الفصل الخامس عشر

تحليل وتصميم المرشحات

(١٥.١) المقدمة والأهداف

تعتبر المرشحات من أهم الأنظمة العملية. كل نظام، يكون بمفوم معين هو مرشح، لأن كل نظام تكون له استجابة ترددية تقوم بقمع ترددات معينة أكثر من ترددات أخرى. يتم استخدام المرشحات لتطويع صوت الموسيقى بحيث تناسب الذوق الشخصي لكل فرد، ولتنعيم والتخلص من ضوضاء الإشارات، وللعمل على استقرار الأنظمة غير المستقرة، والتخلص من الضوضاء غير المرغوب فيها في الإشارات التي يتم استقبالها، وهكذا. دراسة تحليل وتصميم المرشحات تعتبر مثالاً جيداً على استخدام طرق التحويل.

أهداف الفصل

١- لكي نألف ونفهم أكثر أنواع المرشحات المستمرة زمنياً شيوعاً وأمثلية، ولنفهم أيضاً بأي مفهوم تكون هذه المرشحات مثالية، ولكي نكون قادرين على تصميم هذه المرشحات حتى تحقق متطلبات معينة.

٢- لكي نفهم ونألف أدوات تحليل وتصميم المرشحات باستخدام ماتلاب

٣- لكي نفهم كيفية تحويل نوع من المرشحات إلى نوع آخر من خلال تعديل المتغيرات .

٤- لنتعلم طرق محاكاة المرشحات المثالية المستمرة زمنياً بالمرشحات المتقطعة زمنياً ولنفهم المميزات والعيوب النسبية لكل طريقة.

٥- لنستكشف طرق تصميم المرشحات المتقطعة زمنياً ذات الفترة المحددة وغير المحددة ولنفهم المميزات والعيوب النسبية لكل واحدة من هذه الطرق.

(١٥.٢) المرشحات التماثلية أو التناظرية

في هذا الفصل سنسمي المرشحات المستمرة زمنياً بالمرشحات التماثلية، والمرشحات المتقطعة زمنياً بالمرشحات الرقمية. أيضاً، عند شرح كل من المرشحات التماثلية والرقمية، فإن الرمز الجانبي a سيستخدم للدلالة

على المعاملات أو الدوال عند تطبيقها على المرشحات التماثلية، وسنستخدم الرمز الجانبي d بالطريقة نفسها للدلالة على المعاملات والدوال المطبقة على المرشحات الرقمية.

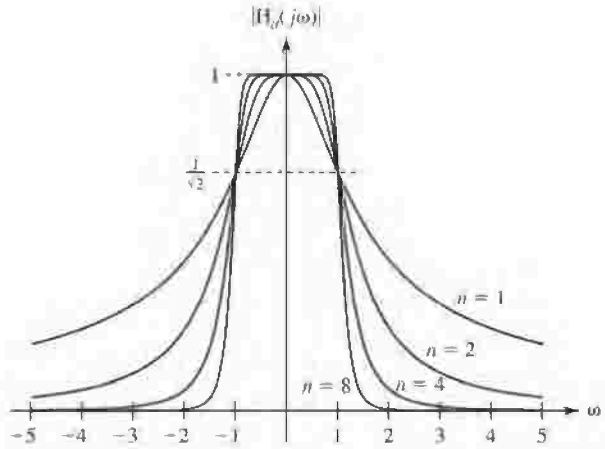
مرشحات بترورث (Butterworth)

مرشحات بترورث المطبعة

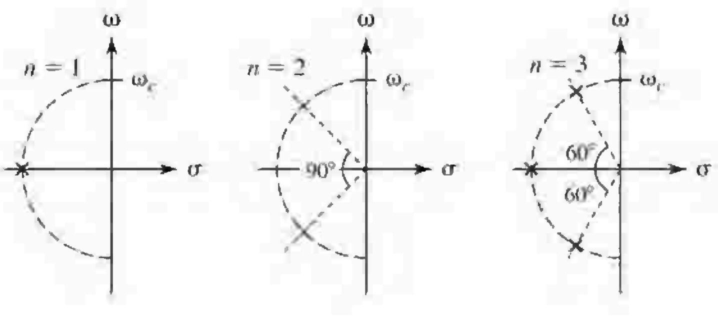
من الأنواع الشهيرة جداً للمرشحات التماثلية، المرشح بترورث، الذي أخذ هذا الاسم من اسم المهندس الإنجليزي S. Butterworth، الذي اكتشفه. المرشح بترورث المنفذ للترددات المنخفضة من الدرجة n له الاستجابة الترددية التي مربع مقدارها يعطى بالمعادلة التالية:

$$|A_a(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+(\omega/\omega_c)^2}$$

يتم تصميم المرشح بترورث المنفذ للترددات المنخفضة ليكون مسطحاً لأقصى حد بالنسبة للترددات الواقعة في مجال المرور، أو السماح $\omega<\omega_c$، مما يعني أن تغيره مع التردد في مجال المرور يكون تغيراً رتيباً ويقترب تفاضله من الصفر مع اقتراب التردد من الصفر. يبين شكل (١٥.١) الاستجابة الترددية للمرشح بترورث مع فرض التردد الركني $\omega_c=1$ لأربع قيم مختلفة للدرجة n. مع زيادة الدرجة يقترب مقدار استجابة المرشح من استجابة المرشح المثالي.



شكل رقم (١٥.١) مقدار الاستجابة الترددية للمرشح بترورث حيث التردد الركني $\omega_c=1$، وعند أربع قيم مختلفة للدرجة n.



شكل رقم (١٥.٢) مواضع أقطاب المرشح بترورث

أقطاب المرشح بتروورث المنفذ للترددات المنخفضة تقع على نصف دائرة نصف قطرها يساوي ω_c والتباعد الزاوي بين الأقطاب (عندما $n>1$) يكون عادة π/n. إذا كانت n رقماً فردياً، سيكون هناك قطب على المحور الحقيقي السالب وكل الأقطاب الأخرى تحدث في صورة أزواج مركبة مترافقة. إذا كانت n رقماً زوجياً، فإن كل الأقطاب تكون في صورة أزواج مركبة مترافقة. باستخدام هذه الخواص، فإن دالة العبور للمرشح بتروورث المنفذ للترددات المنخفضة الذي معامل تكبيره يساوي الوحدة يمكن حسابها وعادة تكون على الصورة التالية:

$$A_a(s) = \frac{1}{(1 - s/p_1)(1 - s/p_2) \dots (1 - s/p_n)} = \prod_{\mathrm{k=1}}^{n} \frac{1}{1 - s/p_1} = \prod_{\mathrm{k=1}}^{n} - \frac{pk}{\mathrm{s - pk}}$$

حيث الـ p's تمثل مواضع الأقطاب.

صندوق الأدوات signal أو الإشارة في ماتلاب به دوال لتصميم مرشحات بتروورث التماثلية. من هذه الدوال:

```
[za,pa,ka]=buttap(N) ;
```

التي تعطي الأصفار المحددة لهذا المرشح في المتجه za، والأقطاب المحددة في المتجه pa ومعاملات تكبير الوحدة في الكمية القياسية أو غير المتجهة ka، ومن الدرجة N وتكبيره يساوي واحد. للمرشح بتروورث المنفذ للترددات المنخفضة الذي له تردد ركني $w_c=1$. (لا يوجد هناك أصفار في دالة عبور المرشح بتروورث المنفذ للترددات المنخفضة، لذلك za يكون عادة متجهاً فاضياً، وحيث إن المرشح له معامل تكبير يساوي واحداً فإن ka تكون دائماً واحداً. يتم تضمين متجهات الأصفار ومعامل التكبير لأن هذا الشكل للنداء على الدالة يتم استخدامه مع أنواع أخرى من المرشحات، التي قد يكون لها أصفار محددة ومعامل تكبير يختلف عن الواحد).

```
>> [za,pa,ka] = buttap(4) ;
>> za
za =
  []
>> pa
pa =
        -0.3827 + 0.9239i
        -0.3827 - 0.9239i
        -0.9239 + 0.3827i
        -0.9239 - 0.3827i
>> ka
ka =
   1
```

تحويلات المرشح

بمجرد تصميم المرشح بتروورث المنفذ للترددات المنخفضة بدرجة معينة وبتردد ركني $\omega_c=1$، فإنه يمكن تحويل هذا المرشح إلى مرشح آخر له تردد ركني مختلف، أو تحويله إلى مرشح منفذ للترددات العالية، أو منفذ أو معوق

لمجال من الترددات وذلك عن طريق تغيير المعاملات الترددية. يسمح ماتلاب للمصممين بالتصميم السريع للمرشح بترورث من الدرجة n والمنفذ للترددات المنخفضة بمعامل تكبير يساوي الواحد وتردد ركني $\omega_c=1$. تغيير معامل التكبير إلى قيمة غير مساوية للواحد تعتبر عملية سهلة حيث إنها ببساطة تشتمل على تغيير معامل تكبير المرشح. أما تغيير التردد الركني أو نوع المرشح فيحتاج لتفاصيل أكثر قليلاً.

لتغيير التردد الركني للاستجابة الترددية للمرشح من القيمة $\omega_c=1$ إلى أي قيمة أخرى $\omega_c\neq1$، نقوم بهذا التحويل في المتغير المستقل $s\to s/\omega_c$ في دالة العبور. فمثلاً، دالة العبور للمرشح بترورث المطبع من الدرجة الأولى ومعامل تكبير يساوي الواحد هي:

$$H_{norm}=\frac{1}{s+1}$$

إذا كنا نريد تحريك التردد الركني إلى القيمة $\omega_c=10$، فإن دالة العبور الجديدة ستكون على الصورة التالية:

$$H_{10}(s)=H_{norm}(s/10)=\frac{1}{s/10+1}=\frac{10}{s+10}$$

وهذه تعتبر دالة عبور مرشح منفذ للترددات المنخفضة له معامل تكبير الوحدة وتردد ركني $\omega_c=10$.

القوة الحقيقية لعملية تحويل المرشح يمكن رؤيتها في عملية تحويل المرشح المنفذ للترددات المنخفضة إلى آخر منفذ للترددات العالية. إذا قمنا بالتحويل $s=1/s$ في دالة العبور سنحصل على ما يلي:

$$H_{HP}(s)=H_{norm}(1/s)=\frac{1}{1/s+1}=\frac{s}{s+1}$$

حيث $H_{HP}(s)$ تمثل دالة العبور لمرشح منفذ للترددات العالية من الدرجة الأولى ومعامل تكبير الوحدة وتردد ركني $\omega_c=1$. يمكن أيضاً بالتزامن أن نغير التردد الركني بعمل التحويل $s\to\omega_c/s$. حيث يكون لدينا الآن دالة عبور لها قطب محدد واحد وصفر محدد عند $s=0$. في الصورة العامة لدالة العبور المطبعة لمرشح بترورث منفذ للترددات المنخفضة يمكن وضعها على الصورة التالية:

$$H_{norm}(s)=\prod_{\mathrm{k}=1}^{n}\frac{-pk}{\mathrm{s-pk}}$$

عندما نقوم بالتحويل $s\to1/s$ سنحصل على:

$$H_{HP}(s)=\left[\prod_{\mathrm{k}=1}^{n}\frac{-pk}{\mathrm{s-pk}}\right]_{\mathrm{s}\to1/s}=\prod_{\mathrm{k}=1}^{n}\frac{-pk}{1/\mathrm{s-pk}}=\prod_{\mathrm{k}=1}^{n}\frac{pks}{\mathrm{p_k s}-1}\prod_{\mathrm{k}=1}^{n}\frac{-pk}{\mathrm{s}-1/\mathrm{pk}}$$

أقطاب هذه الدالة تقع عند $s=1/p_k$. إنها تمثل مقلوب أقطاب المرشح المطبع المنفذ للترددات المنخفضة، وكلها لها مقدار يساوي الواحد. مقلوب أي عدد مركب يكون عند زاوية تساوي سالب زاوية العدد المركب. في هذه الحالة، حيث أن مقادير الأقطاب لم تتغير، فإن الأقطاب تتحرك إلى المواضع المركبة المرافقة ولكن التركيبة العامة للأقطاب لن تتغير. أيضاً أصبح هناك الآن عدد n من الأصفار عند $s=0$. إذا قمنا بالتحويل $s\to\omega_c/s$، فإن الأقطاب ستكون لها الزوايا نفسها ولكن مقاديرها تصبح الآن ω_c بدلاً من الواحد.

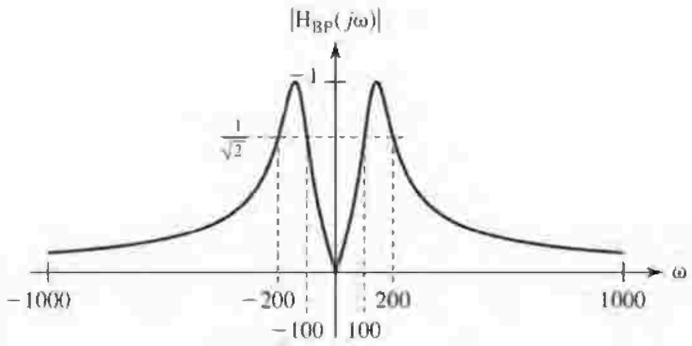
تحويل المرشح المنفذ للترددات المنخفضة إلى آخر منفذ لمجال من الترددات يكون أكثر تعقيدا. يمكننا عمل ذلك بإجراء التحويل التالي :

$$\to \frac{s^2+\omega_L\omega_H}{s(\omega_H-\omega_L)}$$

حيث ω_L هي التردد الركني الموجب المنخفض، و ω_H هي التردد الركني الموجب العلوي للمرشح المنفذ لمجال من الترددات. مثلا ، دعنا نصمم مرشحاً منفذاً لمجال من الترددات من الدرجة الأولى ومعامل تكبير الوحدة حيث يمتد مجال المرور له من $\omega=100$ حتى $\omega=200$ كما في شكل (١٥.٣).

$$H_{BP}(s) = H_{norm}\left(\frac{s^2+\omega_L\omega_H}{s(\omega_H-\omega_L)}\right) = \frac{1}{\frac{s^2+\omega_L\omega_H}{s(\omega_H-\omega_L)}+1} = \frac{s(\omega_H-\omega_L)}{s^2+s(\omega_H-\omega_L)+\omega_L\omega_H}$$

$$H_{BP}(j\omega) = \frac{j\omega(\omega_H-\omega_L)}{-\omega^2+j\omega(\omega_H-\omega_L)+\omega_L\omega_H}$$



شكل رقم (١٥.٣) مقدار الاستجابة الترددية لمرشح بتروث من الدرجة الأولى منفذ لمجال من الترددات بمعامل تكبير الوحدة

بتبسيط المعادلة السابقة والتعويض بالقيم العددية نحصل على :

$$H_{BP}(j\omega) = \frac{j100\omega}{-\omega^2+j100\omega+20{,}000} = \frac{j100\omega}{(j\omega+50+j132.2)(j\omega+50-j132.2)}$$

قمة الاستجابة المنفذة لمجال من الترددات تحدث عندما يكون تفاضل هذه الاستجابة بالنسبة للتردد يساوي صفر كما يلي :

$$\frac{d}{d\omega}H_{BP}(j\omega) = \frac{(-\omega^2+j\omega(\omega_H-\omega_L)+\omega_L\omega_H)j(\omega_H-\omega_L)-j\omega(\omega_H-\omega_L)(-2\omega+j(\omega_H-\omega_L))}{[-\omega^2+j\omega(\omega_H-\omega_L)+\omega_L\omega_H]} = 0$$

$$(-\omega^2 + j\omega(\omega_H-\omega_L) + \omega_L\omega_H) + 2\omega^2 - j\omega(\omega_H-\omega_L) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 + \omega_L\omega_H = 0 \Rightarrow \omega = \pm\sqrt{\omega_L\omega_H}$$

وبالتالي فإن التردد الزاوي الطبيعي سيكون $\omega_n = \pm\sqrt{\omega_L\omega_H}$. أيضاً للتحقق من دالة العبور القياسية من الدرجة الثانية على الصورة :

$$j2\zeta\omega_n\omega = j\omega(\omega_H - \omega_L) \Rightarrow \zeta = \frac{\omega_H - \omega_L}{2\sqrt{\omega_L\omega_H}}$$

وبالتالي ستكون نسبة الإخماد على الصورة:

$$\zeta = \frac{\omega_H - \omega_L}{2\sqrt{\omega_L\omega_H}}$$

في النهاية يمكننا تحويل المرشح المنفذ للترددات المنخفضة إلى آخر معوق أو محبط لمجال من الترددات باستخدام التحويل التالي:

$$s \to \frac{s(\omega_H - \omega_L)}{s^2 + \omega_L\omega_H}$$

لاحظ أنه للمرشح المنفذ للترددات المنخفضة من الدرجة n تكون درجة المقام لدالة العبور هي n، ولكن بالنسبة للمرشح المنفذ لمجال من الترددات من الدرجة n تكون درجة المقام لدالة العبور هي 2n. بالطريقة نفسها تكون درجة المقام للمرشح المنفذ للترددات العالية هي n ودرجة المقام للمرشح المعوق لمجال من الترددات هي 2n.

أدوات تصميم المرشحات في ماتلاب

يحتوي ماتلاب على أوامر لتحويل المرشحات المطبعة وهي كالتالي:

lp2bp دالة تحويل المرشح التماثلي المنفذ للترددات المنخفضة إلى مرشح منفذ لمجال من الترددات.

lp2bs دالة تحويل المرشح التماثلي المنفذ للترددات المنخفضة إلى مرشح معوق لمجال من الترددات.

lp2hp دالة تحويل المرشح التماثلي المنفذ للترددات المنخفضة إلى مرشح منفذ للترددات العالية.

lp2lp دالة تحويل المرشح التماثلي المنفذ للترددات المنخفضة إلى مرشح منفذ للترددات المنخفضة.

الصورة العامة للدالة lp2bp هي:

$$[numt, dent] = 1p2bp\ (num, den, w0, bw)$$

حيث num و den هي متجهات لمعاملات المتغير s في كل من البسط والمقام لدالة عبور المرشح المنفذ للترددات المنخفضة المطبعة على التوالي، ω_0 هي التردد المركزي للمرشح المنفذ لمجال من الترددات، و bw هي عرض مجال هذا المرشح وكل منهما تكون بالوحدات rad/s، و numt، و dent هي متجهات معاملات المتغير s في كل من البسط والمقام للمرشح المنفذ لمجال من الترددات. الصورة العامة لباقي الدوال تكون بالطريقة نفسها. كمثال يمكننا أن نصمم مرشح بترورث منفذاً للترددات المنخفضة مطبعاً باستخدام الأمر buttap كما يلي:

```
»[z,p,k] = buttap(3) ;
»z
z =
  []
»p
p =
        -0.5000 + 0.8660i
        -1.0000
        -0.5000 - 0.8660i
»k
k =
   1
```

وهذه النتيجة تبين أن الاستجابة الترددية لمرشح بتروورث منفذ للترددات المنخفضة من الدرجة الثالثة ستكون كما يلي :

$$H_{LP}(s) = \frac{1}{(s+1)(s+0.5+j0.866)(s+0.5-j0.866)}$$

يمكن تحويل هذه الصورة إلى صورة النسبة بين كثيرتي حدود باستخدام أمر ماتلاب التالي :

```
»[num,den] = tfdata(zpk(z,p,k),'v') ;
»num
num =
   0 0 0 1
»den
den =
1.0000 2.0000+0.0000i 2.0000+0.0000i 1.0000+0.0000i
```

وهذا يوضح أن الاستجابة الترددية للمرشح المنفذ للترددات المنخفضة ، المطبع ، يمكن كتابته بصورة أكثر إدماجاً كما يلي :

$$H_{LP}(s) = \frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

باستخدام هذه النتيجة يمكن تحويل المرشح المنفذ المطبع المنفذ للترددات المنخفضة إلى آخر غير مطبع منفذ لمجال من الترددات بتردد مركزي $\omega=8$ وعرض مجال $\Delta\omega=2$ كما يلي :

```
»[numt,dent] = lp2bp(num,den,8,2) ;
»numt
numt =
  Columns 1 through 4
        0 0.0000-0.0000i 0.0000-0.0000i 8.0000-0.0000i
Columns 5 through 7
        0.0000-0.0000i 0.0000-0.0000i 0.0000-0.0000i
»dent
dent =
  1.0e+05 *
Columns 1 through 4
        0.0000 0.0000+0.0000i 0.0020+0.0000i 0.0052+0.0000i
Columns 5 through 7
        0.1280+0.0000i 0.1638+0.0000i 2.6214-0.0000i
»bpf = tf(numt,dent) ;
»bpf
Transfer function:
                    1.542e-14s^5+2.32e-13s^4+8s^3+3.644e-11s^2+9.789e-11s+9.952e-10
----------------------------------------------------
                    s^6+4s^5+200s^4+520s^3+1.28e04s^2+1.638e04s+2.621e05
»
```

وهذه النتيجة توضح أن دالة عبور المرشح المنفذ لمجال من الترددات يمكن كتابتها على الصورة التالية :

