٠) يكون لها استجابة صدمة مستطيلة ارتفاعها يساوي واحداً وعرضها الزمني Ts يبدأ عند الزمن t=0 كما يلي وكما هو موضح في شكل (١٤.١٦).

$$h_{zoh}(t) = \begin{Bmatrix} 0, & t<0 \\ 1, & 0<t<T_s \\ 0, & t>T_s \end{Bmatrix} = rect\left(\frac{t-T_s/2}{T_s}\right).$$

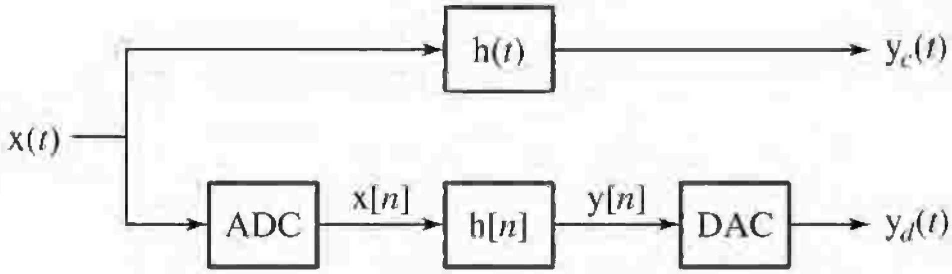



**شكل رقم (١٤.١٦) التكافؤ بين تحويل DAC وتحويل النبضة المتقطعة زمنياً إلى نبضة مستمرة زمنياً المتبوع بدائرة مسك من الدرجة صفر**

دالة العبور لدائرة المسك من الدرجة صفر هي تحويل لابلاس لاستجابة صدمتها $h_{zoh}(t)$ التي تكون على الصورة:

$$H_{zoh}(S) = \int_{0^-}^{\infty} h_{zoh}(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{T_s} e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-S}\right]_{0^-}^{T_s} = \frac{1-e^{-stT_s}}{S}.$$

الخطوة التصميمية التالية هي أن نجعل h[n] تحاكي تأثير الـ h(t) بمفهوم أن الاستجابات الكلية للأنظمة تكون أقرب ما يكون من بعضها بعضا. النظام المستمر زمنياً تتم إثارته بالإشارة x(t) ويعطي الاستجابة $y_c(t)$. المطلوب هنا هو تصميم نظام بيانات معينة بحيث إذا قمنا بتحويل x(t) إلى إشارة متقطعة زمنياً x[n]=x(nTs) باستخدام ADC، ثم يقوم النظام بمعالجة هذه الإشارة ليعطي الاستجابة y[n]، بعد ذلك يتم تحويل هذه الاستجابة $y_d(t)$ باستخدام DAC، وبالتالي تكون $y_d(t)=y_c(t)$ كما في شكل (١٤.١٧).




**شكل رقم (١٤.١٧) التكافؤ بين الأنظمة المستمرة زمنياً وأنظمة البيانات المعينة**

لا يمكن تحقيق ذلك بصورة دقيقة (إلا في الحدود النظرية التي يكون فيها معدل أخذ العينات من الممكن أن يقترب من المالانهاية). ولكن من الممكن وضع شروط يكون معها من الممكن عمل تقريب جيد للنظام، يتحسن مع زيادة معدل أخذ العينات.

كخطوة في اتجاه تحديد الاستجابة الصدمية h[n] للنظام الفرعي، سنفترض أولاً أن استجابة النظام المستمر زمنياً، ليس للإشارة x(t)، ولكن بدلاً من ذلك ستكون للإشارة $x_\delta(t)$ المحددة كما يلي:

$$X_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT_s)\delta(t - nT_s) = X(t)\delta_{T_s}(t).$$

الاستجابة لهذه الإثارة ستكون كما يلي:

$$y(t) = h(t) * X_\delta(t) = h(t) * \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(nT_s)\delta(t - mT_s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m]h(t - mT_s)$$

حيث x[n] هي النسخة المعينة من x(t). الاستجابة عند المضاعف رقم n من الزمن Ts ستكون:

$$y(nT_s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m]h\big((n-m)T_s\big). \qquad \text{المعادلة رقم (١٤.٥)}$$

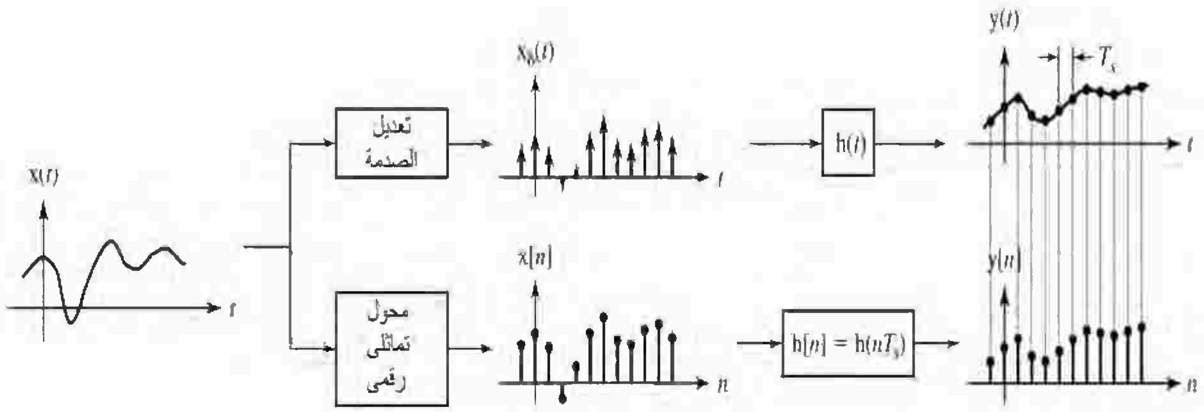
قارن ذلك مع استجابة النظام المتقطع زمنياً مع استجابة الصدمة h[n]=h(nTs) للإثارة x[n]=x(nTs) التي تساوي:

$$y[n] = X[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m]h[n-m]. \qquad \text{المعادلة رقم (١٤.٦)}$$

بمقارنة المعادلة (١٤.٥) والمعادلة (١٤.٦) يكون من الواضح أن الاستجابة y(t) لنظام مستمر زمنياً له الاستجابة الصدمية h(t) عند لحظة أخذ العينة nTs لإشارة مستمرة زمنياً معيننة صدميا كالتالي :