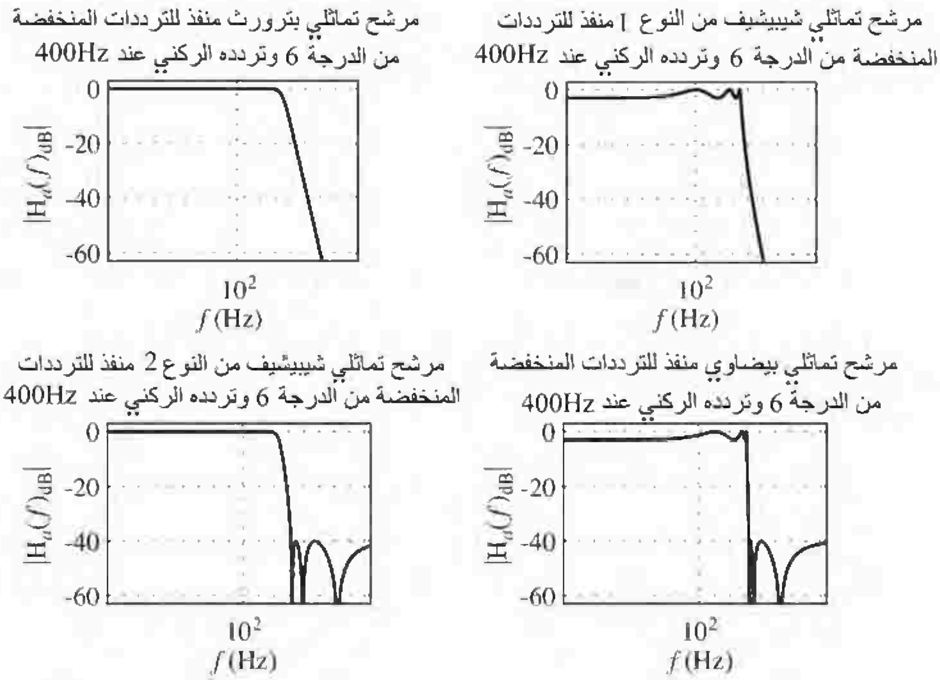
$$H_{BP}(s) = \frac{8s^3}{s^6+4s^5+200s^4+520s^3+12800s^2+16380s+262100}$$

(المعاملات متناهية الصغر وغير المساوية للصفر في بسط دالة العبور الناتجة من ماتلاب تكون نتيجة لتقريب الأخطاء في حسابت ماتلاب ويتم إهمالها. لاحظ أنها لا تظهر في دالة numt)

المرشحات شيبيشيف (chebyshev) والبيضاوية (elliptic) والبيسيل (Bessel)

لقد رأينا كيف يمكن استخدام الأمر buttap في ماتلاب لتصميم المرشحات من النوع بترورث المطبعة وكيف يمكن أن نحولها لأنواع أخرى من مرشحات بترورث غير المطبعة. هناك عدد من أوامر ماتلاب الأخرى التي تكون مفيدة في تصميم المرشحات التماثلية. هناك أربعة أوامر "ap...." أخرى وهي cheb1ap، و cheb2ap، و ellipap، و besselap تستخدم في تصميم المرشحات التماثلية المثالية من الأنواع المختلفة عن بترورث. الأنواع الأخرى من المرشحات التماثلية المثالية هي المرشح شيبيشيف، والمرشح البيضاوي، والمرشح بيسيل. كل واحد من هذه المرشحات يعمل على أمثلة أداء المرشح تبعاً لشروط معينة مختلفة.

المرشح شيبيشيف يشابه المرشح بترورث ولكنه له درجة إضافية من حرية التصميم كما في شكل (١٥.٤).



شكل رقم (١٥.٤) مقدار الاستجابة الترددية للمرشحات المثالية بترورث، و شيبيشيف، والبيضاوية

يطلق على المرشح بترورث بأنه المرشح الأعظم استقامة أو تسطيحاً؛ لأنه يتزايد في كل من مجالي المرور والإعاقة وتقترب استجابته من الاستقامة في مجال المرور مع زيادة درجته. هناك نوعان من المرشح شيبيشيف وهما النوع الأول والنوع الثاني. النوع الأول من المرشح شيبيشيف تكون له استجابة ترددية ليست مستمرة في مجال المرور ولكنها مستمرة في مجال الإعاقة. استجابته الترددية تتردد (تتغير ارتفاعاً وانخفاضاً مع التردد) في مجال المرور. وجود هذه التذبذبات في مجال المرور ليست مرغوبة في حد ذاتها ولكنها تسمح بأن يكون العبور من مجال المرور إلى مجال

الإعاقة أسرع من نظيره في المرشح بترورث، الذي من الدرجة نفسها. بمعنى آخر أننا ضحينا باستمرارية الاستجابة الترددية في مجال المرور في مقابل أن نضيق مجال العبور (الانتقال من مجال المرور إلى مجال الإعاقة). كلما نسمح بتذبذبات أكثر في مجال المرور، كان مجال العبور أضيق. النوع الثاني من المرشح شيبيشيف هو ببساطة عكس النوع الأول، له مجال مرور مستمر أو منبسط وهناك تذبذبات في مجال الإعاقة، تسمح أيضاً بأن يكون هذا المرشح له مجال عبور أضيق من نظيره في المرشح بترورث الذي من الدرجة نفسها.

المرشح البيضاوي به تذبذبات في كل من مجالي المرور والإعاقة، ولدرجة المرشح نفسها فإنه يكون له مجال عبور أضيق من كل من نوعي المرح شيبيشيف. لقد تم أمثلة مرشح بيسيل على أساس مختلف. لقد تمت أمثلته على أساس خطية الطور أو الزاوية في مجال المرور بدلاً من أن تكون الأمثلة على أساس استمرارية المقدار في مجال المرور أو مجال الإعاقة أو على أساس مجال العبور الضيق.

الصورة العامة لتصميم كل نوع من هذه المرشحات في ماتلاب كما يلي :

```
[z,p,k] = cheb1ap(N,Rp) ;
[z,p,k] = cheb2ap(N,Rs) ;
[z,p,k] = ellipap(N,Rp,Rs) ;
[z,p,k] = besselap(N) ;
```

حيث N هي درجة المرشح، و Rp هي الذبذبات المسموح بها في مجال المرور بالديسبل dB، و Rs هي الذبذبات المسموح بها في مجال الإعاقة بالديسبل أيضاً.

بمجرد تصميم المرشح يمكن إيجاد استجابته الترددية باستخدام إما الأمر bode الذي تم تقديمه فيما سبق، باستخدام الأمر freqs. الصورة العامة للدالة freqs هي كما يلي :

```
H=freqs(num , den, ω)    ;
```

حيث H هي متجه الاستجابة عند النقاط الحقيقية على المحور الحقيقي الزاوي في المتجه ω، ومتجهات البسط والمقام تحوي معاملات الـ s في البسط والمقام لدالة عبور المرشح.

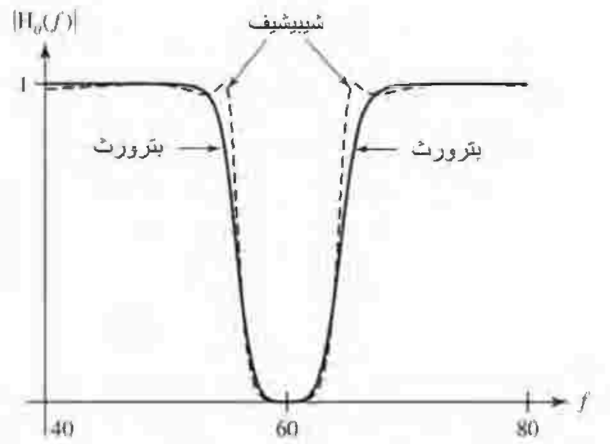
مثال ١٥.١

مقارنة بين مرشح بترورث معوق لمجال من الترددات من الدرجة الرابعة وآخر شيبيشيف باستخدام ماتلاب

باستخدام ماتلاب، صمم مرشح بترورث منفذاً للترددات المنخفضة من الدرجة الرابعة ومطبعاً، حوِّلْ هذا المرشح إلى آخر غير مطبع، معوقاً لمجال من الترددات بتردد مركزي 60Hz وعرض مجال مقداره 10Hz، ثم قارن بين الاستجابة الترددية لهذا المرشح مع آخر شيبيشيف من النوع الأول معوقاً لمجال من الترددات بنفس الدرجة والترددات الركنية وتذبذبات في مجال المرور الذي مقداره 0.3dB.

```
% تصميم المرشح بترورث
% تصميم مرشح بترورث من الدرجة الرابعة مطبع ووضع الأصفار والأقطاب والتكبير
% zb, pb, kb في المتجهات
[zb,pb,kb] = buttap(4) ;
% نستخدم أدوات النظام في ماتلاب للحصول على متجهات معاملات البسط والمقام
% numb and denb
[numb,denb] = tfdata(zpk(zb,pb,kb),'v') ;
% وضع التردد المركزي الدوري وعرض المجال
% ثم وضع التردد المركزي الزاوي وعرض المجال الزاوي
f0 = 60 ; fbw = 10 ; w0 = 2*pi*f0 ; wbw = 2*pi*fbw ;
% تحويل البترورث المنفذ للترددات المنخفضة إلى بترورث معوق لمجال من الترددات
[numbsb,denbsb] = lp2bs(numb,denb,w0,wbw) ;
% توليد متجه الترددات الدورية لاستخدامه في رسم الاستجابة الترددية
% ثم توليد متجه الترددات الزاوية المقابل ثم حساب الاستجابة الترددية
wbsb = 2*pi*[40:0.2:80]' ;
Hbsb = freqs(numbsb,denbsb,wbsb) ;
% تصميم المرشح شيبيشيف
% تصميم مرشح شيبيشيف منفذ للترددات المنخفضة مطبع من الدرجة الرابعة
% zc, pc, kc ووضع الأصفار والأقطاب والتكبير في المتجهات
[zc,pc,kc] = cheb1ap(4,0.3) ; wc = wb ;
% استخدام أدوات النظام في ماتلاب للحصول على متجهات معاملات البسط والمقام
% numc , denc
[numc,denc] = tfdata(zpk(zc,pc,kc),'v') ;
% تحويل الشيبيشيف المنفذ للترددات المنخفضة إلى آخر معوق لمجال من الترددات
[numbsc,denbsc] = lp2bs(numc,denc,w0,wbw) ;
% استخدام متجهات التردد الزاوي نفسها المستخدمة مع البترورث
% تصميم وحساب الاستجابة الترددية للمرشح شيبيشيف المعوق لمجال من الترددات
wbsc = wbsb ; Hbsc = freqs(numbsc,denbsc,wbsc) ;
```

مقدار الاستجابات الترددية تمت مقارنتها في شكل (١٥.٥). لاحظ أن استجابة المرشح بترورث يكون انسيابياً أو مستمراً في مجال المرور بينما المرشح شيبيشيف ليس كذلك، ولكن المرشح شيبيشيف له ميل أسرع لمنحنى مجال العبور بين مجالي المرور والإعاقة وله أيضاً إعاقة أفضل قليلاً في مجال الإعاقة.



شكل رقم (١٥.٥) مقارنة بين مقدار الاستجابة الترددية لمرشح بتروورث وآخر شيبيشيف

(١٥.٣) المرشحات الرقمية

تحليل وتصميم المرشحات التماثلية يعتبر من الموضوعات الكبيرة والمهمة. على الدرجة نفسها من الأهمية (وقد يكون أكثر أهمية) يكون موضوع تصميم المرشحات الرقمية التي تحاكي بعض الأنواع الشائعة من المرشحات التماثلية القياسية. تقريباً كل الأنظمة المتقطعة زمنياً يمكن اعتبارها مرشحات، بمفهوم أن لها استجابات ترددية لا تكون ثابتة مع التردد.

محاكاة المرشحات التماثلية

هناك طرق قياسية مثلى عديدة لتصميم المرشحات التماثلية. واحدة من الطرق الشهيرة لتصميم المرشحات الرقمية هي محاكاة المرشحات التماثلية المثبتة. كل المرشحات التماثلية القياسية الشائعة الاستخدام تكون لها دالة عبور في النطاق s وهي نسبة بين كثيرتي حدود في المتغير s ولذلك يكون لها استجابة صدمة تكون موجودة لأزمنة لا نهائية. هذا النوع من استجابة الصدمة يسمى استجابة الصدمة غير المحدودة الزمن infinite duration impulse response, IIR. العديد من الطرق التي تحاكي المرشحات التماثلية بمرشحات رقمية يكون لها استجابة صدمة غير محدودة الزمن، وهذه الأنواع من المرشحات الرقمية تسمى المرشحات IIR. طريقة أخرى شهيرة لتصميم المرشحات الرقمية باستخدام استجابة الصدمة المحدودة الزمن finite duration impulse response, FIR وهذه المرشحات تسمى المرشحات FIR.

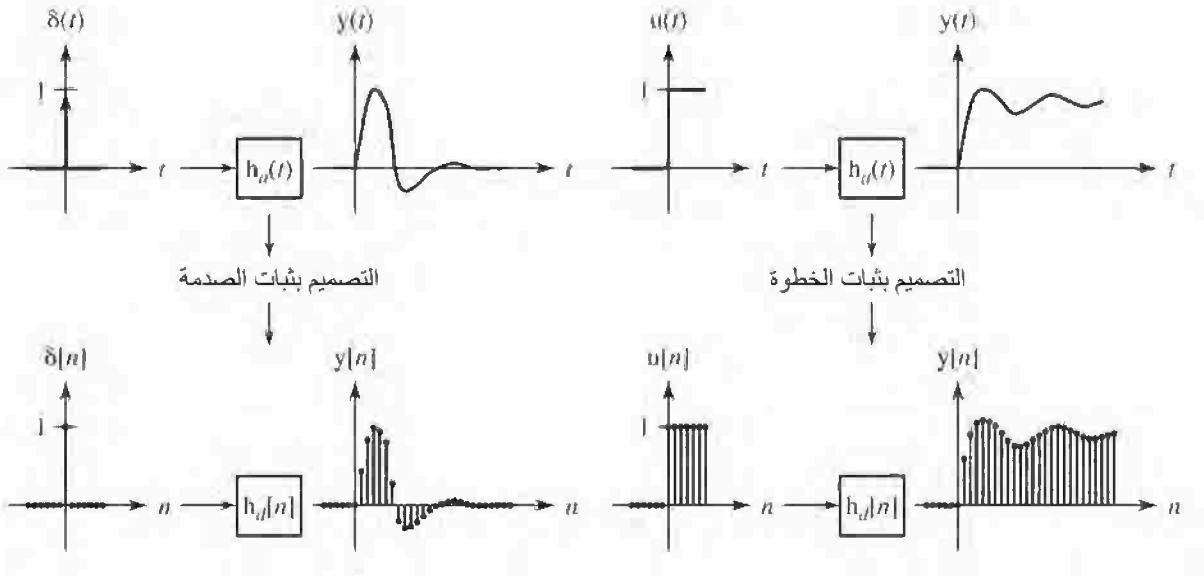
في الشرح التالي لمحاكاة المرشحات التماثلية باستخدام المرشحات الرقمية سنرمز لاستجابة الصدمة للمرشح التماثلي بالرمز $h_a(t)$، ودالة العبور له ستكون $H_a(s)$، واستجابة الصدمة للمرشحات الرقمية ستكون $h_d[n]$، ودالة العبور لها ستكون $H_d(z)$.

طرق تصميم المرشحات

تصميم المرشحات IIR

طرق النطاق الزمني

التصميم بثبات الصدمة impulse invariant : أحد الطرق لتصميم المرشحات الرقمية هي أن نجعل استجابة المرشح الرقمي للإثارة الرقمية القياسية تساوي نسخة معيننة من استجابة المرشح التماثلي للإثارة القياسية التماثلية المقابلة في الزمن المستمر. في حالة التصميم مع ثبات الصدمة فإننا نجعل استجابة المرشح الرقمي لوحدة الصدمة المتقطعة زمنياً تكون نسخة معيننة لاستجابة المرشح التماثلي لوحدة الصدمة المستمرة زمنياً. التصميم بثبات الخطوة يجعل استجابة المرشح الرقمي لوحدة التتابع تساوي نسخة معيننة من استجابة المرشح التماثلي لوحدة الخطوة. كل واحدة من هذه الطرق التصميمية تعطي مرشحاً IIR كما في شكل (١٥.٦).



شكل رقم (١٥.٦) طرق تصميم المرشحات الرقمية باستخدام ثبات الصدمة وثبات الخطوة

نحن نعرف من نظرية العينة ، أنه يمكننا أن نأخذ عينات صدمية من استجابة الصدمة للمرشح التماثلي $h_a(t)$ لنحصل على $H_\delta(t)$ التي لها تحويل لابلاس $H_\delta(s)$ ولها CTFT على الصورة التالية :

$$H_\delta(j\omega) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\big(j(\omega - k\omega_s)\big)$$

حيث $H_a(s)$ هي دالة عبور المرشحات التماثلية و $\omega_s=2\pi f_s$. نحن نعرف أيضاً أنه يمكننا عينة $h_a(t)$ لنحصل على $h_d[n]$ التي لها تحويل z يساوي $H_d(z)$ ولها DTFT على الصورة التالية :

$$H_d(e^{j\Omega}) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\big(jf_s(\Omega - 2\pi k)\big) \qquad \text{المعادلة رقم (١٥.١)}$$

لذلك، فمن الواضح أن الاستجابة الترددية للمرشح الرقمي هي مجموع الصور المستعارة الموزونة أو المضروبة في ثابت للاستجابة الترددية للمرشح التماثلي. كمثال على التصميم بالثبات الصدمي، سنفترض أن $H_a(s)$ هي دالة العبور للمرشح بترورث من الدرجة الثانية المنفذ للترددات المنخفضة والذي له معامل تكبير عند الترددات المنخفضة يساوي A وتردد القطع هو ω_c راديان على الثانية:

$$H_a(s) = \frac{A\omega_c^2}{s^2+\sqrt{2}\omega_c s+\omega_c^2}$$

فبالتالي فإن تحويل لابلاس العكسي لهذه الدالة سيكون:

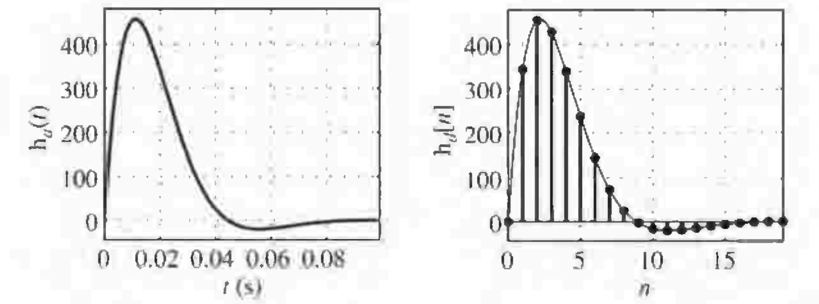
$$H_a(t) = \sqrt{2}\omega_c e^{-\omega_c/\sqrt{2}} sin(\omega_c t/\sqrt{2})u(t)$$

الآن سنقوم بعينة هذه الدالة بالمعدل f_s على الصورة التالية وكما في شكل (١٥.٧):

$$H_d[t] = \sqrt{2}\omega_c e^{-\omega_c nT_s/\sqrt{2}} sin(\omega_c nT_s/\sqrt{2})u[t]$$

وبالتالي:

$$H_d(z) = \sqrt{2}A\omega_c \frac{ze^{-\omega_c T_s/\sqrt{2}} sin(\omega_c T_s/\sqrt{2})}{z^2-2e^{-\omega_c T_s/\sqrt{2}} cos(\omega_c T_s/\sqrt{2})z+e^{-2\omega_c T_s/\sqrt{2}}}$$



شكل رقم (١٥.٧) استجابات الصدمة للمرشح التماثلي والرقمي

أو:

$$H_d(e^{j\Omega}) = \sqrt{2}A\omega_c \frac{e^{j\Omega}e^{-\omega_c T_s/\sqrt{2}} sin(\omega_c T_s/\sqrt{2})}{e^{j2\Omega}-2e^{-\omega_c T_s/\sqrt{2}} cos(\omega_c T_s/\sqrt{2})e^{j\Omega}+e^{-2\omega_c T_s/\sqrt{2}}} \quad \text{المعادلة رقم (١٥.٢)}$$

بمساواة المعادلتين (١٥.١) و (١٥.٢) نحصل على:

$$H_d(e^{j\Omega}) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A\omega_c^2}{[jf_s(\Omega-2\pi k)]^2+j\sqrt{2}\omega_c f_s(\Omega-2\pi k)+\omega_c^2}$$

$$= \sqrt{2}A\omega_c \frac{e^{j\Omega}e^{-\omega_c T_s/\sqrt{2}} sin(\omega_c T_s/\sqrt{2})}{e^{j2\Omega}-2e^{-\omega_c T_s/\sqrt{2}} cos(\omega_c T_s/\sqrt{2})e^{j\Omega}+e^{-2\omega_c T_s/\sqrt{2}}}$$

إذا وضعنا A=10، و ω_c=100 وقمنا بأخذ العينات بالمعدل 200 عينة/الثانية، سنحصل على:

$$H_d(e^{j\Omega}) = 2000 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[j2(\Omega-2\pi k)]^2+j2\sqrt{2}(\Omega-2\pi k)+1}$$

أو:

$$H_d(e^{j\Omega}) = 1000\sqrt{2}\frac{e^{j\Omega}e^{-1/2\sqrt{2}}sin(1/2\sqrt{2})}{e^{j2\Omega}-2e^{-1/2\sqrt{2}}cos(1/2\sqrt{2})e^{j\Omega}+e^{-1/\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{343.825e^{j\Omega}}{e^{j2\Omega}-1.31751e^{j\Omega}+0.49306}$$

للتحقق من ذلك قارن الصورتين عندما Ω=0.