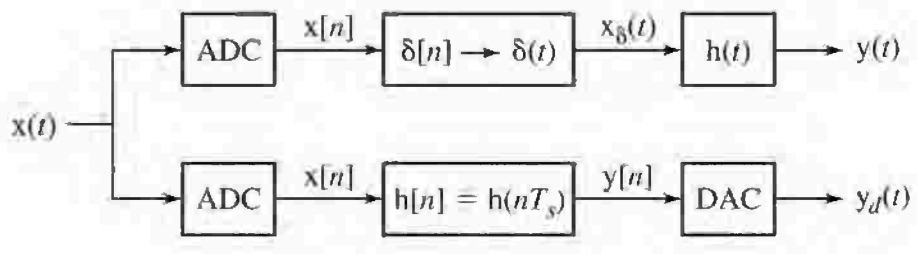
$$X_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT_s)\delta(t-nT_s).$$

يمكن إيجادها عن طريق إيجاد استجابة النظام الذي له استجابة صدمة تساوي h[n]=h(nTs) للإشارة x[n]=x(nTs) ، ثم نقوم بعمل التكافؤ y(nTs)=y[n] كما في شكل (١٤.١٨).




**شكل رقم (١٤.١٨) التكافؤ عند الأزمنة nTs والأزمنة المتقطعة زمنياً المقابلة n لاستجابة نظام مستمر زمنياً وآخر متقطع زمنياً تمت إثارتهما عن طريق إشارات مستمرة زمنياً ومتقطعة زمنياً مستنتجة من الإشارة المستمرة نفس زمنياً.**

الآن ، بالعودة إلى النظام المستمر زمنياً ونظام البيانات المعيننة ، سنعدل النظام المستمر زمنياً كما هو موضح في شكل (١٤.١٩).باستخدام التكافؤ الموجود في شكل (١٤.١٨) سنجد أن y[n]=y(nTs).

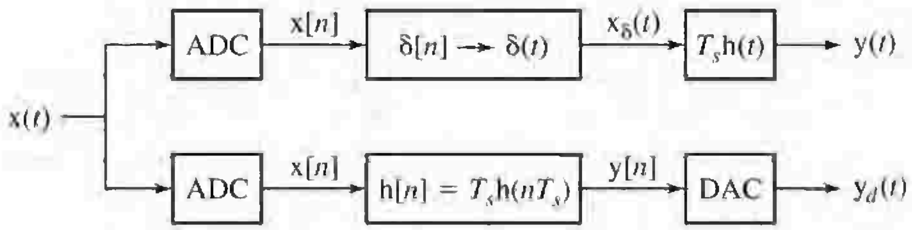



**شكل رقم (١٤.١٩) الأنظمة المستمرة زمنياً وأنظمة البيانات المعيننة عند إثارة النظام المستمر زمنياً بالإشارة xδ(t) بدلاً من x(t)**

الآن سنغير استجابة الصدمة للنظام المستمر زمنياً والنظام المتقطع زمنياً عن طريق ضرب كل منهما في الزمن بين العينات Ts كما في شكل (١٤.٢٠). في هذا النظام المعدل مازلنا نستطيع القول بأن y[n]=y(nTs)، حيث الآن:

المعادلة رقم (١٤.٧) $y(t) = X_\delta(t) * T_s h(t) = [\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT_s)\delta(t-nT_s)] * h(t)T_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT_s)h(t-nT_s)T_s,$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m]h[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m]T_s h\big((n-m)T_s\big)$$




**شكل رقم (١٤.٢٠) الأنظمة المستمرة زمنياً وأنظمة البيانات المعينة عند ضرب استجابات الصدمة لهما في الزمن بين العينات**

استجابة الصدمة الجديدة للنظام الفرعي ستكون h[n]=Tsh(nTs) وما زالت h(t) تمثل استجابة الصدمة للنظام الأصلي المستمر زمنياً. الآن في المعادلة (١٤.٧) دع Ts تقترب من الصفر. عند هذا الحد، سيصبح المجموع في الجانب الأيمن هو الالتفاف التكاملي الذي تم استنتاجه في معرض استنتاج الالتفاف في الفصل ٥،

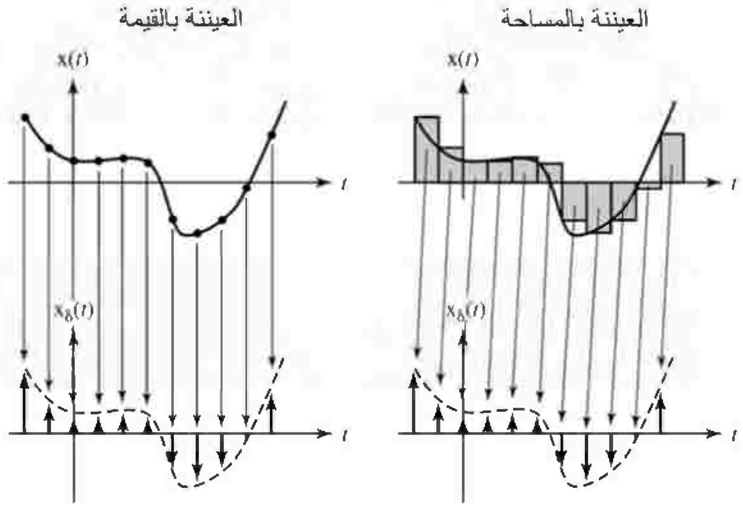
$$\lim_{T_s\to 0} y(t) = \lim_{T_s\to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT_s)h(t-nT_s)T_s = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau)h(t-\tau)d\tau,$$

وهي الإشارة $y_c(t)$، التي تمثل استجابة النظام الأصلي المستمر زمنياً في شكل (١٤.١٧) للإشارة x(t). أيضاً، عند هذا الحد الزمني تكون $y[n]=y_c(nTs)$. لذلك، ففي النهاية فإن التباعد بين النقاط Ts يقترب من الصفر، ولحظات أخذ العينات ستتقارب بحيث تصبح زمنا مستمراً وسيكون هناك تقابل من النوع واحد لواحد بين قيم الإشارة y[n] وقيم الإشارة عند $y_c(t)$. استجابة نظام البيانات المعينة $y_d(t)$ سيكون موافق تماماً ولا يمكن تفريقه من الاستجابة $y_c(t)$، للنظام الأصلي للإشارة x(t). بالطبع، فإنه عملياً لا يمكن أن يكون معدل أخذ العينات يساوي مالانهاية، لذلك فإن المقابلة $y[n]=y_c(nTs)$ لا يمكن أن تكون تساوي تام، ولكنها تحقق تكافؤاً تقريبياً بين النظام المستمر زمنياً ونظام البيانات المعينة.

هناك طريق آخر مفهومي للوصول إلى الخلاصة نفسها لاستجابة الصدمة للنظام المتقطع زمنياً h[n]=Tsh(nTs). في الاستنتاجات السابقة قمنا بتشكيل إشارة صدمة مستمرة زمنياً:

$$X_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

التي لها شدة صدمة تساوي عينات الإشارة x(t). الآن، بدلا من ذلك، نكون نسخة معدلة من إشارة الصدمة. افترض التقابل الجديد بين x(t) و $x_\delta(t)$ سيكون هو التقابل بين شدة الصدمة عند nTs تساوي تقريباً المساحة تحت x(t) في فترة أخذ العينات $nT_s \le t < (n+1)T_s$ وليست القيمة عند nTs. التكافؤ بين x(t) و $x_\delta(t)$ يعتمد الآن (تقريباً) على المساحات، كما في شكل (١٤.٢١). (هذا التقريب أفضل مع زيادة معدل أخذ العينات).




**شكل رقم (١٤.٢١) مقارنة بين العيننة بالقيمة والعيننة بالمساحة**

المساحة تحت x(t) تساوي تقريباً Ts(nTs) في كل فترة عيننة. لذلك فإن إشارة الصدمة المستمرة زمنياً الجديدة ستكون:

$$X_\delta(t) = T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT_s)\delta(t - nT_s).$$

إذا طبقنا الآن هذه الإشارة على نظام تكون استجابة الصدمة له هي h(t) فإننا سنحصل تماماً على الاستجابة نفسها كما في المعادلة (١٤.٧):

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT_s)h(t - nT_s)T_s.$$

وبالطبع النتيجة نفسها بأن $y[n]=y_c(nT_s)$ مع اقتراب معدل أخذ العينات من النهاية. كل ما عملناه في هذا الاستنتاج هو مصاحبة المعامل Ts مع الإثارة بدلا من أن تكون مع استجابة الصدمة. عندما نقوم بعمل التفاف للاثنين فإننا نحصل على النتيجة نفسها. إذا قمنا بأخذ عينات الإشارات بوضع شدة الصدمة تساوي مساحة الإشارة في فترة أخذ العينة، بدلاً من وضعها تساوي قيم الإشارة عند لحظة أخذ العينات، بالتالي فإن المقابلة $h[n]=h(nT_s)$ من الممكن أن تكون مقابلة تصميم بين نظام مستمر زمنياً ونظام بيانات معيننة يحاكيه. ولكن، حيث أننا لا نأخذ العينات بهذا الشكل، (لأن معظم الـ ADC's لا تعمل بهذه الطريقة)، فإننا بدلاً من ذلك نصاحب المعامل Ts مع استجابة الصدمة ونشكل المقابلة $h[n]=T_s h(nT_s)$.

**مثال ١٤.٥**

**تصميم نظام بيانات معينة لمحاكاة نظام مستمر زمنياً**

نظام مستمر زمنياً يمكن وصفه بدالة عبور كالتالية :

$$H_c(s) = \frac{1}{s^2+40s+300}.$$

صمم نظام بيانات معينة على الصورة الموضحة في شكل (١٤.١٥) لمحاكاة هذا النظام. نفذ هذا التصميم لمعدلين لأخذ العينات $f_s=10$ و $f_s=100$ وقارن بين استجابات الخطوة.

استجابة الصدمة للنظام المستمر زمنياً هي :

$$h_c(t) = (1/20)(e^{-10t} - e^{-30t})u(t).$$

بالتالي ستكون استجابة الصدمة للنظام الفرعي المتقطع زمنياً هي :

$$h_d[n] = (T_s/20)(e^{-10nT_s} - e^{-30nT_s})u[n].$$

ودالة العبور المقابلة في النطاق z ستكون :

$$H_d(z) = \frac{T_s}{20}\left(\frac{z}{z-e^{-10T_s}} - \frac{z}{z-e^{-30T_s}}\right).$$

استجابة الخطوة للنظام المستمر زمنياً ستكون :

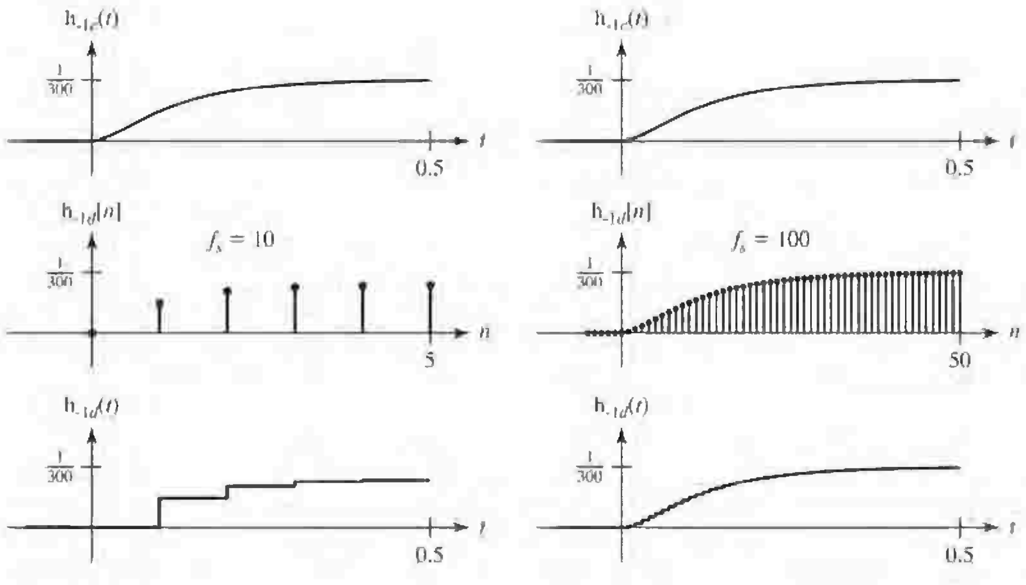
$$h_{-1c}(t) = \frac{2-3e^{-10t}+e^{-30t}}{600}u(t).$$