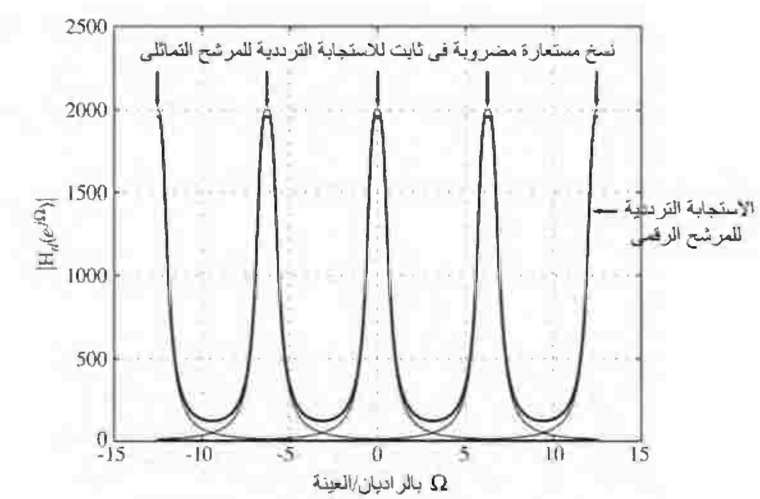
شكل (١٥.٨) يبين الاستجابة الترددية الكاملة للمرشح الرقمي. الخط الثقيل يمثل الاستجابة الترددية الحقيقية والخطوط الخفيفة تمثل النسخ المستعارة المنفردة للاستجابة الترددية للمرشح التماثلي. الفرق بين استجابة المرشح التماثلي عند التردد صفر واستجابة المرشح الرقمي عند التردد صفر أيضاً تكون حوالي %2- نتيجة تأثير عملية النسخ المستعار.

هذا المرشح يمكن بناؤه من دالة العبور الخاصة به بالطريقة المباشرة II كما يلي:

$$H_d(z) = \frac{Y_d(z)}{X_d(z)} = \frac{343.825z}{z^2-1.31751z+0.49306}$$

أو:

$$z^2Y_d(z) - 1.31751zY_d(z) + 0.49306Y_d(z) = 343.825zX_d(z)$$



شكل رقم (١٥.٨) الاستجابة الترددية لمرشح رقمي توضح تأثيرات النسخ المستعار

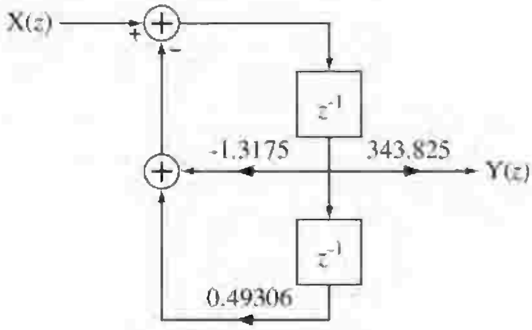
بإعادة ترتيب المعادلة السابقة والحل للحصول على $Y_d(z)$:

$$Y_d(z) = 343.825z^{-1}X_d(z) + 1.31751z^{-1}Y_d(z) - 0.49306z^{-2}Y_d(z)$$

بإجراء تحويل z العكسي:

$$y_d[n] = 343.825x_d[n-1] + 1.31751y_d[n-1] - 0.49306y_d[n-2]$$

انظر شكل (١٥.٩).



شكل رقم (١٥.٩) مخطط صندوقي لمرشح رقمي منفذ للترددات المنخفضة مصمم باستخدام طريقة ثبات الصدمة

لكي نبين دقة الطريقة السابقة، سنفترض المرشح التماثلي من الدرجة الأولى المنفذ للترددات المنخفضة الذي له دالة عبور كالتالي:

$$H_a(s) = \frac{A\omega_c}{s+\omega_c} \Rightarrow H_a(j\omega) = \frac{A\omega_c}{j\omega+\omega_c}$$

واستجابة الصدمة له ستكون:

$$H_a(t) = A\omega_c e^{-\omega_c t}u(t)$$

بأخذ العينات بالمعدل f_s لتكوين $h_d[n] = Aw_c e^{-w_c n T_s}u[n]$، وبالتالي:

$$H_d(z) = A\omega_c \frac{z}{z-e^{-\omega_c T_s}} \Rightarrow H_d(e^{j\Omega}) = A\omega_c \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-e^{-\omega_c T_s}} \qquad \text{المعادلة رقم (١٥.٣)}$$

ويمكن كتابة الاستجابتين الترددتين في الصورتين المتكافئتين التاليتين:

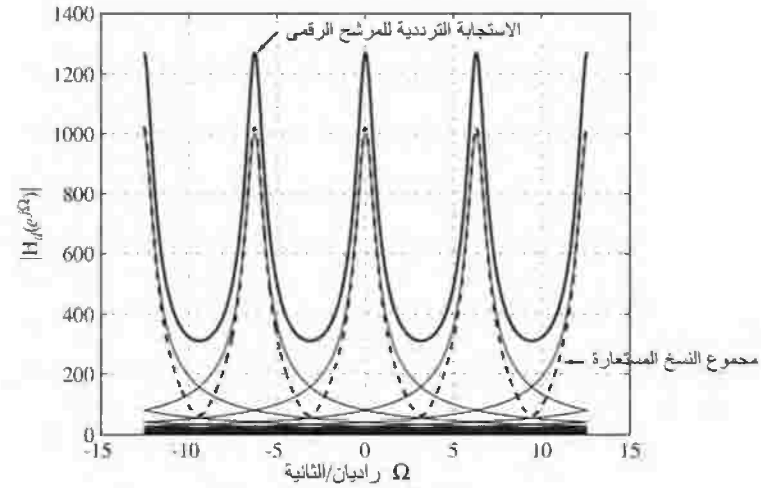
$$H_d(e^{j\Omega}) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A\omega_c}{jf_s(\Omega-2\pi k)\omega_c+\omega_c} = A\omega_c \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-e^{-\omega_c T_s}}$$

بفرض $a=10$، و $w_c=50$، و $f_s=100$ وسنتحقق من التساوي عند $\Omega=0$:

$$f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A\omega_c}{jf_s(\Omega-2\pi k)\omega_c+\omega_c} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{50000}{-j200\pi k+50} = 1020.7$$

$$A\omega_c \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-e^{-\omega_c T_s}} = 500\frac{1}{1-e^{-1/2}} = 1270.7$$

هاتان النتيجتان، من المفروض أن تكونا متساويتين، ولكنهما يختلفان بحوالي 25% عند التردد $\Omega=0$. شكل (١٥.١٠) يبين الاستجابتين الترددتين.



شكل رقم (١٠.١٥) استجابة المرشح الرقمي توضح وجود خطأ ظاهر بين الاستجابتين الترددتين اللتين يجب أن تكونا متساويتين

السؤال هنا بالطبع هو لماذا تختلف الاستجابتان ؟ هذا الخطأ يأتي من العبارة السابقة بأن استجابة الصدمة للمرشح الرقمي التي تم الحصول عليها عن طريق عينة استجابة الصدمة للمرشح التماثلي تكون على الصورة $h_d[n] = A\omega_c e^{-\omega_c n T_s} u[n]$. استجابة الصدمة التماثلية بها عدم اتصال عند t=0. على ذلك ماذا ستكون قيمة العينة عند هذه النقطة ؟ استجابة الصدمة التي على الصورة $h_d[n] = A\omega_c e^{-w_c n T_s} u[n]$ تعني أن قيمة العينة عند t=0 هي $A\omega_c$. لماذا لا تكون قيمة العينة تساوي صفراً حيث إن عدم الاتصال يمتد من الصفر حتى $A\omega_c$ ؟ إذا استبدلنا قيمة العينة الأولى $A\omega_c$ بالقيمة $A\omega_c/2$ التي هي القيمة المتوسطة لاستجابة الصدمة عند t=0 فإن شكلي الاستجابة الترددية للمرشح الرقمي يتوافقان تماماً. لذلك، فإنه يبدو أنه عند أخذ عينات عند نقطة عدم اتصال، فإن أفضل طريقة هي أخذ القيمة المتوسطة للعينة عند هذه النقطة. إن ذلك يتوافق مع نظرية تحويل فورير التي تنص على أن تحويل فورير لإشارة غير متصلة يأخذ عادة القيمة المتوسطة عند نقطة الاتصال. هذه المشكلة لم تظهر في التحليل السابق للمرشح بتروورث من الدرجة الثانية المنفذ للترددات المنخفضة؛ لأن استجابة الصدمة له كانت متصلة.

بمعلومية الخطأ في تصميم المرشح الرقمي من الدرجة الأولى المنفذ للترددات المنخفضة نتيجة أخذ العينات عند نقاط عدم الاتصال، فإنه من الممكن أن نقترح لتجنب هذه المشكلة، أن نؤخر ببساطة استجابة الصدمة للمرشح التماثلي بكمية زمنية بسيطة (أقل من الزمن بين العينات) وتجنب أخذ العينة عند نقطة عدم الاتصال. يمكن تنفيذ ذلك وشكلي الاستجابة الترددية للمرشح الرقمي سيتوافقان مرة أخرى.

يحتوي صندوق أدوات الإشارة في ماتلاب على الأمر impinvar التي تقوم بتصميم مرشح رقمي بطريقة ثبات الصدمة. الصورة العامة لهذا الأمر هي:

```
[bd, ad]=impinvar(ba, aa, fs)
```

حيث ba هي متجه معاملات المتغير s في بسط دالة عبور المرشح التماثلي، و aa هي متجه معاملات المتغير s في مقام دالة عبور المرشح نفسه ، و f_s هي معدل أخذ العينات بالهرتز، bd هي متجه معاملات المتغير z في بسط دالة عبور المرشح الرقمي و ad هي متجه معاملات المتغير z في مقام دالة عبور المرشح الرقمي. دالة العبور لن تكون مماثلة تماماً لنتيجة التصميم باستخدام تصميم الثبات الصدمي المعطاة هنا. سيكون هناك اختلاف في معامل التكبير وإزاحة زمنية، ولكن شكل استجابة الصدمة ستكون هي نفسها. انظر مثال (١٥.٢).

مثال ١٥.٢

تصميم مرشح رقمي لمجال ترددات باستخدام طريقة ثبات الصدمة

باستخدام طريقة التصميم بثبات الصدمة، صمِّمْ مرشحاً رقمياً لمحاكاة مرشح تماثلي من الدرجة الثانية منفذ لمجال من الترددات وله معامل تكبير الوحدة وتردد ركني 150Hz، و 200Hz ومعدل عينة 1kHz. دالة العبور ستكون على الصورة:

$$H_a(s) = \frac{9.87\times10^4 s^2}{s^4+444.3s^3+2.467\times10^6 s^2+5.262\times10^8 s+1.403\times10^{12}}$$

وستكون استجابة الصدمة على الصورة:

$$h_a(t) = [246.07e^{-122.41t}cos(1199.4t - 1.48) + 200.5e^{-99.74t}cos(977.27t + 1.683)]u(t)$$

قارن بين الاستجابة الترددية للمرشح التماثلي والمرشح الرقمي.

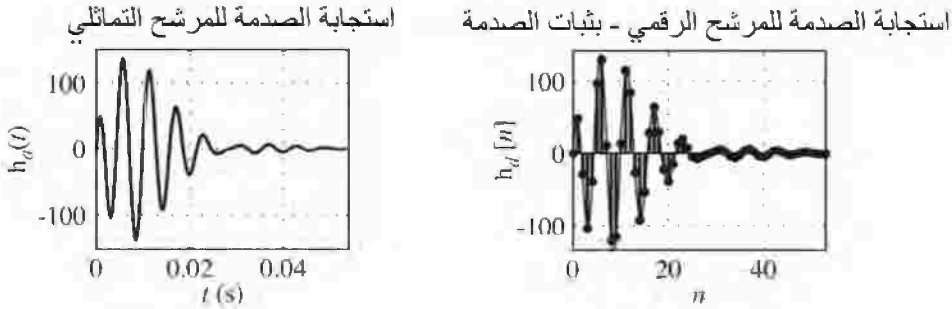
استجابة الصدمة هذه هي مجموع اثنين من الدوال الجيبية المتناقصة أسياً مع الزمن وبثابت زمني مقداره 8.2ms و 10ms، وترددات الدالة الجيبية هي 1199.4/2π≈190.9Hz، و 977.27/2π≈155.54Hz. للوصول إلى محاكاة أكثر دقة يمكننا اختيار معدل عينة بحيث تكون الدالة الجيبية متخطية لحد العينة وأن يكون هناك العديد من العينات للدالة الأسية خلال كل ثابت زمني. افترض أن معدل أخذ العينات يساوي 1kHz، بالتالي ستكون استجابة الصدمة المتقطعة زمنياً كما يلي:

$$h_a[t] = [246.07e^{-0.12241n}cos(1.1994n - 1.48) + 200.5e^{-0.9974n}cos(0.97727t + 1.683)]u[t]$$

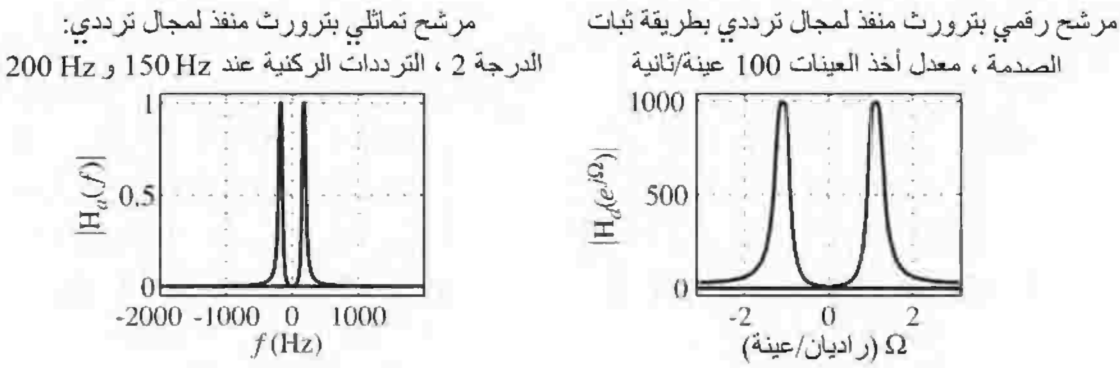
تحويل z لاستجابة الصدمة المتقطعة زمنياً ستكون هي دالة العبور:

$$H_a(z) = \frac{48.4z^3-107.7z^2+51.46z}{z^4+1.655z^3+2.252z^2-51.319z+0.6413}$$

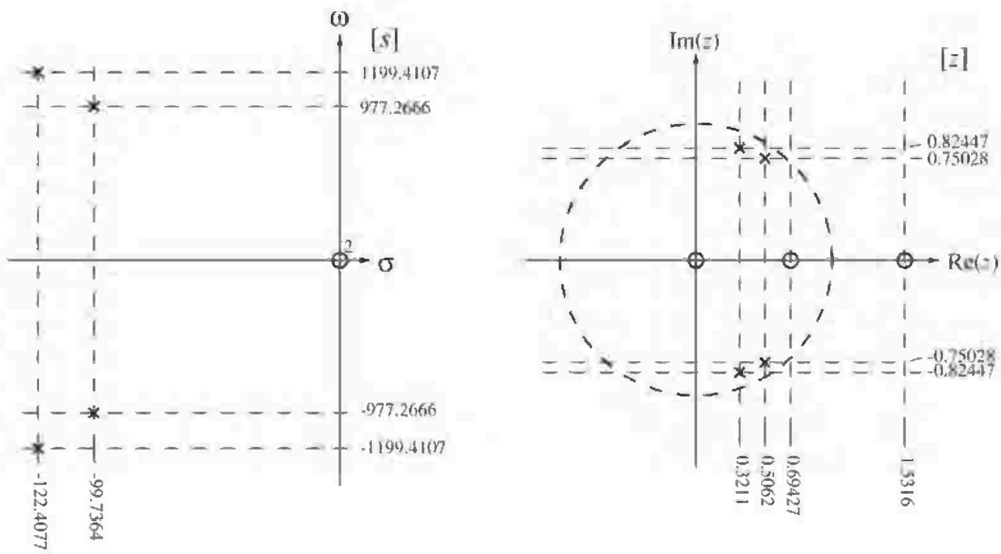
شكل (١٥.١١) يبين استجابة الصدمة للمرشح الرقمي والتماثلي.



شكل رقم (١٥.١١) استجابات الصدمة الرقمية والتماثلية



شكل رقم (١٥.١٢) مقدار الاستجابة الترددية للمرشح التماثلي والمحاكاة الرقمية له باستخدام طريقة ثبات استجابة الصدمة



شكل رقم (١٥.١٣) مخطط الأقطاب والأصفار للمرشح التماثلي والمحاكاة الرقمية له بطريقة ثبات الصدمة

مقدار الاستجابات الترددية للمرشحين التماثلي والرقمي موضحتان في شكل (١٥.١٢) ومخططات الأقطاب والأصفار لكل منهما موضحة في شكل (١٥.١٣).

شيئان مهمان فوريان يظهران الآن بخصوص هذا التصميم. الأول، أن المرشح التماثلي تكون له استجابة صفرية عند التردد f=0 بينما المرشح الرقمي لا يكون كذلك. استجابة المرشح الرقمي عند التردد Ω=0 تكون حوالي ٨٥٪ من قمة استجابته الترددية. حيث أن هذا المرشح يمثل مرشح منفذ لمجال من الترددات، فإن هذه تكون نتيجة غير مرغوب فيها. معامل تكبير المرشح الرقمي يكون أكبر كثيراً من معامل تكبير المرشح التماثلي. يمكن جعل معامل التكبير متساوياً وكل منهما يساوي تكبير المرشح التماثلي ببساطة عن طريق ضبط معامل الضرب في معادلة الـ $H_d(z)$. أيضاً على الرغم من أن الاستجابة الترددية تكون قمتها عند التردد الصحيح، فإن قمع المرشح الرقمي في مجال القمع أو الوقف ليس بجودة نظيره في المرشح التماثلي. إذا تم استخدام معدل عينة أعلى، فإن هذا القمع من الممكن أن يكون أفضل.

يمكن عمل ذلك من خلال الأمر impinvar في ماتلاب كما يلي:

```
>> [bd,ad] = impinvar([9.87e4 0 0],[1 444.3 2.467e6 5.262e8 1.403e12],1000)
bd =
  -0.0000 0.0484 -0.1077 0.0515
ad =
   1.0000 -1.6547 2.2527 -1.3188 0.6413
```

دالة العبور الناتجة ستكون:

$$H_M(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0.0484z^2-0.1077z+0.0515}{z^4-1.655z^3+2.252z^2-1.319z+0.6413}$$

قارن هذا مع النتيجة السابقة:

$$H_d(z) = \frac{48.4z^3-107.7z^2+51.46z}{z^4-1.655z^3+2.252z^2-1.319z+0.6413}$$

سنجد العلاقة بينهما ستكون:

$$H_M(z) = (z^{-1}/f_s)H_d(z)$$

لذلك فإن تصميم المرشح بثبات الصدمة باستخدام ماتلاب تقسم دالة العبور على معدل أخذ العينات، وتغير معامل تكبير المرشح وتضرب دالة العبور في z^{-1}، مما يسبب تأخير الاستجابة بمقدار وحدة من الزمن المتقطع. الضرب في ثابت والإزاحة الزمنية هما الشيئان اللذات يمكن عملهما على أى إشارة بدون تشويهها. لذلك فإن استجابتي الصدمة، على الرغم من أنهما غير متماثلتين تماماً، فإن لهما الشكل نفسه.

تصميم ثبات الخطوة: طريقة قريبة من ذلك هي تصميم المرشحات الرقمية باستخدام طريقة ثبات الخطوة. في هذه الطريقة يتم تصميم المرشح الرقمي بحيث تكون استجابة وحدة التتابع للمرشح الرقمي متوافقة تماماً مع استجابة الخطوة للمرشح التماثلي عند لحظات أخذ العينات. إذا كانت دالة العبور للمرشح التماثلي هي $H_a(s)$، فإن تحويل لابلاس لاستجابة الخطوة لهذا المرشح ستكون $H_a(s)/s$. استجابة وحدة الخطوة هي تحويل لابلاس العكسي:

$$h_{-1a}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{H_a(a)}{s}\right)$$

بالتالي ستكون استجابة وحدة التتابع المتقطعة زمنياً على الصورة:

$$h_{-1d}[n] = h_{-1a}(nT_s)$$

تحويل z لها يساوي حاصل ضرب دالة العبور في النطاق z وتحويل z لوحدة التتابع:

$$z(h_{-1d}[n]) = \frac{z}{z-1}H_d(z)$$

يمكننا أن نلخص ذلك بالقول التالي: بمعلومية دالة العبور في النطاق s وهي $H_a(s)$، فإنه يمكننا إيجاد دالة العبور المقابلة في النطاق z وهي $H_d(z)$ كما يلي:

$$\mathrm{H_d(z)} = \frac{z-1}{z}z\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{H_a(s)}{s}\right)_{(t)\to(nT_s)\to[n]}\right)$$

في هذه الطريقة نقوم بأخذ عينات استجابة وحدة الخطوة للحصول على استجابة وحدة التتابع. إذا قمنا بأخذ العينات الصدمية لاستجابة الخطوة للمرشح التماثلي $h_{-1a}(t)$ لتكوين $h_{-1\delta}(t)$ التي لها تحويل لابلاس يساوي $H_{-1\delta}(s)$ و CTFT لها هو:

$$H_{-1\delta}(j\omega) = f_s\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_{-1a}\big(j(\omega - k\omega_s)\big)$$

حيث $H_{-1a}(s)$ هي تحويل لابلاس لاستجابة الخطوة للمرشح التماثلي و $\omega_s=2\pi f_s$. نحن نعرف أيضاً أنه يمكننا أن نأخذ عينات $h_{-1a}(t)$ لنكون $h_{-1d}[n]$ التي لها تحويل z يساوي $H_{-1d}(z)$ و DTFT لها هو:

$$H_{-1d}(e^{j\Omega}) = f_s\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_{-1a}\big(jf_s(\Omega - 2\pi k)\big) \qquad \text{المعادلة رقم (١٥.٤)}$$

وبذلك تكون العلاقة بين دالة العبور التماثلية والرقمية:

$$H_{-1d}(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-1}H_d(e^{j\Omega})$$

و:

$$H_{-1a}(j\omega) = H_a(j\omega)/j\omega$$

$$H_d(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j\Omega}-1}{e^{j\Omega}}H_{-1d}(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j\Omega}-1}{e^{j\Omega}}f_s\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{H_a\big(jf_s(\Omega-2\pi k)\big)}{jf_s(\Omega-2\pi k)}$$

مثال ١٥.٣

تصميم مرشح رقمي منفذ لمجال من الترددات باستخدام طريقة ثبات الخطوة

باستخدام طريقة ثبات الخطوة، صممٌ مرشحاً رقمياً يحاكي المرشح التماثلي الذي له دالة عبور هي نفسها التي في المثال ١٥.٢.

$$H_a(s) = \frac{9.87\times10^4 s^2}{s^4+444.3s^3+2.467\times10^6 s^2+5.262\times10^8 s+1.403\times10^{12}}$$

بمعدل أخذ العينات نفسها f_s=1kHz.

استجابة وحدة الخطوة ستكون:

$$h_{-1a}(t) = [0.2041e^{-122.408t}cos(1199.4t + 3.1312) + 0.2041e^{-99.74t}cos(977.27t + 0.01042)]u(t)$$

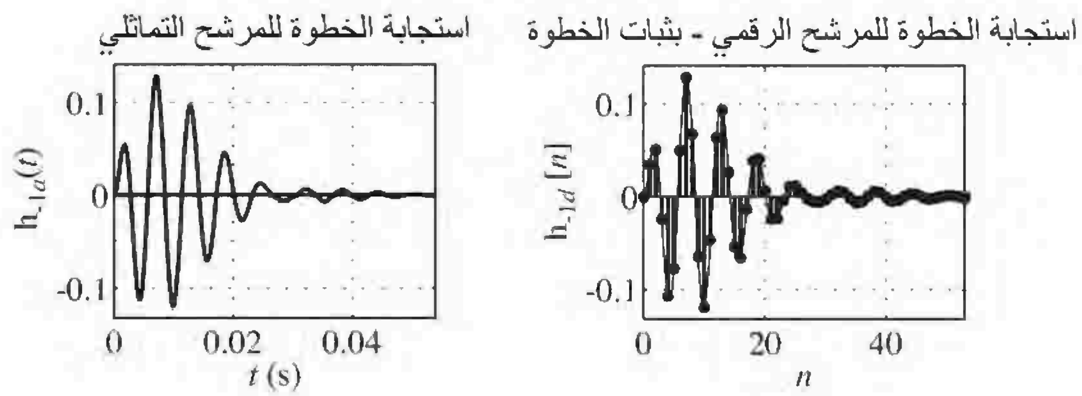
وستكون استجابة وحدة التتابع كما يلي:

$$h_{-1d}[n] = [0.2041(0.8847)^n cos(1199.4n + 3.1312) + 0.2041(0.9051)^n cos(977.27n + 0.0102)]u[n]$$

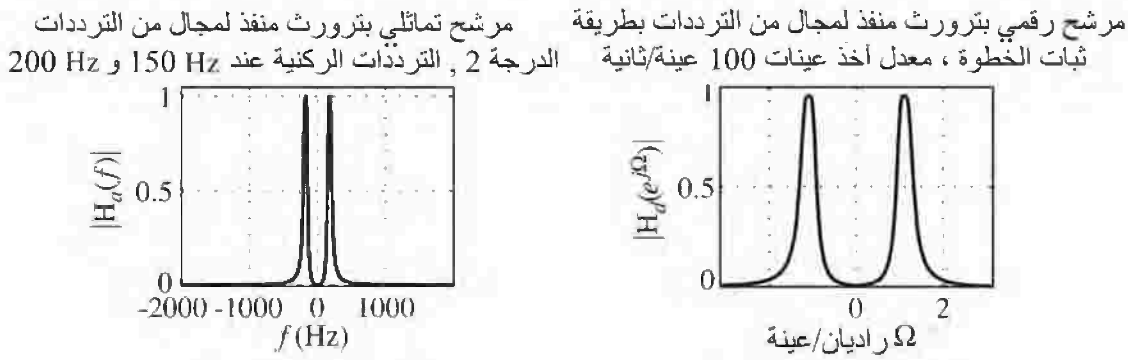
ودالة عبور المرشح الرقمي ستكون :

$$H_d(z) = \frac{0.03443z^3 - 0.03905z^2 - 1.139z + 0.6413}{z^4 - 1.655z^3 + 2.252z^2 - 1.319z + 0.6413}$$

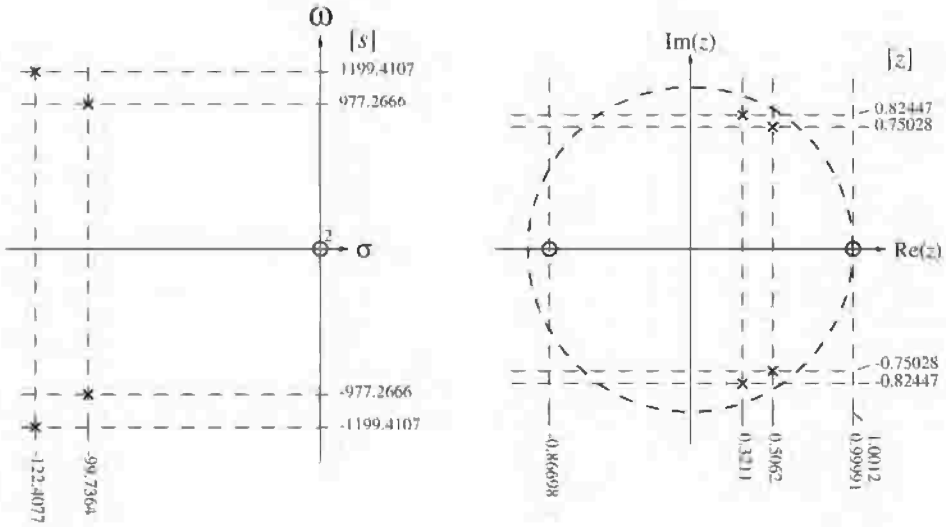
استجابات الخطوة، ومقدار الاستجابات الترددية، ومخططات الأقطاب والأصفار للمرشحات التماثلية والرقمية تمت مقارنتها في الأشكال (١٥.١٤) و (١٥.١٥) و (١٥.١٦).



شكل رقم (١٥.١٤) استجابات الخطوة للمرشح التماثلي والمحاكاة الرقمية له باستخدام طريقة ثبات الخطوة



شكل رقم (١٥.١٥) مقدار الاستجابة الترددية للمرشح التماثلي والمحاكاة الرقمية له بطريقة ثبات الخطوة



شكل رقم (١٥.١٦) مخططات الأقطاب والأصفار للمرشح التماثلي ومثيله الرقمي باستخدام طريقة ثبات الخطوة

على العكس من طريقة ثبات الصدمة، فإن هذا المرشح الرقمي له استجابة صفرية عند $\Omega=0$. أيضاً، فإن قمة الاستجابة الترددية للمرشح الرقمي في مجال العبور وقمة الاستجابة الترددية للمرشح التماثلي في مجال العبور يختلفان عن بعضهما بأقل من 0.1%.

التصميم بالفروق المحددة: طريقة أخرى لتصميم المرشحات الرقمية لتحاكي المرشحات التماثلية هي بتقريب المعادلة التفاضلية التي تصف النظام الخطي بأخرى فرقية. الفكرة الأساسية في هذه الطريقة هي أن نبدأ بدالة عبور مرغوبة للمرشح التماثلي $H_a(s)$ ونوجد المعادلة الفرقية المقابلة لها في النطاق الزمني. بالتالي فإن التفاضلات المستمرة زمنياً يتم تقريبها بفروق محددة في الزمن المتقطع والتعبير الناتج من ذلك سيكون دالة عبور المرشح الرقمي التي تقارب دالة عبور المرشح التماثلي الأصلي. مثلا، افترض المعادلة التالية:

$$H_a(s) = \frac{1}{s+a}$$

حيث إن دالة العبور تكون نسبة بين الاستجابة $Y_a(s)$ والإثارة $X_a(s)$:

$$\frac{Y_a(s)}{X_a(s)} = \frac{1}{s+a}$$

بالتالي فإن:

$$Y_a(s)(s+a) = X_a(s)$$

بإجراء تحويل لابلاس العكسي للجانبين:

$$\frac{d}{dt}\left(y_a(t)\right) + a y_a(t) = x_a(t)$$

يمكن تقريب التفاضل بتعبيرات فرقية محددة مختلفة وكل اختيار منها يكون له تأثير مختلف قليلاً على تقريب المرشح الرقمي للمرشح التماثلي. سنفترض في هذه الحالة أن التفاضل يتم تقريبه بفرق أمامي كما يلي:

$$\frac{d}{dt}\left(y_a(t)\right) \cong \frac{y_d[n+1] - y_a[n]}{T_s}$$

وبالتالي ، فإن تقريب المعادلة التفاضلية بمعادلة فرقية سيكون كما يلي :

$$\frac{y_d[n+1]-y_d[n]}{T_s}+ay_d[n]=x_d[n]$$

والصور التكرارية المقابلة لهذه العلاقة ستكون :

$$y_d[n+1]=x_d[n]T_s+(1-aT_s)y_d[n]$$

يمكن إيجاد دالة عبور المرشح الرقمي بإجراء تحويل z لهذه المعادلة كالتالي :

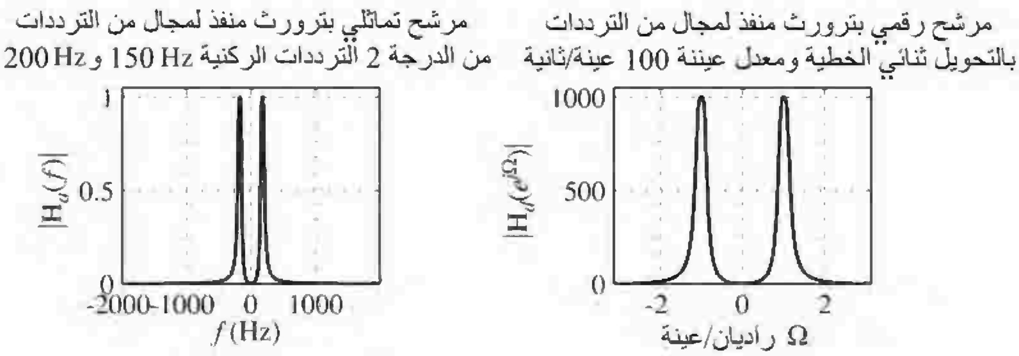
$$z(Y_d(z)-y_d[0])=T_sX_d(z)+(1-aT_s)Y_d(z)$$

يتم حساب دوال العبور على أساس افتراض أن النظام يكون في البداية في الحالة المستقرة صفراً. لذلك فإن $y_d[0]=0$

وبالتالي يمكن كتابة :

$$H_d(z)=\frac{Y_d(z)}{X_d(z)}=\frac{T_s}{z-(1-aT_s)}$$ المعادلة رقم (١٥.٥)

شكل (١٥.١٧) يوضح بناء باستخدام المخطط الصندوقي للمرشح السابق.



شكل رقم (١٥.١٧) مخطط صندوقي لمرشح رقمي تم تصميمه عن طريق تقريب المعادلة التفاضلية بمعادلة فرقية باستخدام الفروق الأمامية

كان من الممكن أن يعتمد المرشح الرقمي على تقريب التفاضل بالفروق العكسية كما يلي :

$$\frac{d}{dt}(y_a(t))\cong\frac{y_d[n]-y_a[n-1]}{T_s}$$

أو تقريب التفاضل بفرق مركزي كما يلي :

$$\frac{d}{dt}(y_a(t))\cong\frac{y_d[n+1]-y_a[n-1]}{2T_s}$$

يمكن تعميم ذلك بمعلومية أن كل s في أي معادلة في النطاق s تمثل تفاضلاً في النطاق الزمني :

$$\frac{d}{dt}(x_a(t))\overset{\pounds}{\leftrightarrow}s\,X_a(s)$$

(للمرة الثانية نفترض أن النظام يكون في البداية في الحالة المستقرة صفراً). يمكن تقريب التفاضلات بفروق أمامية أو خلفية أو مركزية ،

$$\frac{d}{dt}(x_a(t))\cong\frac{x_a(t+T_s)-x_a(t)}{T_s}=\frac{x_d[n+1]-x_d[n]}{T_s}$$

أو :

$$\frac{d}{dt}\left(x_a(t)\right) \cong \frac{x_a(t)-x_a(t-\mathrm{T}_s)}{\mathrm{T}_s} = \frac{x_d[n]-x_d[n-1]}{\mathrm{T}_s}$$

أو :

$$\frac{d}{dt}\left(x_a(t)\right) \cong \frac{x_a(t+\mathrm{T}_s)-x_a(t-\mathrm{T}_s)}{2\mathrm{T}_s} = \frac{x_d[n+1]-x_d[n-1]}{2\mathrm{T}_s}$$

تحويل z لهذه الفروق سيكون كما يلي :

$$\frac{x_d[n+1]-x_d[n]}{\mathrm{T}_s} \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z-1}{\mathrm{T}_s} x_d(z)$$

أو :

$$\frac{x_d[n]-x_d[n-1]}{\mathrm{T}_s} \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1-z^{-1}}{\mathrm{T}_s} X_d(z) = \frac{z-1}{z\mathrm{T}_s} X_d(z)$$

أو :

$$\frac{x_d[n+1]-x_d[n-1]}{2\mathrm{T}_s} \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{T}_s} X_d(z) = \frac{z^2-1}{z\mathrm{T}_s} X_d(z)$$

الآن يمكننا استبدال كل s في معادلة النطاق s بالنطاق z المقابل. بالتالي فإنه يمكننا تقريب دالة عبور النطاق s التي على الصورة :

$$H_a(s) = \frac{1}{s+a}$$

باستخدام التقريب الأمامي للتفاضل نحصل على :

$$H_d(z) = \left(\frac{1}{s+a}\right)_{s\to\frac{z-1}{\mathrm{T}_s}} = \frac{1}{\frac{z-1}{\mathrm{T}_s}+a} = \frac{\mathrm{T}_s}{z-1+a\mathrm{T}_s} \qquad \text{(١٥.٦) المعادلة رقم}$$

وهي تساوي تماماً ما حصلنا عليه في المعادلة (١٥.٥)، وهذا يجنبنا عملية كتابة المعادلة التفاضلية والتعويض فيها عن كل تفاضل بالفرق المقابل.

هناك جانب مهم في طريقة تصميم المرشحات الرقمية بالفروق المحددة يجب أن نتذكره دائماً. من الممكن بهذه الطريقة تقريب مرشح تماثلي مستقر بآخر رقمي غير مستقر. إفترض دالة العبور في المعادلة (١٥.٥) كمثال. هذه المعادلة لها قطب عند z=1-aTs، بينما المرشح التماثلي كان قطبه عند s=-a. إذا كان المرشح التماثلي مستقراً عندما a>0، فإن 1-aTs يجب أن تكون عند الموضع z=Re(z)<1 على المحور الحقيقي في المستوى z. إذا كانت aTs أكبر من أو تساوي اثنين، فإن القطب في المستوى z سيكون خارج دائرة الوحدة وبالتالي سيكون المرشح الرقمي غير مستقر.

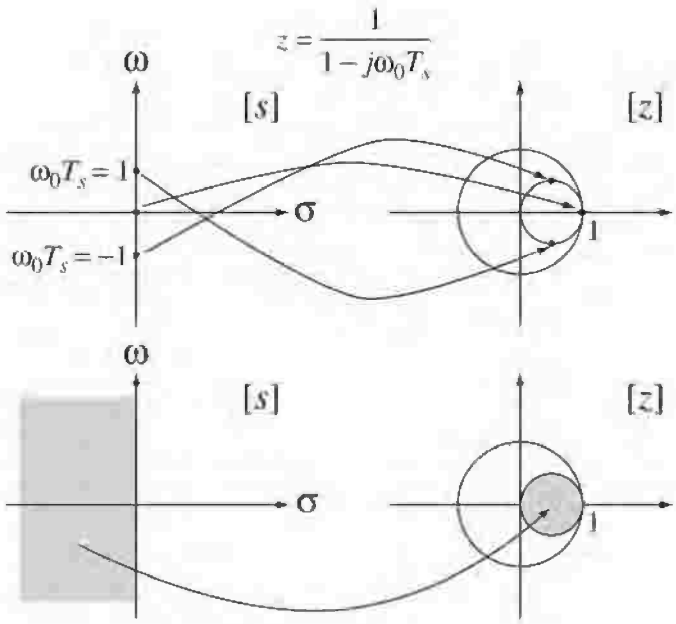
يمكن التعبير عن دالة عبور المرشح الرقمي في الكسور الجزيئية، بحيث تكون هناك كمية كسرية لكل قطب، وبعض هذه الأقطاب من الممكن أن يكون مركباً. القطب الذي عند $s=s_0$ في المستوى s ينتقل إلى قطب عند $z=1+s_0\mathrm{T}_s$ في المستوى z. وبالتالي فإن عملية النقل $s\to 1+s_0\mathrm{T}_s$ تنقل المحور ω في المستوى s إلى الخط z=1، والنصف الأيسر من المستوى s إلى داخل الدائرة z=1. لكي يكون النظام مستقراً فإن كل الأقطاب يجب أن تقع داخل دائرة الوحدة. لذلك

فإن عملية النقل هذه لن تضمن الحصول على مرشح رقمي مستقر. الثابت s_0 يتم تحديده بواسطة المرشح التماثلي ولا يمكن تغييرها. لذلك لكي نحل مشكلة عدم الاستقرار، فإننا نقلل T_s وهذا يعني زيادة معدل العينة.

إذا استخدمنا الفرق العكسي بدلاً من الفرق الأمامي في المعادلة (١٥.٦) سنحصل على دالة عبور المرشح الرقمي التالية:

$$H_d(z) = \left(\frac{1}{s+a}\right)_{s\to\frac{z-1}{zT_s}} = \frac{1}{\frac{z-1}{zT_s}+a} = \frac{zT_s}{z-1+azT_s} = \frac{T_s}{1+aT_s}\frac{zT_s}{z-1/(1+aT_s)}$$

الآن أصبح القطب عند $z=1/(1+aT_s)$. عملية النقل $a\to 1/(1+aT_s)$ تنقل القيم الموجبة لـ a (للمرشحات التماثلية المستقرة) إلى المحور الحقيقي في المستوى z بين $z=0$ و $z=1$. بالتالي فإن القطب يكون داخل دائرة الوحدة وسيكون النظام مستقراً بصرف النظر عن قيمة كل من a و T_s. أي أنه عموماً، إذا كان المرشح التماثلي له قطب عند $s=s_0$، فإن المرشح الرقمي سيكون له قطب عند $z=1/(1-s_0T_s)$. إن ذلك سينقل المحور ω في المستوى s إلى دائرة في المستوى z يكون نصف قطرها يساوي ½ ومركزها عند $z=1/2$ وينقل كل النصف الأيسر من المستوى s إلى داخل هذه الدائرة كما في شكل (١٥.١٨).