استجابة النظام الفرعي لوحدة التتابع ستكون :

$$h_{-1d}[n] = \frac{T_s}{20}\left[\frac{e^{-10T_s}-e^{-30T_s}}{(1-e^{-10T_s})(1-e^{-30T_s})} + \frac{e^{-10T_s}}{e^{-10T_s}-1}e^{-10nT_s} - \frac{e^{-30T_s}}{e^{-30T_s}-1}e^{-30nT_s}\right]u[n].$$

وستكون استجابة DAC كما يلي وكما هو موضح في شكل (١٤.٢٢).

$$h_{-1d}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y[n]rect\left(\frac{t-T_s(n+1/2)}{T_s}\right)$$




**شكل رقم (١٤.٢٢) مقارنة لاستجابات الخطوة لنظام مستمر زمنياً واثنين من أنظمة البيانات المعينة التي تحاكي معدلات عينة مختلفة.**

عند معدلات أخذ العينات المنخفضة نلاحظ أن جودة المحاكاة لنظام البيانات المعيننة سيئة جداً. إنها تقترب من قيمة للاستجابة المدفوعة حوالي 78% من الاستجابة المدفوعة للنظام المستمر زمنياً. عند معدل أخذ العينات الأعلى تكون المحاكاة أفضل كثيراً حيث تكون الاستجابة المدفوعة حوالى 99% من الاستجابة المدفوعة للنظام المستمر زمنياً. أيضاً عند المعدلات العالية لأخذ العينات، يكون الفرق بين استجابة النظام المستمر زمنياً واستجابة نظام البيانات المعيننة أقل كثيراً منه مع معدلات أخذ العينات المنخفضة.

يمكننا أن نرى التفاوت بين القيم المدفوعة بفحص المعادلة :

$$y[n]=\frac{T_s}{20}\left[\frac{e^{-10T_s}-e^{-30T_s}}{(1-e^{-10T_s})(1-e^{-30T_s})}+\frac{e^{-10T_s}}{e^{-10T_s}-1}e^{-10nT_s}-\frac{e^{-30T_s}}{e^{-30T_s}-1}e^{-30nT_s}\right]u[n].$$

الاستجابة المدفوعة تساوي :

$$y_{forced}=\frac{T_s}{20}\frac{e^{-10T_s}-e^{-30T_s}}{(1-e^{-10T_s})(1-e^{-30T_s})}.$$

إذا قربنا الدالة الأسية بأول مركبتين فيها في التحليل التتابعي لها كما يلي $e^{-10T_s}\approx 1-10T_s$ و $e^{-30T_s}\approx 1-30T_s$ فإننا سنحصل على $y_{forced}=1/300$ ، وهي الاستجابة المدفوعة الصحيحة. أما إذا كانت Ts ليست صغيرة بما فيه الكفاية، فإن تقريب الدالة الأسية في تحليلها التتابعي لن يكون جيداً وسيكون هناك فرق بين القيم المدفوعة الحقيقية والمثالية. عندما $f_s=10$ سنحصل على $e^{-10T_s}=0.368$، و 1-10Ts=0، و $e^{-30T_s}=0.0498$، و 1-30Ts=-2، وهذا يعتبر تقريباً مزعجاً. ولكن عندما $f_s=100$ نحصل على $e^{-100T_s}=0.905$، و 1-10Ts=0.9، و $e^{-30T_s}=0.741$، و 1-30Ts=0.7 وهذا يمثل تقريباً أفضل كثيراً.

## (١٤.٧) البناء القياسي للأنظمة

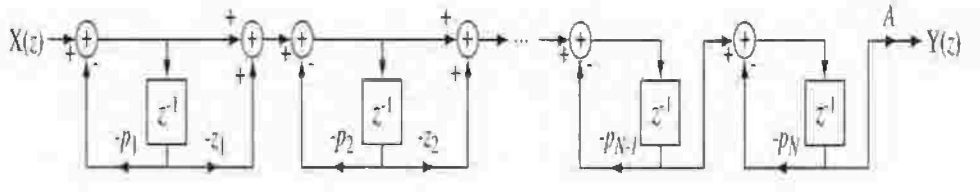
بناء الأنظمة المتقطعة زمنياً يتوازي كثيراً مع بناء الأنظمة المستمرة زمنياً. الطرق العامة نفسها يتم تطبيقها هنا حيث ينتج أنواع البناء نفسها كما سنرى.

**البناء المتوازي**

يمكن بناء توالي من الأنظمة من دالة العبور المحللة على الصورة التالية :

$$H(z)=A\frac{z-z_1}{z-p_1}\frac{z-z_2}{z-p_2}\cdots\frac{z-z_M}{z-p_M}\frac{1}{z-p_{M+1}}\frac{1}{z-p_{M+2}}\cdots\frac{1}{z-p_N}$$

حيث درجة البسط M≤N كما في شكل (١٤.٢٣).



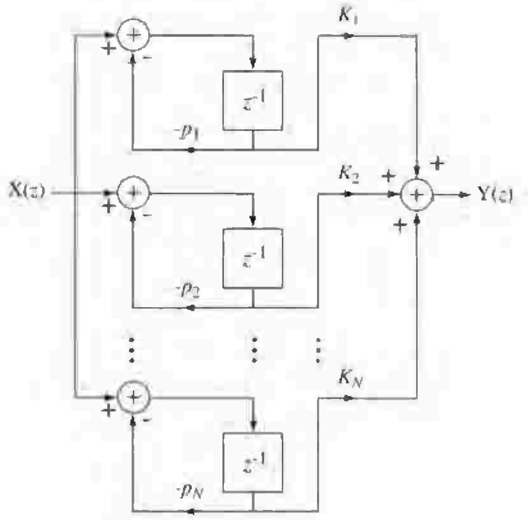

**شكل رقم (١٤.٢٣) البناء المتوالي للنظام الكلي**

**البناء المتوازي**

يمكن التعبير عن دالة العبور كمجموع من الكسور الجزيئية كما يلي :

$$H(z) = \frac{K_1}{z-p_1} + \frac{K_2}{z-p_2} + \cdots + \frac{K_N}{z-p_N}$$

ثم بناء النظام على التوالي كما في شكل (١٤.٢٤).