شكل رقم (١٥.١٨) عملية النقل z=1/(1-s0Ts)

على الرغم من أن عملية النقل هنا تضمن الحصول على مرشح رقمي مستقر من مرشح تماثلي مستقر، إلا أنها تحد أيضاً من نوع المرشح الرقمي التي يمكن تصميمها بفاعلية باستخدام هذه الطريقة. المرشحات التماثلية المنفذة للترددات المنخفضة التي تقع أقطابها على المحور الحقيقي السالب في المستوى s تصبح مرشحات رقمية منفذة للترددات المنخفضة، تقع أقطابها على المحور الحقيقي للمستوى z في الفترة $0<z<1$. إذا كان المرشح التماثلي له قطب

عند $\sigma_0 \pm j\omega_0$ حيث $\omega_0 >> \sigma_0$ ، مما يعني أن المرشح التماثلي يستجيب بقوة لتنغيمات الترددات القريبة من ω_0 ، وإذا كانت $\omega_0 T_s > 1$ فإن أقطاب المستوى z لن تقع بالقرب من دائرة الوحدة واستجابتها لن تكون تقريباً بالقوة نفسها عند التنغيمات الترددية المقابلة المتقطعة زمنياً.

مثال ١٥.٤

تصميم مرشح رقمي لمجال من الترددات باستخدام طريقة الفروق المحددة

باستخدام طريقة التصميم بالمعادلة الفرقية مع الفروق العكسية، صَمِّمْ مرشحاً رقمياً يحاكي المرشح التماثلي في مثال ١٥.٢ الذي دالة عبوره كما يلي :

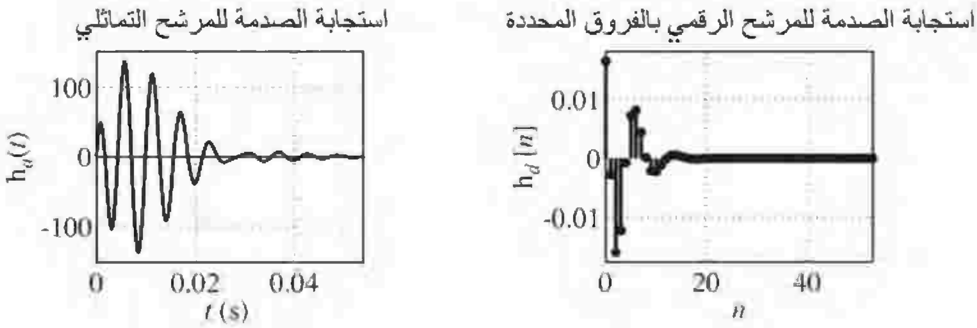
$$H_a(s) = \frac{9.87 \times 10^4 s^2}{s^4 + 444.3 s^3 + 2.467 \times 10^6 s^2 + 5.262 \times 10^8 s + 1.403 \times 10^{12}}$$

باستخدام معدل العينة نفسه f_s=1kHz . قارن بين الاستجابة الترددية للمرشحين.

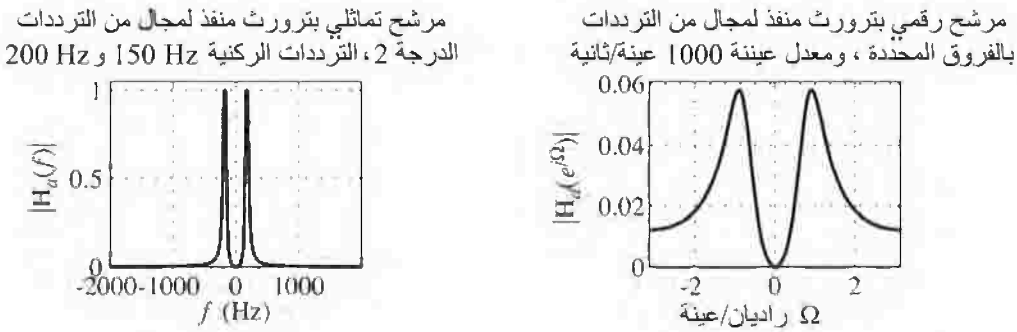
إذا اخترنا نفس معدل العينة في مثال ١٥.٢ ، f_s=1000 ، فإن دالة العبور في النطاق z ستكون :

$$H_d(z) = \frac{0.169 z^2 (z-1)^2}{z^4 - 1.848 z^3 + 1.678 z^2 - 0.7609 z + 0.1712}$$

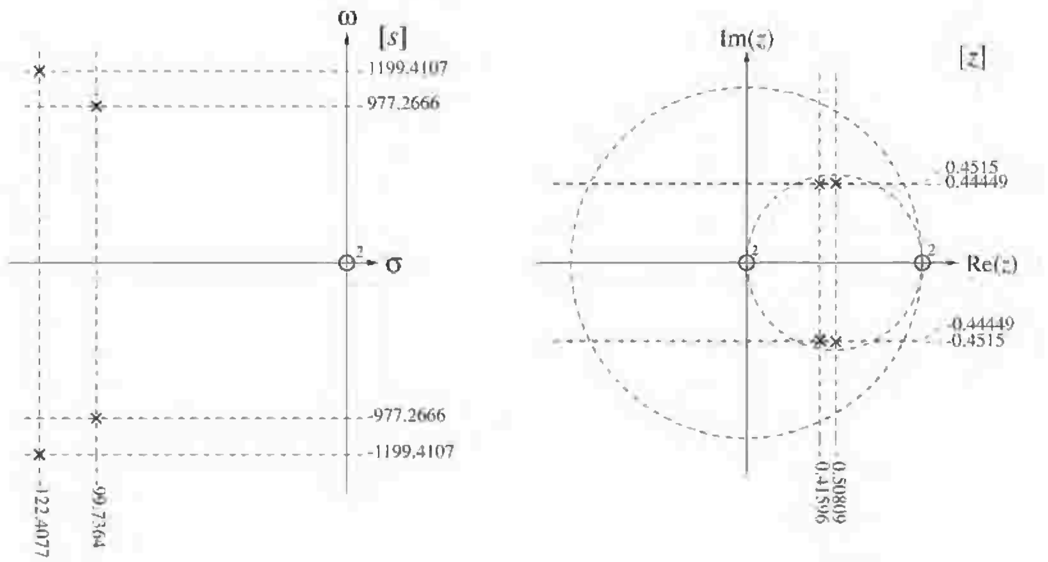
الأشكال (١٥.١٩) و(١٥.٢٠) و(١٥.٢١) توضح استجابات الصدمة، ومقدار الاستجابة الترددية، ومخططات الأقطاب والأصفار لكل من المرشح التماثلي والمرشح الرقمي للمقارنة.



شكل رقم (١٥.١٩) استجابات الصدمة للمرشح التماثلي والمحاكاة الرقمية له باستخدام طريقة الفروق المحددة



شكل رقم (١٥.٢٠) مقدار الاستجابة الترددية للمرشح التماثلي والمحاكاة الرقمية له باستخدام طريقة الفروق المحددة



شكل رقم (١٥.٢١) مخططات الأقطاب والأصفار للمرشح التماثلي ومحاكاته الرقمية باستخدام طريقة الفروق المحددة

استجابة الصدمة للمرشح الرقمي لا تشبه كثيراً استجابة الصدمة المعيننة للمرشح التماثلي وعرض مجال المرور للمرشح الرقمي يكون أكبر كثيراً، أيضاً فإن الإعاقة عند الترددات المرتفعة تكون أسوأ كثيراً، هذه النتيجة أسوأ كثيراً من الطريقتين السابقتين للتصميم.

مثال ١٥.٥

تصميم مرشح رقمي للترددات المنخفضة باستخدام طريقة الفروق المحددة

باستخدام طريقة التصميم بالمعادلات الفرقية مع الفروق الأمامية، صَمِّمْ مرشحاً رقمياً يحاكي المرشح التماثلي الذي له دالة العبور التالية:

$$H_a(s) = \frac{1}{s^2+600s+4\times10^5}$$

استخدم معدل عينة f_s=500Hz.

دالة العبور في النطاق z ستكون كالتالي:

$$H_d(z) = \frac{1}{\left(\frac{z-1}{T_s}\right)^2+600\frac{z-1}{T_s}+4\times10^5}$$

أو:

$$H_d(z) = \frac{T_s^2}{z^2+(600T_s-2)z+(1-600T_s+4\times10^5T_s^2)}$$

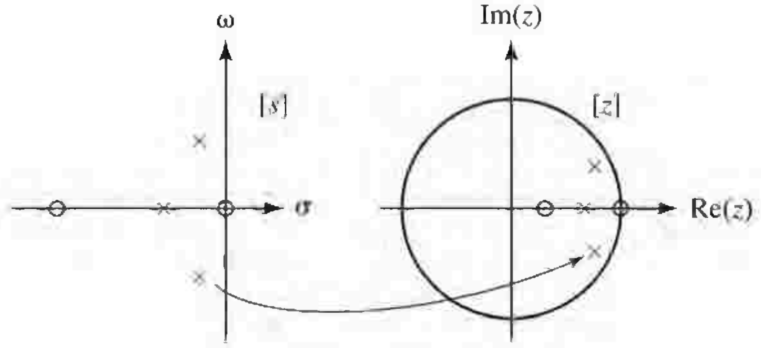
أو:

$$H_d(z) = \frac{4\times10^{-6}}{z^2-0.8z+1.4}$$

هذه النتيجة قد تبدو بسيطة ومباشرة ولكن أقطاب دالة العبور هذه في النطاق z تكون خارج دائرة الوحدة وبالتالي، فالمرشح غير مستقر، على الرغم من أن دالة العبور في النطاق s كانت مستقرة. يمكن استعادة استقرار المرشح عن طريق زيادة معدل العينة أو باستخدام طريقة الفروق العكسية.

طرق المجال الترددي

التعويض المباشر وتحويل z المتوافق: طريقة مختلفة لتصميم المرشحات الرقمية هي عن طريق التغيير المباشر في المتغير s إلى المتغير z الذي ينقل المستوى s إلى المستوى z، وينقل أقطاب وأصفار دالة العبور في المستوى s إلى الأماكن المناسبة المقابلة في المستوى z التي تحول المرشحات التماثلية المستقرة إلى مرشحات رقمية مستقرة. أشهر هذه الطرق التي تستخدم هذه الفكرة هي طريقة تحويل z المتوافق والتعويض المباشر، وطريقة التحويل ثنائي الخطية bilinear transformation. هذه الطريقة تعطي مرشحات من النوع IIR كما في شكل (١٥.٢٢).



شكل رقم (١٥.٢٢) نقل الأقطاب والأصفار من المستوى s إلى المستوى z

طريقتا التعويض المباشر وتحويل z المتوافق تتشابهان بدرجة كبيرة. تعتمد هاتان الطريقتان على فكرة النقل البسيط لأقطاب وأصفار دالة العبور في النطاق s إلى النطاق z من خلال العلاقة $z = e^{sT_s}$.

مثلاً، لتحويل الاستجابة الترددية للمرشح التماثلي التالي:

$$H_a(s) = \frac{1}{s+a}$$

الذي له قطب عند s=-a، فإننا سننقل القطب عند a- إلى الموضع المقابل له في النطاق z، بالتالي سيصبح موضع قطب المرشح الرقمي سيكون $z = e^{-aT_s}$. طريقة التعويض المباشر تنفذ التحويل $s\text{-}a \rightarrow z - e^{aT_s}$

بينما طريقة تحويل z المتوافق تنفذ التحويل $s - a \rightarrow 1 - e^{aT_s}z^{-1}$. دوال العبور في النطاق z الناتجة في هذه الحالة ستكون:

التعويض المباشر:

$$H_d(z) = \frac{1}{z-e^{aT_s}} = \frac{z^{-1}}{1-e^{aT_s}z^{-1}}$$

حيث هناك قطب عند $z = e^{-aT_s}$ ولا يوجد أي أصفار محددة.

تحويل z المتوافق:

$$H_d(z) = \frac{1}{1-e^{aT_s}z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{-aT_s}}$$

حيث هناك قطب عند $z = e^{-aT_s}$ وصفر عند z=0.

لاحظ أن طريقة تحويل z المتوافق تعطي النتيجة نفسها تماماً التي تم الحصول عليها باستخدام طريقة ثبات الصدمة، وطريقة التعويض المباشر تعطي النتيجة نفسها فيما عدا التأخير البسيط الوحيد نتيجة المعامل z^{-1}. في حالة دوال العبور الأكثر تعقيداً في النطاق s، فإن هاتين النتيجتين لا يكونان على هذه الدرجة من التشابه. هذه الطرق لا تحتوي أي تحليل في النطاق الزمني، حيث يتم التصميم بالكامل في النطاقين s و z. التحويلان $s-a \to z-e^{aT}$ و $s-a \to 1-e^{aT}z^{-1}$، كل منهما ينقل أي قطب في النصف الأيسر المفتوح من المستوى s إلى قطب في الداخل المفتوح من دائرة الوحدة في المستوى z، ولذلك فإن المرشحات التماثلية المستقرة سيتم تحويلها إلى مرشحات رقمية مستقرة.

مثال ١٥.٦

تصميم مرشح رقمي منفذ لمجال من الترددات باستخدام طريقة تحويل z المتوافق

باستخدام طريقة تحويل z المتوافق صمم مرشحاً رقمياً يحاكي المرشح التماثلي في مثال ١٥.٢ الذي دالة عبوره كما يلي:

$$H_a(s) = \frac{9.87\times10^4 s^2}{s^4+444.3s^3+2.467\times10^6 s^2+5.262\times10^8 s+1.403\times10^{12}}$$

مستخدماً معدل العينة نفسه f_s=1kHz . قارن الاستجابة الترددية للمرشحين.

دالة العبور هذه لها صفران عند s=0 وأقطاب عند s=-99.7±j978 وعند s=-122.4±j1198.6. باستخدام طريقة النقل:

$$s-a \to 1-e^{aT}z^{-1}$$

سنحصل على صفر عند z=1، وصفران عند z=0، وأقطاب عند:

z=0.5056±j0.7506 و 0.3217±j0.8242

وستكون دالة العبور في النطاق z كالتالي:

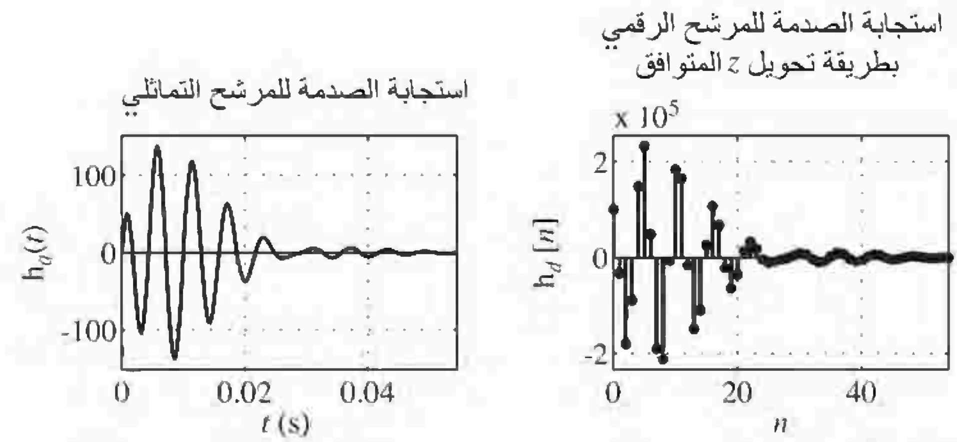
$$H_d(z) = \frac{z^2(98700z^2-197400z+98700)}{z^4-1.655z^3+2.252z^2-1.139z+0.6413}$$

أو:

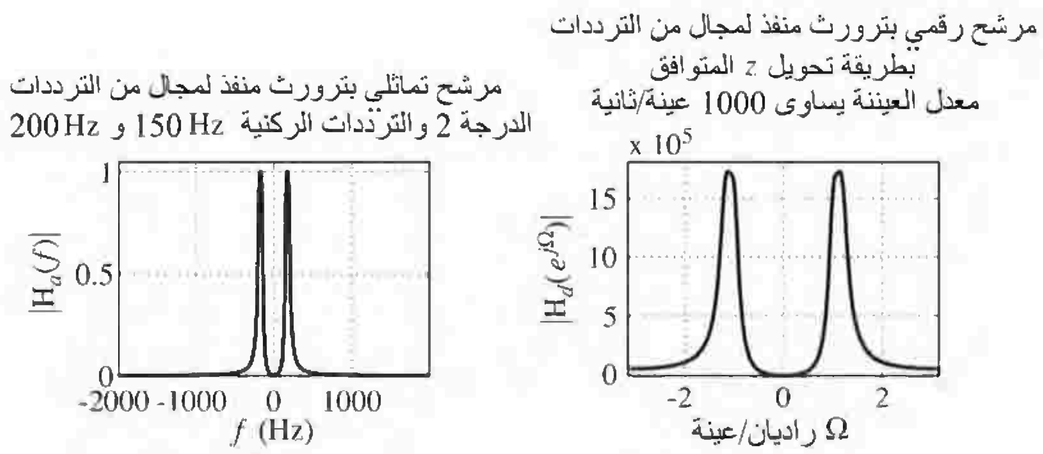
$$H_d(z) = 98700\frac{z^2(z-1)^2}{z^4-1.655z^3+2.252z^2-1.139z+0.6413}$$

الأشكال (١٥.٢٣) و (١٥.٢٤) و (١٥.٢٥) توضح استجابات الصدمة، ومقدار الاستجابة الترددية، ومخططات الأقطاب والأصفار للمقارنة بين هذه المرشحات.

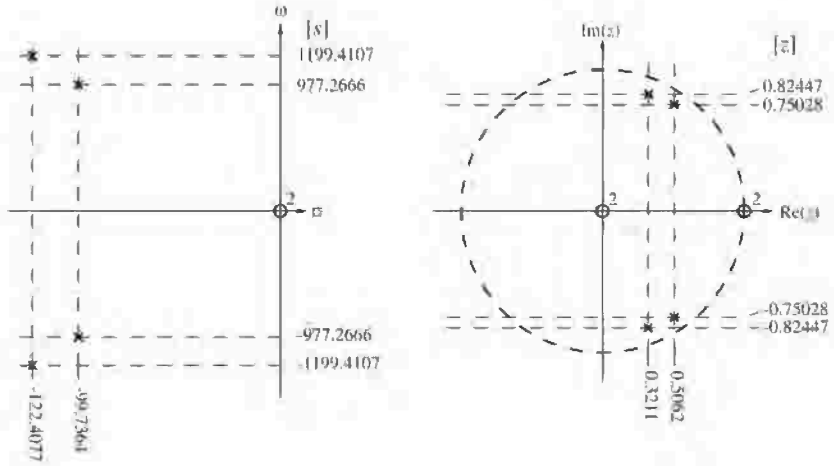
إذا تم عمل هذا التصميم باستخدام طريقة التعويض المباشر، فإن الفروق ستكون فقط هي إزالة الأصفار عند z=0، كما أن الاستجابة الترددية ستكون هي نفسها فيما عدا التأخير بمقدار وحدتين زمنيتين في الزمن المتقطع، ومقدار الاستجابة الترديية سيكون كما هو وزاوية الاستجابة الترددية سيكون لها ميل سالب بمقدار أكبر.



شكل رقم (١٥.٢٣) استجابة الصدمة للمرشح التماثلي والمحاكاة الرقمية له باستخدام طريقة تحويل z المتوافق

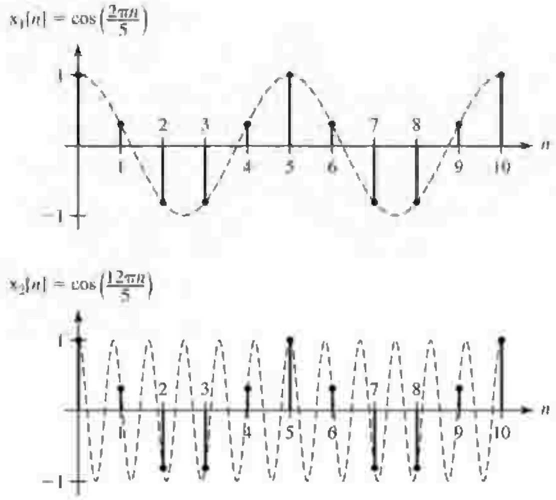


شكل رقم (١٥.٢٤) الاستجابات الترددية للمرشح التماثلي والمحاكاة الرقمية له باستخدام طريقة تحويل z المتوافق

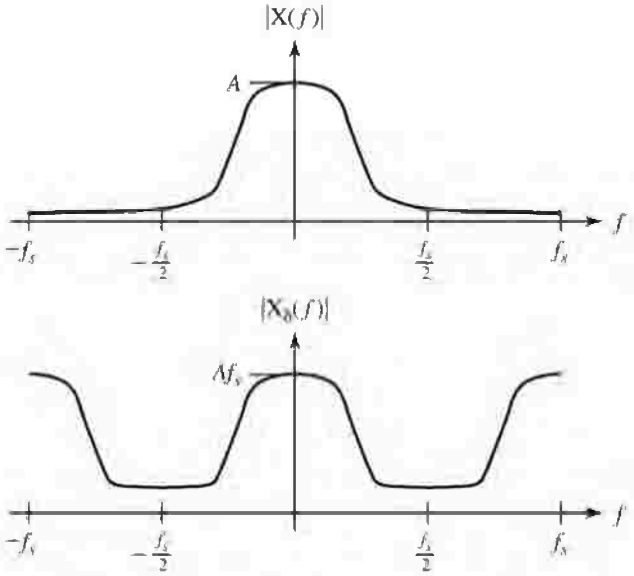


شكل رقم (١٥.٢٥) مخططات الأقطاب والأصفار للمرشح التماثلي والمحاكاة الرقمية له بطريقة تحويل z المتوافق

طريقة التحويل ثنائي الخطية: طرق التصميم بثبات الصدمة وثبات الخطوة تحاول أن تجعل استجابة المرشح الرقمي في الزمن المتقطع تتوافق مع استجابة المرشح التماثلي في الزمن المستمر لأي إثارة قياسية. طريقة أخرى لتصميم المرشحات الرقمية هي عن طريق جعل الاستجابة الترددية للمرشح الرقمي تتوافق مع الاستجابة الترددية للمرشح التماثلي. ولكن، حيث إن الاستجابة الترددية في الزمن المتقطع لا يمكن أن تتوافق تماماً مع الاستجابة الترددية في الزمن المستمر، فإن الاستجابة الترددية للمرشح الرقمي لا يمكن أن تتوافق تماماً مع الاستجابة الترددية للمرشح التماثلي. أحد الأسباب التي تم ذكرها مسبقاً هي أن الاستجابات الترددية للمرشحات الرقمية تكون دورية ضمنيا. عند عينة إشارة جيبية مستمرة لتوليد إثارة متقطعة زمنياً، فإنه إذا تم تغيير تردد الإشارة المستمرة بمقدار مضاعف صحيح من معدل العينة، فإن الإشارة المتقطعة زمنياً لن تتغير على الإطلاق. المرشح الرقمي لا يمكن أن يخبر عن هذا الفرق وسيستجيب بالطريقة نفسها كما لو كان يستجيب للإشارة الأصلية كما في شكل (١٥.٢٦).



شكل رقم (١٥.٢٦) إشارتان متماثلتان تماماً ومتقطعتان زمنياً تم الحصول عليهما عن طريق عينة إشارتين جيبيتين مختلفتين



شكل رقم (١٥.٢٧) مقدار طيف الإشارة المستمرة زمنياً والإشارة المتقطعة زمنياً المتكونة عن طريق عينة الصدمة لها

تبعاً لنظرية العينة، فإنه إذا أمكن التأكيد على أن الإشارة المستمرة زمنياً لن تحتوي على أي مكونات ترددية خارج المدى $|f|<f_s/2$، بالتالي عند أخذ عينات هذه الإشارة بالمعدل f_s فإن الإشارة الناتجة المتقطعة زمنياً ستحتوي على كل المعلومات الموجودة في الإشارة المستمرة زمنياً. بالتالي فعند إثارة أي مرشح رقمي بهذه الإشارة المتقطعة زمنياً، فإن الاستجابة ستحتوي كل المعلومات المقابلة في الإشارة المستمرة زمنياً. بالتالي فإن عملية تصميم المرشح الرقمي تصبح كيفية جعل الاستجابة الترددية للمرشح الرقمي تكافئ أو تتوافق مع الاستجابة الترددية للمرشح التماثلي في المدى $|f|<f_s/2$ فقط وليس خارجه. على العموم فإن هذا التكافؤ لا يمكن أن يكون تكافؤاً تاماً ولكنه في العادة يكون قريباً بصورة جيدة. بالطبع فإنه لا توجد إشارة يمكن أن نقول عنها أنها محدودة المجال الترددي، لذلك يجب أن نأخذ في الحسبان عملياً أن يكون هناك طاقة إشارة قليلة جداً بعد نصف معدل العينة بدلا من افتراض عدم وجودها كما في شكل (١٥.٢٧).

إذا كانت أي إشارة مستمرة زمنياً لا تحتوي أي مكونات ترددية خارج المدى $|f|<f_s/2$، فإن أي استجابة ترددية لا تساوي الصفر لأي مرشح تماثلي خارج هذا المدى لن يكون لها تأثير على هذه الإشارة. لذلك فعند تصميم أي مرشح رقمي ليحاكي مرشحاً تماثلياً فإن معدل العينة يجب اختياره بحيث تكون استجابة المرشح التماثلي عند الترددات $|f|>f_s/2$ تساوي صفر تقريباً. لذلك فإن كل التأثيرات الترشيحية ستحدث في المدى الترددي $|f|<f_s/2$. لذلك، فإن نقطة البداية في عملية تصميم المرشح الرقمي في النطاق الترددي هي تحديد معدل العينة، بحيث:

$X(f)\cong 0$ و $H_a(f)\cong 0$ عندما $|f|<f_s/2$

أو :

$X(jw)\cong 0$ و $H_a(jw)\cong 0$ عندما $|w|>\pi f_s=w_s/2$

الآن تصبح المشكلة هي إيجاد دالة عبور لمرشح رقمي يكون لها تقريبا الشكل نفسه مثل دالة عبور المرشح التماثلي الذي نحاول محاكاته في المدى $|f|<f_s/2$. كما شرحنا مسبقاً، فإن الطريقة المباشرة لتحقيق هذا الهدف من الممكن أن تكون استخدام التحويل $e^{sT_s} \rightarrow z$ لتحويل دالة العبور المرغوبة $H_a(s)$ إلى دالة العبور الرقمية المقابلة $H_d(z)$. التحويل $e^{sT_s} \rightarrow z$ يمكن عكسه ليكون كالتالي : $s\rightarrow \ln(z)/T_s$. بالتالي تصبح عملية التصميم كما يلي :

$$H_d(z) = H_a(s)|_{s\rightarrow\frac{1}{T_s}ln(z)}$$

على الرغم من أن طريقة التحويل هذه تكون كافية من وجهة النظرالنظرية ، فإن دالة التحويل $s\rightarrow \ln(z)/T_s$ ستقوم بتحويل دالة عبور مرشح تماثلي في الصورة الشائعة التي هي نسبة بين كثيرتي حدود في المتغير s إلى دالة عبور مرشح رقمي في صورة نسبة من كثيرتي حدود ليس في z ولكن في $\ln(z)$ ، مما يجعل الدالة تتعالى بالعديد من الأقطاب والأصفار. على الرغم من أن هذه الفكرة جذابة ، إلا أنها لا تؤدي إلى تصميم مرشح رقمي عملي.

عند هذه النقطة من الشائع جداً أن نعمل تقريب في محاولة لتبسيط صورة دالة العبور للمرشح الرقمي. أحد هذه التحويلات يأتي من التعبير التتابعي للدالة الأسية كما يلي :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

يمكن تطبيق ذلك على التحويل $e^{sT_s} \rightarrow z$ كما يلي :

$$1 + sT_s + \frac{(sT_s)^2}{2!} + \frac{(sT_s)^3}{3!} + \cdots \rightarrow z$$

إذا قربنا هذا التتابع بأول مركبتين فيه كما يلي :

$$1 + sT_s \rightarrow z$$

أو :

$$\mathrm{s} \rightarrow \frac{\mathrm{z}-1}{\mathrm{T_s}}$$

التقريب $e^{sT_s} \cong 1 + sT_s$ يعتبر تقريباً جيداً إذا كانت T_s صغيرة ويصبح أفضل كلما صغرت T_s وبالتالي كلما كانت f_s أكبر. بمعنى أن هذا التقريب يصبح جيداً جداً عند معدلات العيننة العالية. دعنا نفحص التحويل $s\rightarrow(z-1)/T_s$. بالضرب في s في النطاق s فإن ذلك يقابل التفاضل بالنسبة للزمن t للدالة المقابلة في النطاق الزمني المستمر. بالضرب في $(z-1)/T_s$ في النطاق z فإن ذلك يقابل فرقاً أمامياً مقسوماً على زمن العيننة T_s للدالة المقابلة في نطاق الزمن المتقطع ، وهذا تقريب للتفاضل بالفرق الأمامي. كما ذكرنا من قبل في طريقة الفروق المحددة ، فإن العمليتين ، الضرب في s والضرب في $(z-1)/T_s$ متكافئتان. لذلك فإن هذه الطريقة يكون لها المشكلة نفسها مثل طريقة

الفروق المحددة باستخدام الفروق الأمامية، وهي أن المرشح التماثلي المستقر من الممكن أن يصبح مرشحاً رقمياً غير مستقر.

هناك تعديل ذكي جداً لهذا التحويل لحل مشكلة الحصول على مرشح رقمي غير مستقر من آخر تماثلي مستقر وفي الوقت نفسه يكون به بعض المميزات الأخرى. يمكننا كتابة التحويل من النطاق s إلى النطاق z على الصورة:

$$e^{sT_s} = \frac{e^{sT_s/2}}{e^{-sT_s/2}} \to z$$

بتقريب كل الأسس بالتتابع غير المحدود:

$$\frac{1+\frac{sT_s}{2}+\frac{(sT_s/2)^2}{2!}+\frac{(sT_s/2)^3}{3!}+\cdots}{1-\frac{sT_s}{2}+\frac{(sT_s/2)^2}{2!}-\frac{(sT_s/2)^3}{3!}+\cdots} \to z$$

بالاكتفاء بأول مكونين من كل تتابع نحصل على ما يلي:

$$\frac{1+sT_s/2}{1-sT_s/2} \to z$$

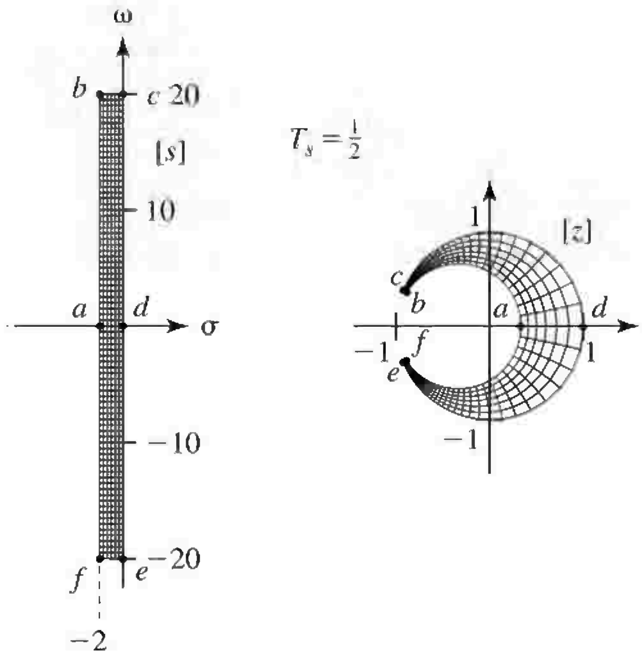
وهذا يؤدي إلى ما يلي:

$$s \to \frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1} \quad \text{أو} \quad z \to \frac{2+sT_s}{2-sT_s}$$

هذا التحويل من s إلى z يسمى التحويل ثنائي الخطية؛ لأن كل من البسط والمقام يحتويان دالة خطية في s أو z. (لا تخلط بين التعبيرين ثنائي الخطية bilinear وثنائي الجانب في تحويل z). تحويل z الثنائي الخطية يحول أي مرشح تماثلي مستقر إلى مرشح رقمي مستقر لأنه ينقل كل النصف الأيسر المفتوح من المستوى s إلى الداخل المفتوح لدائرة الوحدة في المستوى z. لقد كان ذلك حقيقيا في تحويل z المتوافق، وفي التعويض المباشر ولكن المقابلات تختلف. التحويل $z = e^{sT_s}$ ينقل أي شريحة $\omega_0/T_s<\omega<(\omega_0+2\pi)T_s$ في المستوى s إلى كل المستوى z. النقل من المستوى s إلى المستوى z يكون فريداً، بينما النقل من المستوى z إلى المستوى s لا يكون فريداً. التحويل ثنائي الخطية: $s\to(2/T_s)(z-1)/(z+1)$ ينقل كل نقطة في المستوى s إلى نقطة مقابلة فريدة في المستوى z والتحويل العكسي $z\to(2+sT_s)/(2-sT_s)$ ينقل كل نقطة في المستوى z إلى نقطة فريدة في المستوى s. لنرى كيفية عمل هذا التحويل سنفترض المحيط $s=j\omega$ في المستوى s. بوضع $z=(2+sT_s)/(2-sT_s)$ نحصل على:

$$z = \frac{2+j\omega T_s}{2-j\omega T_s} = 1 < 2tan^{-1}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right) = e^{j2tan^{-1}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)}$$

والذي يقع كله على دائرة الوحدة في المستوى z. أيضاً، نلاحظ أن المحيط، أو المسار على دائرة الوحدة في المستوى z لمرة واحدة يساوي تماما المسار $-\infty<w<\infty$. بالنسبة للمسار الأكثر عمومية $s=\sigma_0+j\omega$، حيث σ_0 ثابت، المسار المقابل، لذلك هو أيضاً دائرة ولكن بنصف قطر مختلف على المحور Re(z) بحيث مع اقتراب w من $\pm\infty$، فإن z تقترب من 1- كما في شكل (١٥.٢٨).

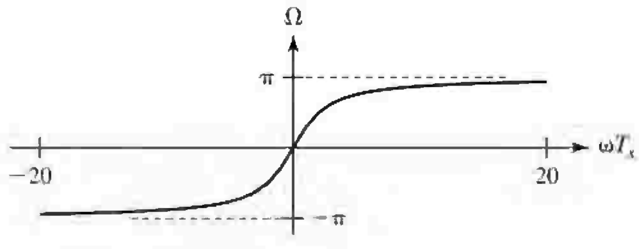


شكل رقم (١٥.٢٨) نقل منطقة من المستوى s إلى منطقة مقابلة من المستوى z من خلال تحويل z الثنائي الخطية

مع تحرك المسارات في المستوى s ناحية اليسار، فإن المسارات في المستوى z تصبح دوائر أصغر تتحرك مراكزها لتقترب من النقطة z=-1. النقل من المستوى s إلى المستوى z هو نقل من نقطة إلى نقطة مقابلة أو ما يسمى نقل واحد لواحد ولكن التشويه في المناطق يصبح أكثر خطورة مع تحرك s بعيداً من نقطة الأصل. مع ارتفاع معدل العيننة، فإن كل الأقطاب والأصفار في المستوى s تقترب أكثر وأكثر من النقطة z=1 في المستوى z حيث يكون التشويه أقل ما يمكن. يمكن رؤية ذلك عن طريق أخذ النهاية مع اقتراب T_s من الصفر. في النهاية فإن z تقترب من +1. الفرق المهم بين طريقة تحويل z الثنائي الخطية وطريقة ثبات الصدمة أو طريقة تحويل z المتوافق هي أنه لا يوجد نسخ مستعارة عند استخدام التحويل ثنائي الخطية نتيجة عملية التحويل الفريدة (واحد لواحد) بين المستويين s و z. على الرغم من ذلك، فهناك التفاف أو اعوجاج أو تشويه يحدث نتيجة طريقة نقل المحور s=jw إلى دائرة الوحدة |z|=1 والعكس. بفرض $z=e^{j\Omega}$ حيث Ω حقيقية، تحدد دائرة الوحدة في المستوى z. المسار المقابل في المستوى s هو:

$$s = \frac{2}{T_s}\frac{e^{j\Omega}-1}{e^{j\Omega}+1} = j\frac{2}{T_s}tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

وحيث إن $s=\sigma+j\omega$، $\sigma=0$ و $w=(2/T_s)\tan(\Omega/2)$ أو بعكس الدالة فإن $\Omega=2\tan^{-1}(\omega T_s/2)$ كما في شكل (١٥.٢٩).



شكل رقم (١٥.٢٩) الاعوجاج أو الالتفاف الترددي نتيجة التحويل ثنائي الخطية

بالنسبة للترددات المنخفضة، ستكون عملية النقل خطية تقريباً ولكن التشويه يزداد سوءاً باستمرار مع زيادة التردد؛ لأننا نجبر الترددات العالية ω في النطاق s لتنحصر في المجال $-\pi<\Omega<\pi$ في النطاق z، وذلك يعني أن السلوك التقاربي للمرشح التماثلي مع اقتراب f أو ω من الما لانهاية الموجبة يحدث في النطاق z عند $\Omega=\pi$ والتي عند $\Omega=\omega T_s=2\pi f T_s$ تكون عند $f=f_s/2$ والتي تمثل تردد نيكويست. لذلك، فإن هذا التزوير سيحصر كل المدى اللانهائي في الترددات المستمرة زمنياً إلى مدى من الترددات المتقطعة $-\pi<\Omega<\pi$ في صورة دالة غير خطية قابلة للعكس، وبالتالي تم تجنب عملية الاستعارة المزيفة.

صندوق أدوات الإشارة في ماتلاب به الأمر bilinear لتصميم المرشحات الرقمية باستخدام التحويل ثنائي الخطية. الصورة العامة لهذا الأمر هي:

[bd, ad]=bilinear(ba, aa, fs)

أو:

[zd, pd, kd]=bilinear(za, pa, ka, fs)

حيث ba هي متجه معاملات البسط في دالة عبور المرشح التماثلي، و aa هي متجه معاملات المقام في دالة عبور المرشح التماثلي، و bd هي متجه معاملات البسط في دالة عبور المرشح التماثلي، و bd هي متجه معاملات المقام في دالة عبور المرشح الرقمي، و ad هي متجه مواضع أصفار المرشح التماثلي، و pa هي متجه مواضع أقطاب المرشح التماثلي، و ka هو معامل تكبير المرشح التماثلي، و f_s هي معدل العينة بالهرتز، و zd هي متجه مواضع المرشح الرقمي، و pd هي متجه مواضع أقطاب المرشح الرقمي، و kd هو معامل تكبير المرشح الرقمي. مثلاً:

```
»za = [] ; pa = -10 ; ka = 1 ; fs = 4 ;
»[zd,pd,kd] = bilinear(za,pa,ka,fs) ;
»zd
zd =
  -1
»pd
pd =
 -0.1111
»kd
kd =
  0.0556
```

مثال ١٥.٧

مقارنة بين تصميمات المرشح الرقمي المنفذ للترددات المنخفضة باستخدام التحويل ثنائي الخطية بمعدلات أخذ عينات (عينة) مختلفة

باستخدام التحويل ثنائي الخطية صمم مرشحاً رقمياً ليحاكي المرشح التماثلي الذي له دالة العبور التالية :

$$H_a(s) = \frac{1}{s+10}$$

وقارن الاستجابات الترددية للمرشح الرقمي والمرشح التماثلي عند معدلات العينة 4Hz، و 20Hz، و 100Hz.

باستخدام التحويل التالي :

$$s \rightarrow \frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}$$

نحصل على :

$$H_d(z) = \frac{1}{\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}+10} = \left(\frac{T_s}{2+10T_s}\right)\frac{z+1}{z-\frac{2-10T_s}{2+10T_s}}$$

بالنسبة لمعدل العينة 4Hz :

$$H_d(z) = \frac{1}{18}\frac{z+1}{z+\frac{1}{9}}$$

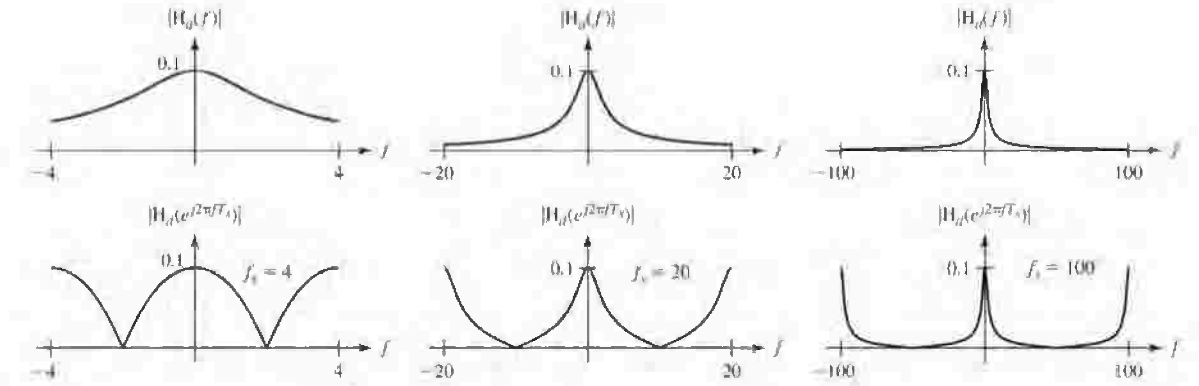
بالنسبة لمعدل العينة 20Hz :

$$H_d(z) = \frac{1}{50}\frac{z+1}{z-\frac{3}{5}}$$

بالنسبة لمعدل العينة 100Hz :

$$H_d(z) = \frac{1}{210}\frac{z+1}{z-\frac{19}{21}}$$

انظر شكل (١٥.٣٠).