**شكل رقم (١٤.٢٤) البناء المتوازي للنظام الكلي.**

في الحقيقة يتم بناء الأنظمة المتقطعة زمنياً باستخدام مكونات رقمية. في هذه الأنظمة تكون كل الإشارات في صورة أرقام ثنائية بعدد محدد من البتات. في العادة يتم إجراء العمليات عن طريق حسابات النقطة الثابتة. إن ذلك يعني أن كل الإشارات سيتم تكميمها إلى رقم محدد من القيم الممكنة ولذلك فإنها لا تكون تمثيلاً حقيقياً للإشارات المثالية. هذا النوع من التصميم يؤدي في العادة إلى أسرع الأنظمة وأكثرها كفاءة، ولكن خطأ التكميم السابق بين الإشارات الحقيقية والمثالية، يجب التحكم فيه حتى يتم تجنب الضوضاء الناتجة عنه، أو في بعض الأحوال يجعل النظام غير مستقر. تحليل مثل هذا الأخطاء يقع خارج نطاق هذا الكتاب، ولكن عموماً فإن البناء المتوالي والمتوازي يكون أكثر سماحية وأقل تأثراً بمثل هذه الأخطاء عن طريقة البناء بالشكل المباشر II.

## (١٤.٨) ملخص النقاط المهمة

١- من الممكن تحليل الأنظمة المتقطعة زمنياً باستخدام تحويل لابلاس من خلال استخدام صدمات مستمرة زمنياً تحاكي مثيلاتها المتقطعة زمنياً، ولكن تحويل z يكون أكثر مناسبة في ذلك.

٢- يمكن نمذجة الأنظمة المتقطعة زمنياً باستخدام المعادلات الفرقية أو المخططات الصندوقية في النطاق الزمني أو النطاق الترددي.

٣- النظام LTI المتقطع زمنياً يكون مستقراً إذا كانت كل أقطاب دالة عبور هذا النظام تقع في الداخل المفتوح لدائرة الوحدة.

٤- الثلاثة أنواع الشهيرة للتوصيل البيني للأنظمة هي التوصيل المتتالي، والتوصيل المتوازي، والتوصيل مع التغذية العكسية.

٥- وحدة التتابع، والإشارة الجيبية إشارتان مهمتان عمليتان لاختبار خواص الأنظمة.

٦- يمكن للأنظمة المتقطعة زمنياً أن تحاكي بدرجة تقريب عالية الأنظمة المستمرة زمنياً، وهذا التقريب يتحسن مع زيادة معدل أخذ العينات.

٧- الطريقة المباشرة II، والبناء المتوالي والمتوازي هي طرق قياسية مهمة لبناء الأنظمة.

**تمارين مع إجاباتها**

**الاستقرار**

١- تحقق من استقرار الأنظمة التي لها دوال العبور التالية:

(أ) $H(z) = \frac{z}{z-2}$ (ب) $H(z) = \frac{z}{z^2-7/8}$

(ت) $H(z) = \frac{z}{z^2-(3/2)z+9/8}$ (ث) $H(z) = \frac{z^2-1}{z^3-2z^2+3.75z-0.5625}$

**الإجابة**: ثلاثة أنظمة غير مستقرة وواحدة مستقرة

**التوصيلات المتوالية، والمتوازية، والتغذية العكسية**

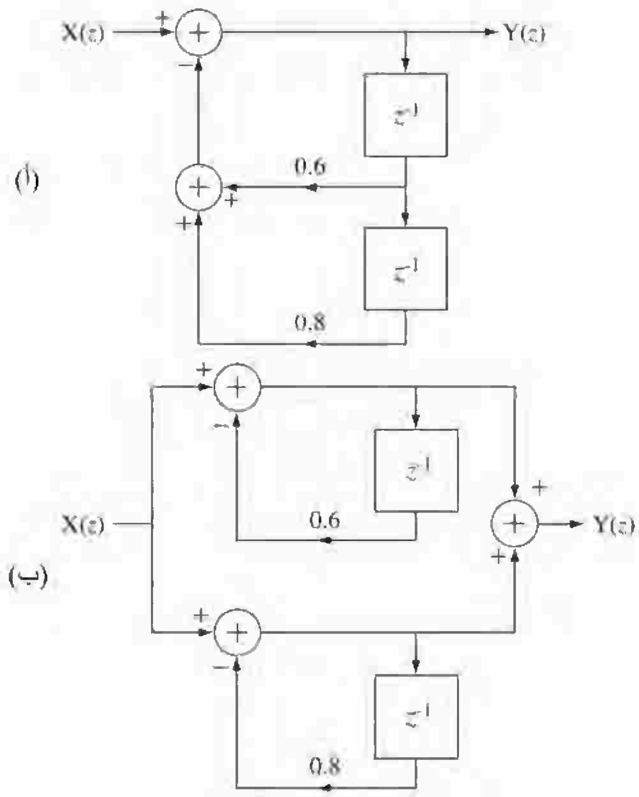
٢- نظام تغذية عكسية له دالة العبور التالية:

$$H(z) = \frac{K}{1+K\frac{z}{z-0.9}}$$

لأي مدي للـ K يكون هذا النظام مستقرا.

الإجابة: K>-0.1 أو K<-1.9

٣- أوجد دوال العبور للأنظمة الموضحة في شكل (ت- ٣) في صورة نسبة واحدة لكثيرتي حدود في المتغير z.




**شكل رقم (ت-٣)**

**الإجابة :**

$$\frac{z}{z+0.3}, \frac{z^2}{z^2+1.2z+0.27}$$

**الاستجابة للإشارات القياسية**

٤- أوجد الاستجابات $h_{-1}[n]$ للأنظمة التي لها دوال العبور التالية لتتابع الوحدة x[n]=u[n] :

(أ) $H(z) = \frac{z}{z-1}$ (ب) $H(z) = \frac{z-1}{z-1/2}$

**الإجابة :** $(1/2)^n$ ، و ramp[n+1]

٥- أوجد الاستجابة y[n] للأنظمة التي لها دوال العبور التالية للإشارة x[n]=cos(2πn/8)u[n]. بين أن الاستجابة المدفوعة ستكون هي نفسها كما لو تم الحصول عليها باستخدام الـ DTFT مع الإشارة x[n]=cos(2πn/8) :

(أ) $H(z) = \frac{z}{z-0.9}$ (ب) $H(z) = \frac{z^2}{z^2-1.6z+0.63}$

**الإجابة :**

$$y[n] = \{0.03482(0.7)^n + 1.454(0.9)^n + 1.9293\cos(2\pi n/8 - 1.3145)\}\mathrm{u}[n],$$
$$0.3232(0.9)^n\mathrm{u}[n] + 1.3644\cos(2\pi n/8 - 1.0517)\mathrm{u}[n]$$

## الموضع الجذري

٦- ارسم الموضع الجذري للأنظمة التالية التي لكل منها مسارات أمامية ومسارات تغذية عكسية كما يلي:

(أ) $H_1(z) = K\frac{z-1}{z+\frac{1}{2}},\qquad H_2(z) = \frac{4z}{z-0.8}$

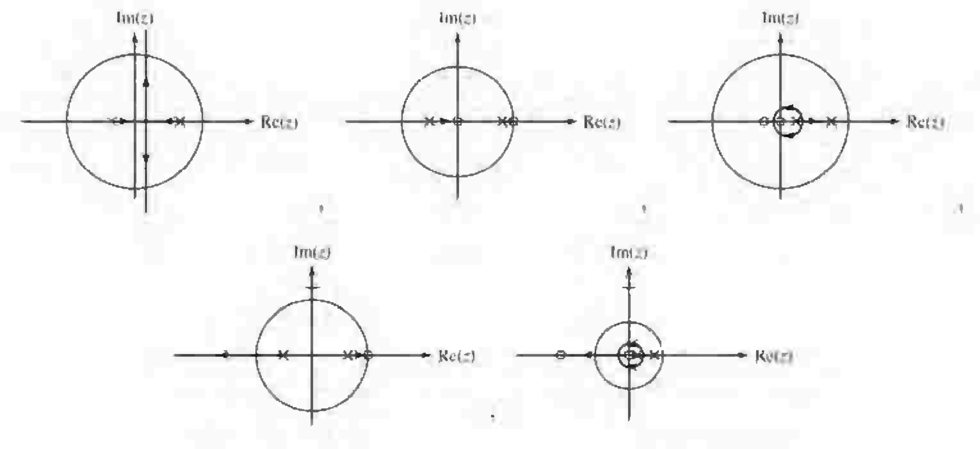
(ب) $H_1(z) = K\frac{z-1}{z+\frac{1}{2}},\qquad H_2(z) = \frac{4}{z-0.8}$

(ت) $H_1(z) = K\frac{z}{z-\frac{1}{4}},\qquad H_2(z) = \frac{z+\frac{1}{5}}{z-\frac{3}{4}}$

(ث) $H_1(z) = K\frac{z}{z-\frac{1}{4}},\qquad H_2(z) = \frac{z+2}{z-\frac{3}{4}}$

(ج) $H_1(z) = K\frac{1}{z^2-\frac{1}{4}z-\frac{2}{9}},\qquad H_2(z) = 1$

**الإجابة:**




**شكل رقم (ج-ت-٦)**

## العلاقة بين تحويل زد وتحويل لابلاس

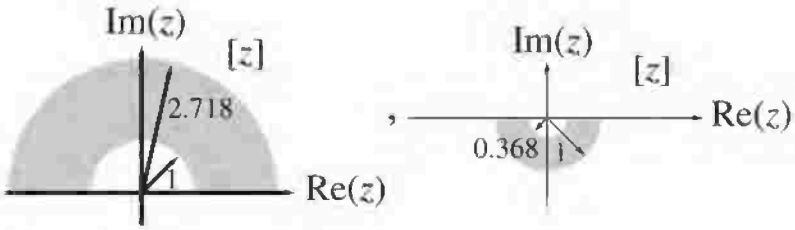
٧- ارسم المناطق التالية التي في المستوى s فيما يقابلها في المستوى z:

(أ) $0 < \sigma < 1/T_s,\quad 0 < \omega < \pi/T_s$

(ب) $-1/T_s < \sigma < 0,\quad -\pi/T_s < \omega < 0$

(ج) $-\infty < \sigma < \infty,\quad 0 < \omega < 2\pi/T_s$

**الإجابة:** كل المستوى z،



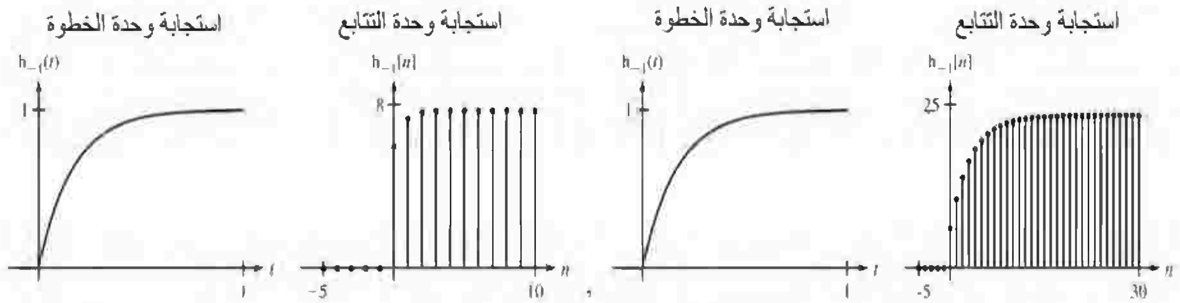

شكل رقم (ج–ت–٧)

**أنظمة البيانات المعيننة**

٨- باستخدام طريقة ثبات الصدمة للتصميم، صمم نظاماً يقارب الأنظمة التي لها دوال العبور التالية عند معدلات أخذ العينات المصاحبة لكل منها. قارن استجابات الصدمة واستجابات الخطوة (تتابع الوحدة) للأنظمة المستمرة زمنياً والمتقطعة زمنياً:

(أ) $H(s) = \frac{6}{s+6}, \quad f_s = 4 \quad \text{Hz}$ (ب) $H(s) = \frac{6}{s+6}, \quad f_s = 20 \quad \text{Hz}$

**الإجابة:**



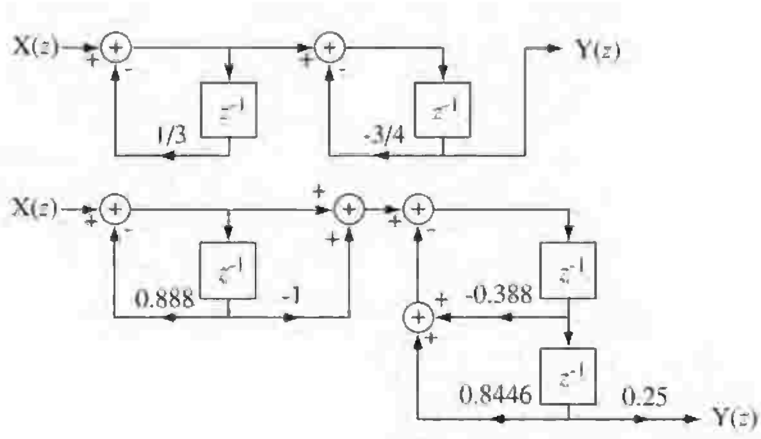

شكل رقم (ج–ت–8)