شكل رقم (١٥.٣٠) مقدار الاستجابات الترددية للمرشح التماثلي وثلاثة من المرشحات الرقمية باستخدام التحويل ثنائي القطبية عند ثلاثة من معدلات العينة المختلفة.

مثال ١٥.٨

تصميم مرشح رقمي منفذ لمجال من الترددات باستخدام التحويل ثنائي الخطية

باستخدام طريقة التحويل ثنائي الخطية صمم مرشحاً رقمياً ليحاكي المرشح التماثلي في مثال ١٥.٢ الذي له دالة العبور التالية:

$$H_a(s) = \frac{9.87\times10^4 s^2}{s^4+444.3s^3+2.467\times10^6 s^2+5.262\times10^8 s+1.403\times10^{12}}$$

باستخدام معدل العينة نفسه f_s=1kHz . قارن الاستجابة الترددية للمرشحين.

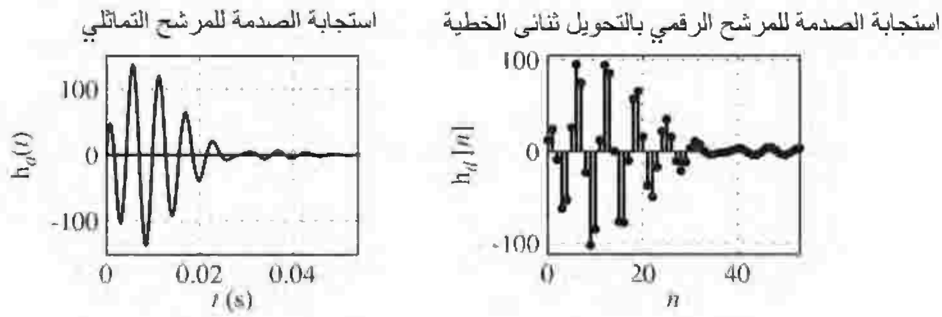
باستخدام التحويل التالي: $s\rightarrow(2T_s)(z-1)/(z+1)$ والتبسيط نحصل على المعادلة التالية:

$$H_d(z) = \frac{12.38z^4-24.77z^2+12.38}{z^4-1.989z^3+2.656z^2-1.675z+0.711}$$

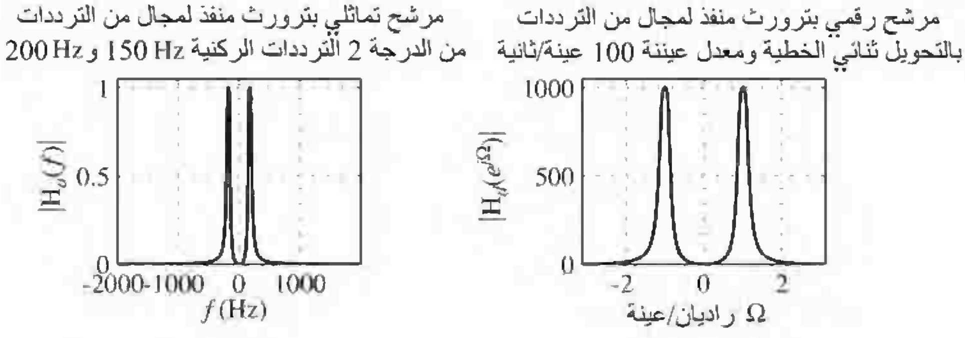
أو:

$$H_d(z) = 12.38\frac{(z+1)^2(z-1)^2}{z^4-1.989z^3+2.656z^2-1.675z+0.711}$$

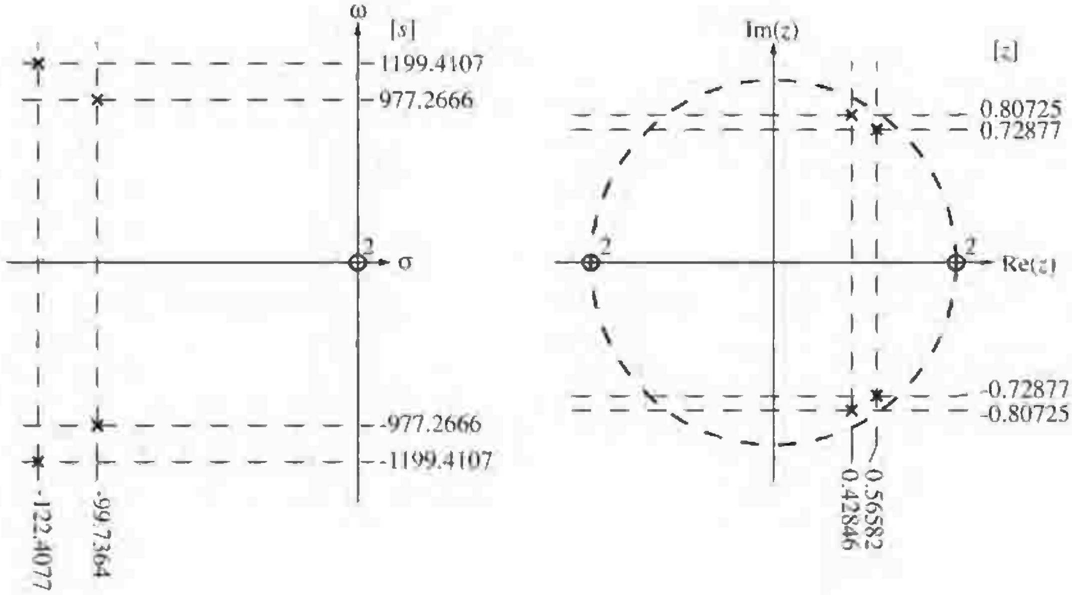
يمكن المقارنة بين استجابات الصدمة، ومقدار الاستجابات الترددية، ومخططات الأقطاب والأصفار لكل من المرشح التماثلي والرقمي كما في الأشكال (١٥.٣١) و (١٥.٣٢) و (١٥.٣٣).



شكل رقم (١٥.٣١) استجابات الصدمة للمرشح التماثلي والمحاكاة الرقمية له باستخدام التحويل ثنائي الخطية



شكل رقم (١٥.٣٢) مقدار الاستجابة الترددية للمرشح التماثلي والمحاكاة الرقمية له باستخدام التحويل ثنائي الخطية

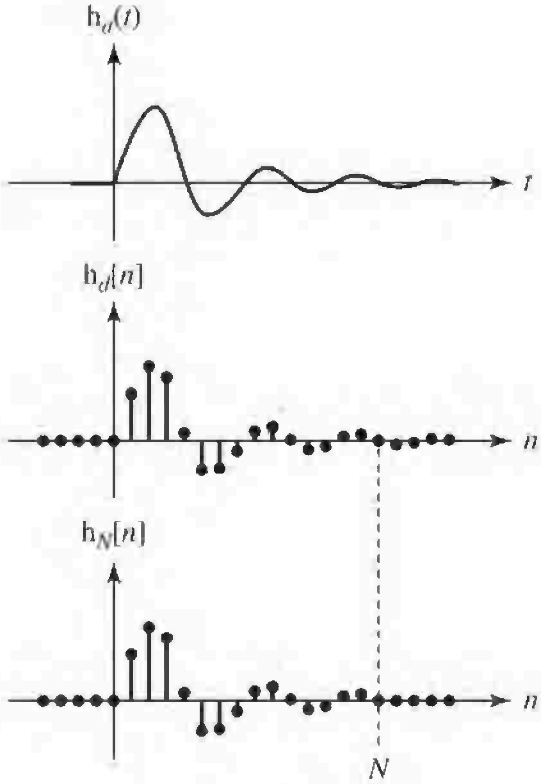


شكل رقم (١٥.٣٣) مخططات الأقطاب والأصفار للمرشح التماثلي والمحاكاة الرقمية له باستخدام التحويل ثنائي الخطية

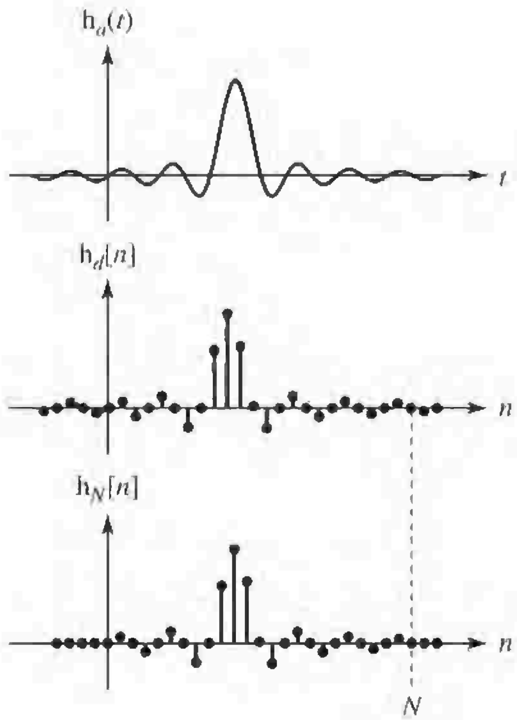
تصميم المرشحات FIR

استجابة الصدمة المثالية المقتطعة: على الرغم من أن المرشحات التماثلية الشائعة الاستخدام يكون لها استجابات صدمة لا نهائية، لأنها تكون أنظمة مستقرة تقترب استجابة الصدمة لها من الصفر مع اقتراب الزمن من الما لانهاية الموجبة. لذلك، فهناك طريقة أخرى لمحاكاة المرشح التماثلي هي أن نقوم بأخذ عينات من استجابة الصدمة، كما هو الحال في طريقة ثبات الصدمة، ولكن بعد ذلك نقطع استجابة الصدمة عند n=N حيث تكون قد نزلت إلى مستوى منخفض، وبذلك نحصل على استجابة صدمة محددة، كما في شكل (١٥.٣٤). المرشحات الرقمية التي لها استجابة صدمة محددة تسمى مرشحات FIR.

طريقة اقتطاع استجابة الصدمة يمكن توسعتها أيضاً لتقريب المرشحات غير السببية. إذا كان الجزء من المرشح المثالي الذي يقع قبل t=0 غير مهم بالمقارنة مع الجزء الذي يقع بعد الزمن t=0، فإنه بذلك يمكن اقتطاعه لتكوين استجابة صدمة سببية. يمكن الاقتطاع أيضاً بعد زمن معين عندما تنزل استجابة الصدمة إلى قيمة منخفضة كما أوضحنا مسبقاً وكما في شكل (١٥.٣٥).



شكل رقم (١٥.٣٤) اقتطاع استجابة الصدمة للمرشح IIR لتكوين استجابة الصدمة FIR



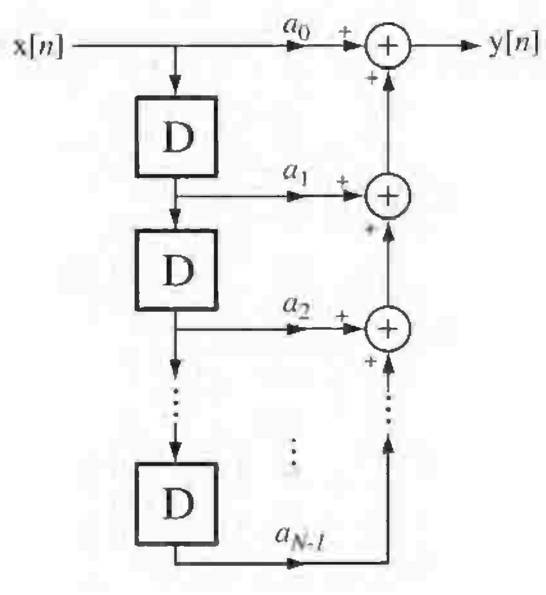
شكل رقم (١٥.٣٥) اقتطاع استجابة صدمة غير سببية لتكوين استجابة صدمة FIR سببية

بالطبع فإن اقتطاع استجابة الـ IIR للحصول على استجابة الـ FIR ستسبب بعض الفروق في استجابات الصدمة والاستجابات الترددية بين المرشح المثالي التماثلي والمرشح الرقمي الحقيقي، ولكن ذلك يكون ضمنياً في تصميم المرشح الرقمي نفسه. لذلك فإن مشكلة تصميم هذا المرشح الرقمي ما زالت مشكلة تقريب، وهذا التقريب يتم بطريقة مختلفة في هذا الطريقة للتصميم.

بمجرد اقتطاع استجابة الصدمة وعينتها، تصبح عملية تصميم الـ FIR عملية سهلة ومباشرة. الصورة المتقطعة من استجابة الصدمة تكون في صورة مجموع محدود من الصدمات المتقطعة زمنياً كما يلي:

$$h_N[n] = \sum_{m=0}^{N-1} a_m \delta[n-m]$$

والتي يمكن بناؤها في صورة مرشح رقمي كما في شكل (١٥.٣٦).



شكل رقم (١٥.٣٦) نموذج مبدئي للمرشح الرقمي FIR

فرق أساسي بين هذا النوع من تصميم المرشحات الرقمية وكل الطرق الأخرى السابقة هي عدم وجود تغذية مرتدة في الاستجابة يتم دمجها مع الإثارة لإنتاج الاستجابة التالية. أي أن هذا المرشح تكون له مسارات تغذية أمامية فقط. دالة العبور لهذا المرشح ستكون:

$$H_d(z) = \sum_{m=0}^{N-1} a_m z^{-m}$$

هذه الدالة لها عدد N-1 من الأقطاب الموضوعة كلها عند الموضع z=0، وتكون مستقرة دائماً بصرف النظر عن المعاملات a.

هذا النوع من التصميم هو تقريب للمرشحات التماثلية بمرشحات رقمية. من الواضح الآن ما هو الفرق بين استجابتي الصدمة، فما هي الفروق في النطاق الترددي ؟ استجابة الصدمة المقتطعة هي :

$$h_N[n] = \begin{Bmatrix} h_d[n], & 0 \le n < N \\ 0, & \text{otherwise} \end{Bmatrix} = h_d[n]w[n]$$

وتحويل DTFT سيكون :

$$H_N(e^{j\Omega}) = H_d(e^{j\Omega}) \circledR W(e^{j\Omega})$$

كما هو مبين في شكل (١٥.٣٧).

مع زيادة طول استجابة الصدمة المقتطعة التي لا تساوي الصفر، فإن الاستجابة الترددية للمرشح الرقمي ستقترب من الشكل المستطيل المثالي. التشابه في الشكل أو المظهر مع التقارب في CTFS ليس مجرد صدفة. CTFS المقتطع يظهر ما يسمى بظاهرة جيب (Gibb) في الإشارة الناتجة. في هذه الحالة، تحدث عملية الاقتطاع في النطاق الزمني المستمر، والتذبذبات التي تكافئ ظاهرة جيب، تحدث في النطاق الترددي. هذه الظاهرة ستسبب تأثيرات تظهر في صورة تذبذبات في مجال المرور وفصوص جانبية كما في شكل (١٧.٣٧). مقدار القيمة العظمى للتذبذبات في مجال المرور لا تتلاشى مع زيادة زمن الاقتطاع ولكنها تقتصر أكثر وأكثر على المنطقة القريبة من تردد القطع.

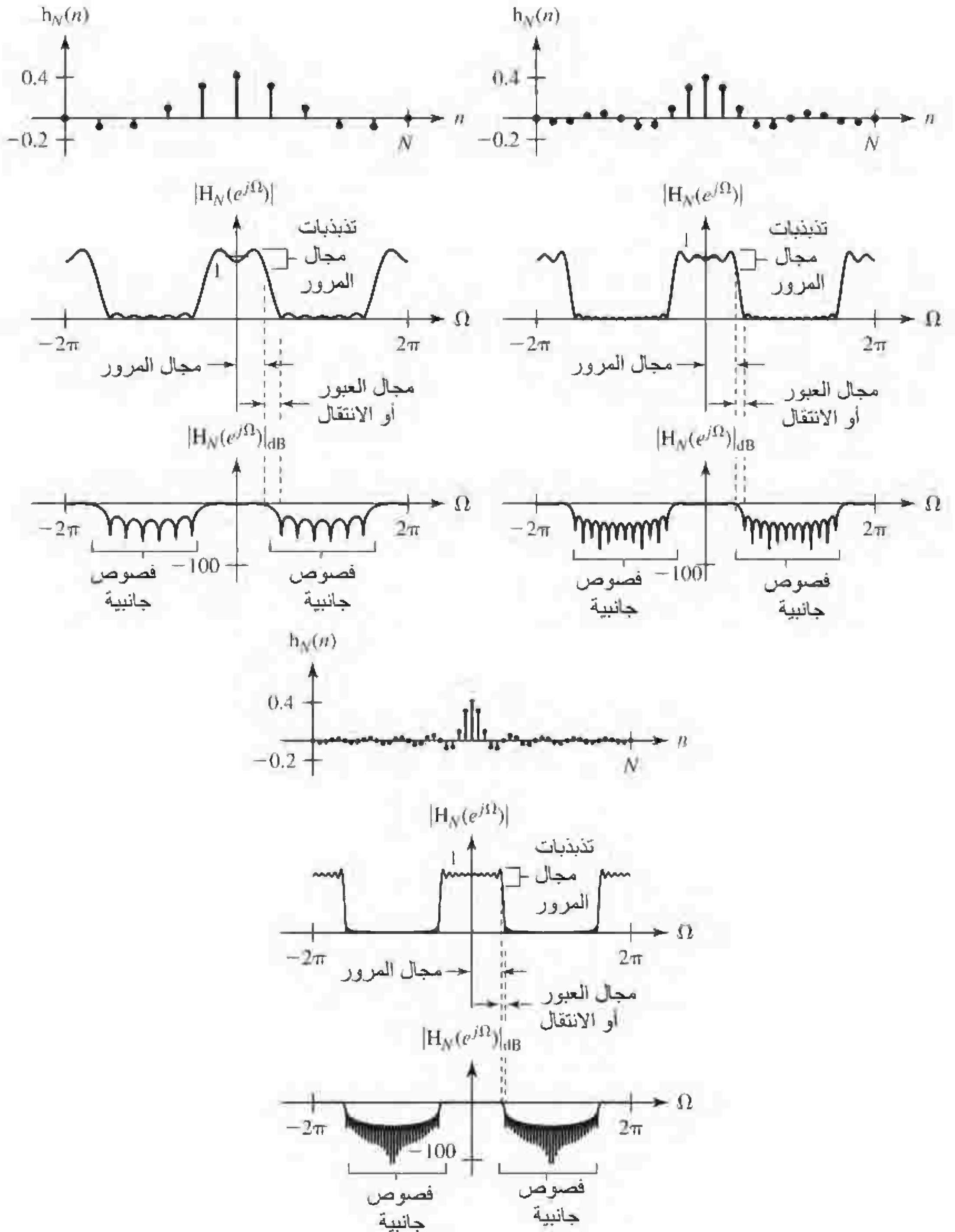
يمكن تقليل التأثيرات التذبذبية في النطاق الترددي، بدون استخدام أزمنة اقتطاع طويلة، عن طريق استخدام عمليات قطع أكثر نعومة في النطاق الزمني. بدلا من أخذ نافذة (نوفذة) ذات دالة مستطيلة من استجابة الصدمة الأصلية يمكن استخدام أشكال نوافذ مختلفة لا تسبب عدم الاتصال الكبير في شكل استجابة الصدمة المقتطعة. هناك العديد من أشكال النوافذ التي لها تحويل فورير يعطي تذبذبات أقل من تحويل فورير للنافذة المستطيلة، ومن هذه النوافذ المشهورة ما يلي :

١- نافذة فون هان أو هاننج (Hanning)

$$w[n] = \frac{1}{2}\left[1 - cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right], 0 \le n < N$$

٢- نافذة بارتليت (Bartlett)

$$w[n] = \begin{cases} \frac{2n}{N-1} & 0 \le n < \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1} & \frac{N-1}{2} \le n < N \end{cases}$$



شكل رقم (١٥.٣٧) ثلاث استجابات صدمة متقطعة زمنياً مستقطعة من مرشح مثالي منفذ للترددات المنخفضة ومقدار الاستجابات الترددية المصاحبة

٣- نافذة هامنج Hamming

$$\omega[n] = 0.54 - 0.46cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), 0 \leq n < N$$

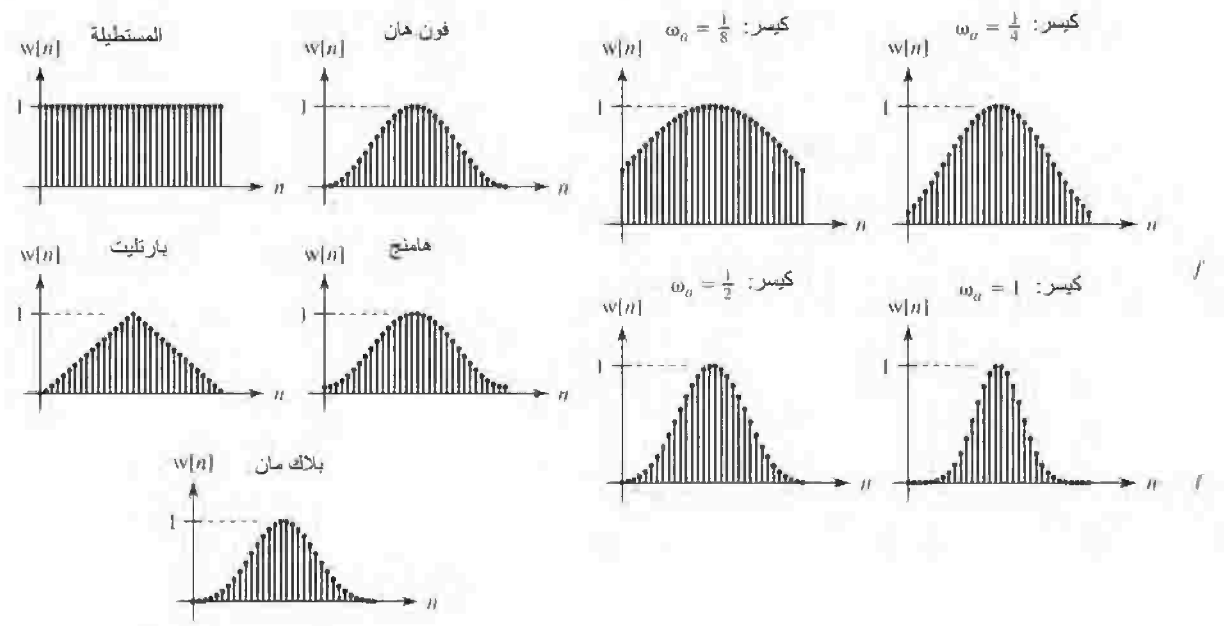
٤- نافذة بلاكمان Blackman

$$w[n] = 0.42 - 0.5cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right), 0 \leq n < N$$

٥- نافذة كيسر Kaiser

$$\omega[n] = \frac{I_0\left(\omega_a\sqrt{\left(\frac{N-1}{2}\right)^2 - \left(n-\frac{N-1}{2}\right)^2}\right)}{I_0\left(\omega_a\frac{N-1}{2}\right)}$$

حيث I_0 دالة بيسيل Bessel المعدلة من الدرجة صفر ومن النوع الأول، و ω_a هي معامل يمكن ضبطه للمقايضة على عرض مجال العبور أو الانتقال ومقدار الفصوص الجانبية كما في شكل (١٥.٣٨).