**بناء الأنظمة**

٩- ارسم المخطط الصندوقي للتوصيل المتتالي لكل من الأنظمة التي لها دوال العبور التالية:

(أ) $H(z) = \frac{z}{(z+1/3)(z-3/4)}$ (ب) $H(z) = \frac{z-1}{4z^3+2z^2+2z+3}$

**الإجابة:**

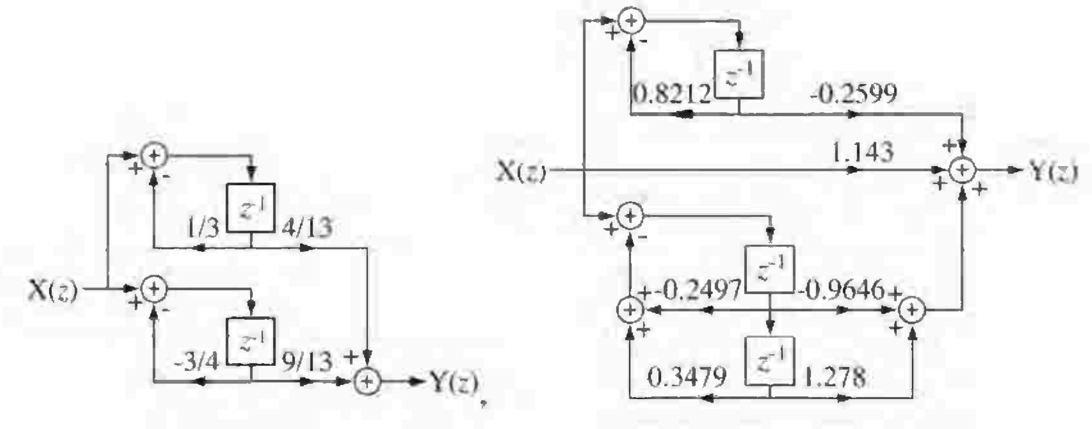



شكل رقم (ج–ت–٩)

١٠- ارسم المخطط الصندوقي للتوصيل المتوازي للأنظمة التي لها دوال العبور التالية :

(أ) $H(z) = \frac{z}{(z+1/3)(z-3/4)}$ (ب) $H(z) = \frac{8z^3-4z^2+5z+9}{7z^3+4z^2+z+2}$

**الإجابة :**




شكل رقم (ج–ت–١٠)

**تمارين بدون إجابات**

**الاستقرار**

١١- إذا كان :

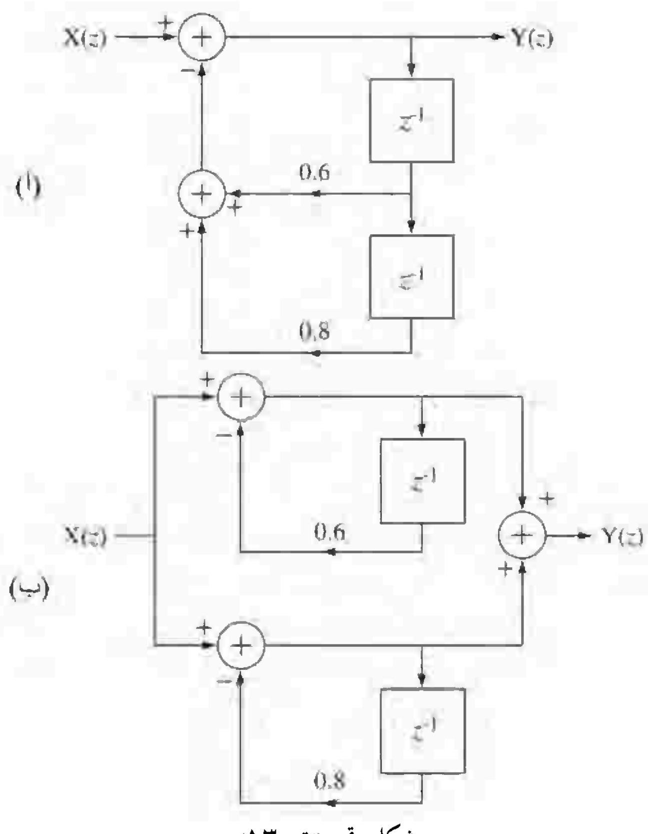
$$(1.1)^n cos(2\pi n/16) \overset{z}{\leftrightarrow} H_1(z),$$

و $h_2(z)=H_1(az)$، و $H_1(z)$ و $H_2(z)$ هما دوال العبور للنظام #1 والنظام #2 على التوالي، ما مدى قيم a التي تجعل النظام #2 مستقراً ويمكن بناؤه طبيعياً ؟

**التوصيل المتوازي، والمتوالي، والتغذية العكسية**

١٢- نظام تغذية عكسية له دالة عبور للمسار الأمامي كالتالي : $H_1(z)=Kz/(z-0.5)$ ودالة عبور للمسار المرتد كالتالي $H_2(z)=4z^{-1}$. لأي قيم للـ K سيكون هذا النظام مستقراً ؟

١٣- أوجد دوال العبور الكلية للأنظمة الموضحة في شكل (ت- ١٣) في صورة نسبة واحدة من كثيرتي حدود في المتغير z :




**شكل رقم (ت-١٣)**

**الاستجابة للإشارات القياسية**

١٤- نظام له دالة العبور التالية :

$$H(z) = \frac{z}{z^2+z+0.24}.$$

إذا تم تطبيق تتابع الوحدة u[n] على هذا النظام، فما هي قيمة الاستجابات y[0]، و y[1]، و y[2] ؟

١٥- أوجد الاستجابات y[n] للأنظمة التي لها دوال العبور التالية عند تطبيق تتابع الوحدة x[n]=u[n] :

(أ) $H(z) = \frac{z}{z^2-1.8z+0.82}$

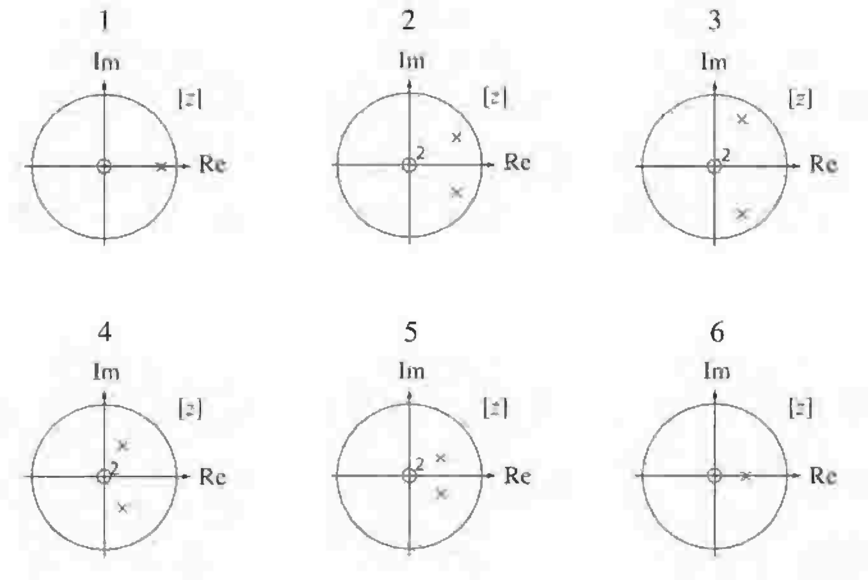
(ب) $H(z) = \frac{z^2-1.932z+1}{z(z-0.95)}$

١٦- في شكل (ت- ١٦) يوجد 6 مخططات للأقطاب والأصفار لدوال العبور لـ 6 أنظمة متقطعة زمنياً:

(أ) أي هذه الأنظمة تكون له استجابة صدمة متزايدة رتيبة؟

(ب) من بين هذه الأنظمة التي لها استجابة صدمة متزايدة، أي واحدة فيها يكون لها أسرع استجابة لوحدة تتابع ؟

(ج) من بين هذه الأنظمة أيها يكون له استجابة صدمة ترددية، وأي واحد فيها يكون له أسرع معدل تردد وله أكبر تخطٍ في استجابته:




**شكل (ت-١٦)**

١٧- أجب عن الأسئلة التالية:

(أ) مرشح رقمي له استجابة صدمة $h[n]=0.6^n u[n]$. إذا تمت إثارته بوحدة تتابع، فما هي القيمة النهائية للاستجابة ؟

$$\left(\lim_{n\to\infty} g[n] = \lim_{z\to 1}(z-1)G(z)\right)$$

(ب) مرشح رقمي له دالة العبور $H(z)=10z/(z-0.5)$. عند أي تردد زاوي $\Omega$ سيكون مقدار استجابته أقل ما يمكن؟

(ج) مرشح رقمي له دالة العبور $H(z)=10(z-1)/(z-0.3)$. عند أي تردد زاوي $\Omega$ سيكون مقدار استجابته أقل ما يمكن؟

(د) مرشح رقمي له دالة العبور التالية $H(z)=2z/(z-0.7)$. ما هو مقدار استجابته عند التردد الزاوي $\Omega=\pi/2$ ؟

**العلاقة بين تحويل زد وتحويل لابلاس**

١٨- العلاقة بين المستوى s والمستوى z هي $z = e^{sT_s}$ حيث $T_s=1/f_s$ لأي قيمة لمعدل أخذ العينات $f_s$. بفرض أن $f_s=100$.

(أ) صف المسار المحيطي في المستوى z المقابل لكل المحور الحقيقي السالب $\sigma$ في المستوى s؟

(ب) ما هو طول أقل مقطع خطي على المحور w في المستوى s المقابل لكل دائرة الوحدة في المستوى z ؟

(ج) أوجد قيم النقطتين المختلفتين $s_1$، و $s_2$ في المستوى s المقابلة للنقطة $z=1$ في المستوى z؟

**أنظمة البيانات المعيننة**

١٩- باستخدام طريقة الصدمة الثابتة للتصميم، صمم نظاماً يقارب الأنظمة التي لها دوال العبور التالية عند معدلات أخذ العينات المقابلة. قارن استجابات الصدمة ووحدة الخطوة (التتابع) للنظام المستمر زمنياً والنظام المتقطع زمنياً.

(أ) $H(s) = \frac{712s}{s^2+46s+240}, \quad f_s = 20 \text{ Hz}$

(ب) $H(s) = \frac{712s}{s^2+46s+240}, \quad f_s = 200 \text{ Hz}$

**بناء الأنظمة**

٢٠- ارسم مخططاً صندوقياً للصورة المتتالية للأنظمة التي لها دوال العبور التالية :

(أ) $H(z) = \frac{z^2}{z^2-0.1z-0.12} + \frac{z}{z-1}$

(ب) $H(z) = \frac{\frac{z}{z-1}}{1+\frac{z}{z-1}\frac{z^2}{z^2-1/2}}$

٢١- ارسم مخططاً صندوقياً للصورة المتوازية للأنظمة التي لها دوال العبور التالية :

(أ) $H(z) = (1+z^{-1})\frac{18}{(z-0.1)(z-0.7)}$

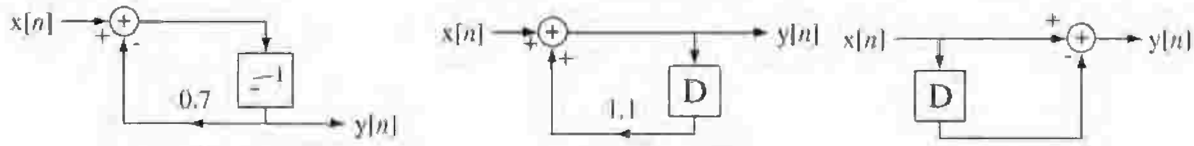
(ب) $H(z) = \frac{\frac{z}{z-1}}{1+\frac{z}{z-1}\frac{z^2}{z^2-1/2}}$

**عموميات**

٢٢- شكل (ت- ٢٢) يبين بعض توصيفات للأنظمة في أشكال مختلفة:

(أ) أي هذه الأنظمة يكون غير مستقر (بما في ذلك الاستقرار الهامشي) ؟

(ب) أي هذه الأنظمة يكون له واحد أو أكثر من الأصفار على دائرة الوحدة ؟




أ ب ت

ث: $H(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$

ج: $y[n] = x[n] + x[n-1]$

ح: $2\,y[n] - y[n-1] = x[n]$

خ: $H(z) = \dfrac{z^2+z+1}{z^2}$

د: $Y(z) = X(z) - 0.8z^{-1}\,Y(z) + 1.1z^{-2}\,Y(z)$

**شكل رقم (ت-٢٢).**