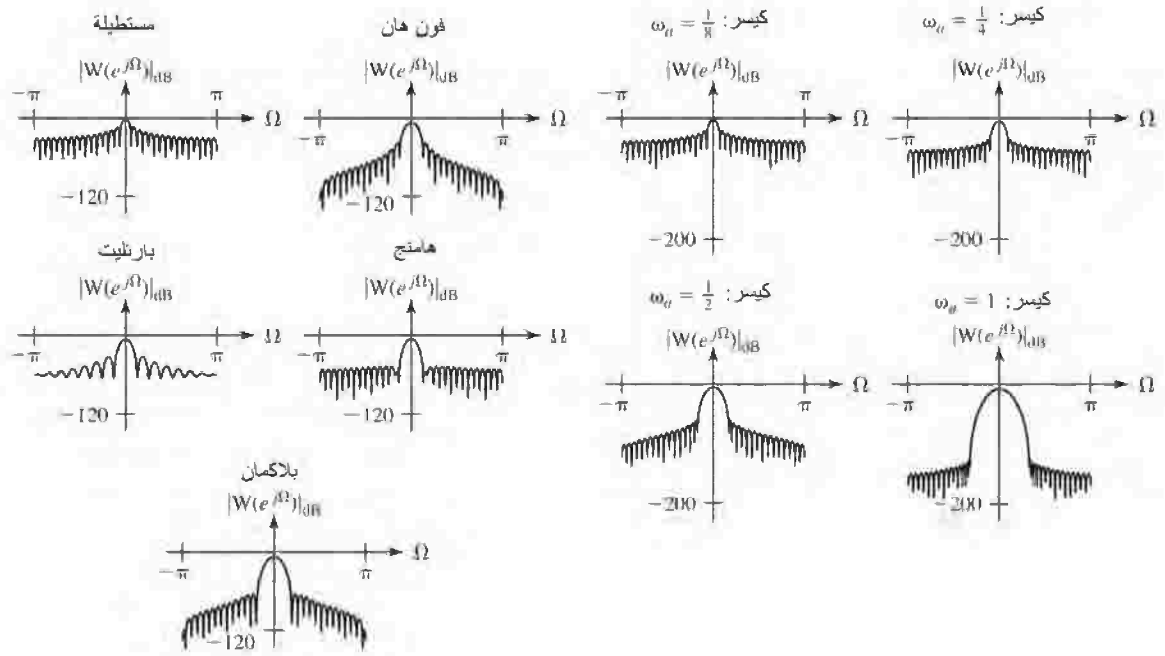


شكل رقم (١٥.٣٨) دوال النوفذة (N=32).

تحويلات هذه الدوال للنوافذ ستحدد كيف ستتأثر الاستجابة الترددية. مقادير التحويلات لهذه النوافذ الشائعة مبينة في شكل (١٥.٣٩).

بالنظر لمقادير هذه التحويلات لدوال النوافذ، يظهر أنه مع ثبات N، فإن اثنين من أهداف التصميم سيتعارضان. عند تقريب مرشح مثالي تماثلي بآخر FIR، فإننا نريد مجال عبور أو مجال انتقال ضيق جداً وأعلى معاوقة أو اضمحلال في مجال الوقف أو الإعاقة. دالة عبور المرشح FIR تساوي عملية الالتفاف بين دالة عبور

المرشح المثالي مع تحويل دالة النافذة. لذلك فإن دالة النافذة المثالية قد يكون لها تحويل يكون عبارة عن صدمة، وبالتالي فإن دالة النافذة المقابلة ستكون مستطيلاً لانهائي العرض، وهذا يكون غير ممكن. إذا استخدمنا مستطيلاً محدد العرض، فإن تحويله هو دالة ديرتشليت Dirichlet وبالتالي فإننا نحصل على التحويل الموضح في شكل (١٥.٣٩) للدالة المستطيلة، الذي يعطي مجال عبور أو انتقال أقل عرضا من قمة الفص المركزي إلى أول صفر له، ولكن بعد ذلك ترتفع دالة السنك sinc مرة ثانية لتعمل قمة تكون حوالي 13dB تحت القيمة العظمى. عند إجراء التفاف لهذه الدالة مع الاستجابة الترددية للمرشح المثالي المنفذ للترددات المنخفضة، فإن مجال العبور أو الانتقال سيكون أضيق (بالمقارنة مع النوافذ الأخرى) ولكن الإعاقة في مجال الوقف لن تكون جيدة جداً. العكس من ذلك يكون مع نافذة بلاكمان. عرض الفص المركزي لمقدار تحويلها يكون أكثر من الضعف بالمقارنة مع الدالة المستطيلة، وبالتالي فإن مجال العبور لن يكون ضيقاً. ولكن بمجرد نزول المقدار، فإنه ينزل إلى أكثر من 60dB. لذلك فإن الإعاقة في مجال الوقف تكون أفضل كثيراً.



شكل رقم (١٥.٣٩) مقدار تحويلات z لدوال النوافذ المشهورة (N=32).

خاصية أخرى مهمة في الـ FIR تجعلها أكثر جاذبية هي أنها يمكن تصميمها لتعطي استجابة طور خطية. الصورة العامة لاستجابة الصدمة للمرشحات FIR هي:

$$h_d[n] = h_d[0]\delta[n] + h_d[1]\delta[n-1] + \cdots + h_d[N-1]\delta[n-(N-1)]$$

تحويل z لهذه الاستجابة هو:

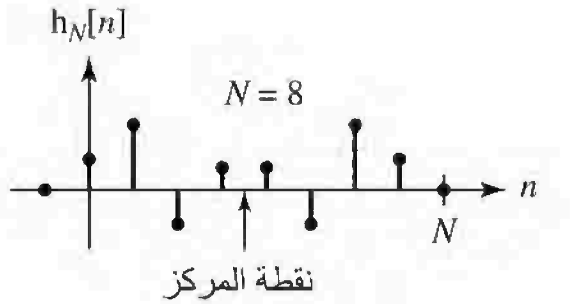
$$H_d(z) = h_d[0] + h_d[1]z^{-1} + \cdots + h_d[N-1]z^{-(N-1)}$$

والاستجابة الترددية المقابلة ستكون:

$$H_d(e^{j\Omega}) = h_d[0] + h_d[1]e^{-j\Omega} + \cdots + h_d[N-1]e^{-j(N-1)\Omega}$$

الطول N من الممكن أن يكون زوجياً أو فردياً. سنفترض أولاً أن N ستكون زوجية وسنفترض معاملاتها يتم اختيارها لتكون على الصورة التالية وكما في شكل (١٥.٤٠):

$$h_d[0] = h_d[N-1], h_d[1] = h_d[N-2], \ldots, h_d[N/2-1] = h_d[N/2]$$



شكل رقم (١٥.٤٠) مثال على استجابة الصدمة المتماثلة عندما N=8

هذا النوع من استجابة الصدمة يكون متماثلاً حول نقطة المركز. وبالتالي يمكن كتابة الاستجابة الترددية كما يلي:

$$H_d(e^{j\Omega}) = \begin{Bmatrix} h_d[0] + h_d[0]e^{-j(N-1)\Omega} + h_d[1]e^{-j\Omega} + h_d[1]e^{-j(N-1)\Omega} + \cdots \\ +h_d[N/2-1]e^{-j(N/2-1)\Omega} + h_d[N/2-1]e^{-jN\Omega/2} \end{Bmatrix}$$

أو:

$$H_d(e^{j\Omega}) = e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\Omega} \begin{Bmatrix} h_d[0]\left(e^{j\left(\frac{N-1}{2}\right)\Omega} + e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\Omega}\right) + h_d[1]\left(e^{j\left(\frac{N-3}{2}\right)\Omega} + e^{-j\left(\frac{N-3}{2}\right)\Omega}\right) + \cdots \\ +h_d[N/2-1](e^{-j\Omega} + e^{j\Omega}) \end{Bmatrix}$$

أو:

$$H_d(e^{j\Omega}) = 2e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\Omega} \begin{Bmatrix} h_d[0]cos\left(\left(\frac{N-1}{2}\right)\Omega\right) + h_d[1]cos\left(\left(\frac{N-3}{2}\right)\Omega\right) + \cdots \\ +h_d[N/2-1]cos(\Omega) \end{Bmatrix}$$

تتكون هذه الاستجابة الترددية من حاصل ضرب المعامل $e^{-j((N-1)/2)\Omega}$ الذي له زاوية طور خطية مع تغير التردد وبعض المعاملات الأخرى، التي لها قيم حقيقية عند جميع الترددات. لذلك فإن الاستجابة الترددية الكلية للطور تكون خطية مع تغير التردد (فيما عدا القفزات بمقدار π عند الترددات التي تتغير عندها إشارة الجزء الحقيقي).

بطريقة مماثلة يمكننا أن نثبت أنه إذا كانت المعاملات عكسية التماثل كما يلي:

$$h_d[0] = h_d[N-1], h_d[1] = h_d[N-2], \ldots, h_d[N/2-1] = -h_d[N/2]$$

فإن زاوية الطور ستكون خطية أيضاً مع التردد. عندما تكون N فردية سنحصل على النتيجة نفسها أيضاً.

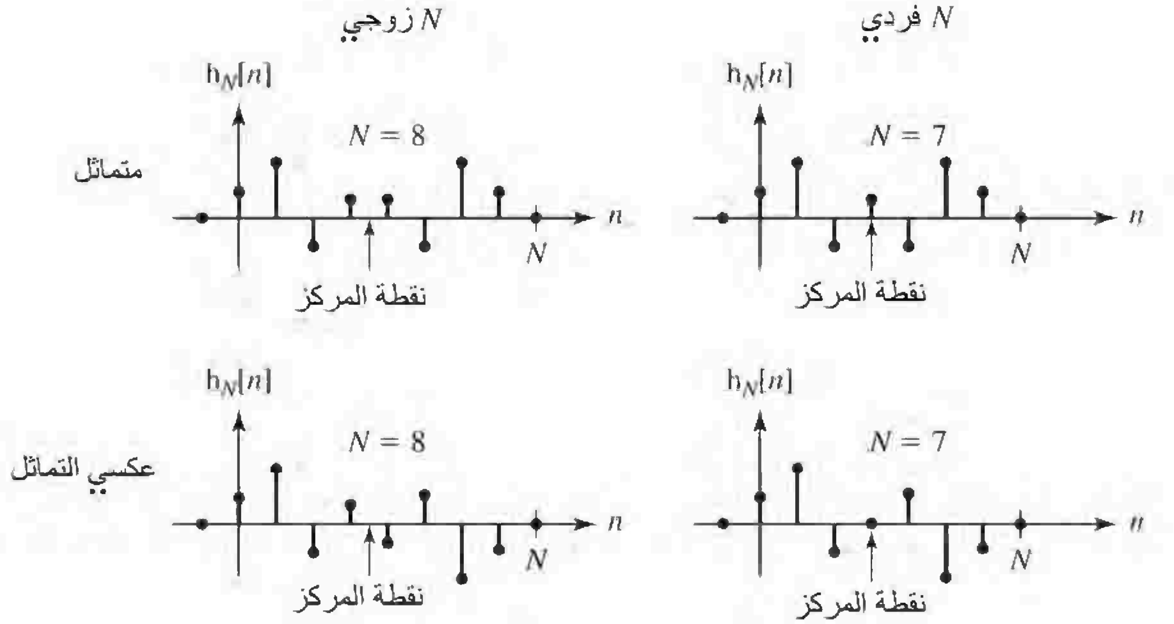
إذا كانت المعاملات متماثلة كما يلي:

$$h_d[0] = h_d[N-1], h_d[1] = h_d[N-2], \dots, h_d\left[\frac{N-3}{2}\right] = h_d\left[\frac{N+1}{2}\right]$$

أو عكسية التماثل كما يلي:

$$h_d[0] = -h_d[N-1], h_d[1] = -h_d[N-2], \dots, h_d\left[\frac{N-3}{2}\right] = -h_d\left[\frac{N+1}{2}\right], h_d\left[\frac{N-1}{2}\right] = 0$$

فإن الاستجابة الطورية ستكون خطية. لاحظ أنه عندما تكون N فردية ستكون هناك نقطة مركزية، وإذا كانت المعاملات عكسية التماثل، فإن المعامل $h_d[(N-1)/2]$ يجب أن يكون صفراً كما في شكل (١٥.٤١).



شكل رقم (١٥.٤١) أمثلة على استجابات الصدمة المتقطعة زمنياً المتماثلة وعكسية التماثل عندما تكون N زوجية أو فردية

مثال ١٥.٩

تصميم مرشح رقمي FIR منفذ للترددات المنخفضة عن طريق اقتطاع استجابة الصدمة المثالية

باستخدام طريقة الـ FIR صمم مرشحاً رقمياً يحاكي المرشح التماثلي ذا القطب الواحد المنفذ للترددات المنخفضة الذي له دالة عبور كما يلي:

$$H_a(s) = \frac{a}{s+a}$$

باقتطاع استجابة الصدمة للمرشح التماثلي حتى ثلاثة ثوابت زمنية ثم نقوم بعينة استجابة الصدمة المقتطعة بزمن بين العينات يساوي ربع الثابت الزمني لتكوين دالة متقطعة زمنياً. بعد ذلك نقسم هذه الدالة المتقطعة زمنياً على a لنكون استجابة الصدمة للمرشح الرقمي:

(أ) أوجد وارسم مقدار الاستجابة الترددية للمرشح الرقمي مع التردد المتقطع زمنياً Ω.

(ب) أعد الجزء (أ) مع زمن اقتطاع يساوي خمسة ثوابت زمنية ومعدل عينة يساوي ١٠ عينات في كل ثابت زمني.

استجابة الصدمة ستكون:

$$h_a(t) = ae^{-at}\, u(t)$$

الثابت الزمني هو 1/a. لذلك فإن زمن الاقتطاع سيكون 3/a، والزمن بين العينات يساوي 1/4a وسيتم أخذ العينات عند الأزمنة المتقطعة 0≤n≤12. بالتالي ستكون استجابة الصدمة للمرشح FIR هي:

$$h_a[n] = ae^{-n/4}\,(u[n] - u[n-12]) = \mathrm{a}\sum_{\mathrm{m=0}}^{11} e^{-m/4}\delta\,[n-m]$$

تحويل z لهذه الدالة هو:

$$H_d(z) = \mathrm{a}\sum_{\mathrm{m=0}}^{11} e^{-m/4} z^{-m}$$

وستكون الاستجابة الترددية كما يلي:

$$H_d(e^{j\Omega}) = \mathrm{a}\sum_{\mathrm{m=0}}^{11} e^{-m/4}(e^{j\Omega})^{-m} = \mathrm{a}\sum_{\mathrm{m=0}}^{11} e^{-m(1/4+j\Omega)}$$

بالنسبة لمعدل العينة الثاني في الجزء (ب)، يكون زمن الاقتطاع يساوي 5/a والزمن بين العينات يساوي 1/10a وسيتم أخذ العينات عند الأزمنة المتقطعة 0≤n≤50. بالتالي ستكون الاستجابة الترددية كما يلي:

$$h_a[n] = ae^{-n/10}\,(u[n] - u[n-50]) = \mathrm{a}\sum_{\mathrm{m=0}}^{49} e^{-m/4}\delta\,[n-m]$$

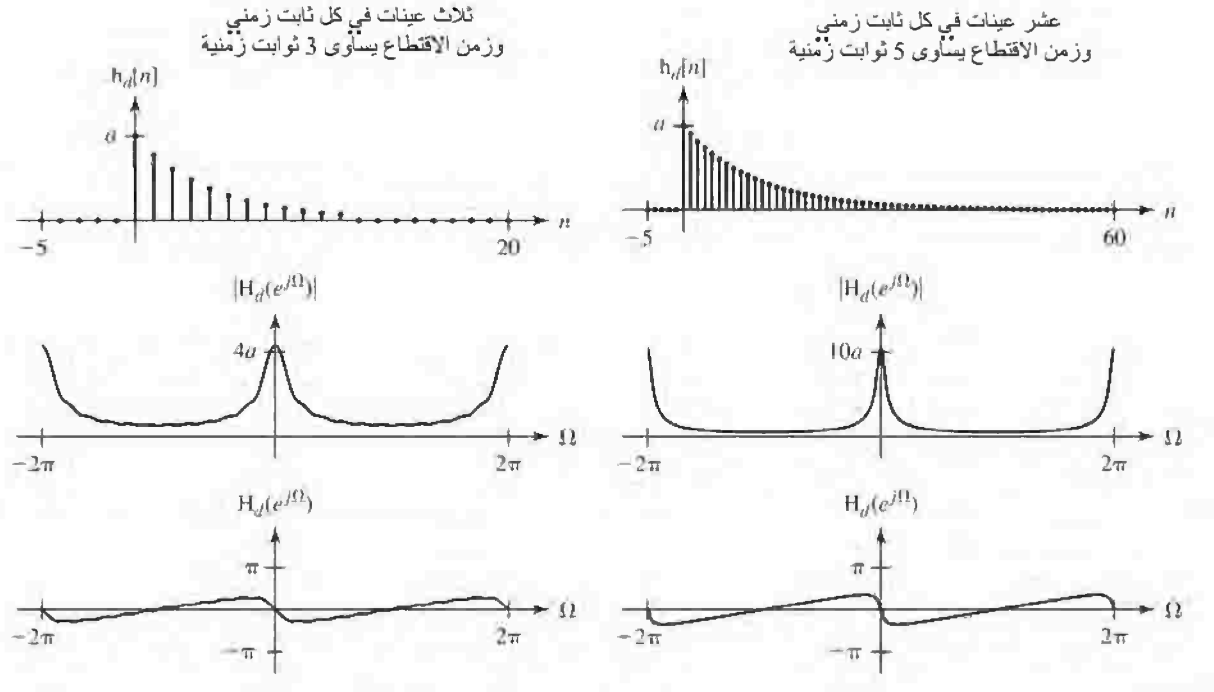
وتحويل z لهذه الاستجابة سيكون:

$$H_d(z) = \mathrm{a}\sum_{\mathrm{m=0}}^{49} e^{-m/10} z^{-m}$$

وستكون الاستجابة الترددية كما يلي:

$$H_d(e^{j\Omega}) = \mathrm{a}\sum_{\mathrm{m=0}}^{49} e^{-m/10}(e^{j\Omega})^{-m} = \mathrm{a}\sum_{\mathrm{m=0}}^{49} e^{-m(1/10+j\Omega)}$$

انظر شكل (١٥.٤٢).



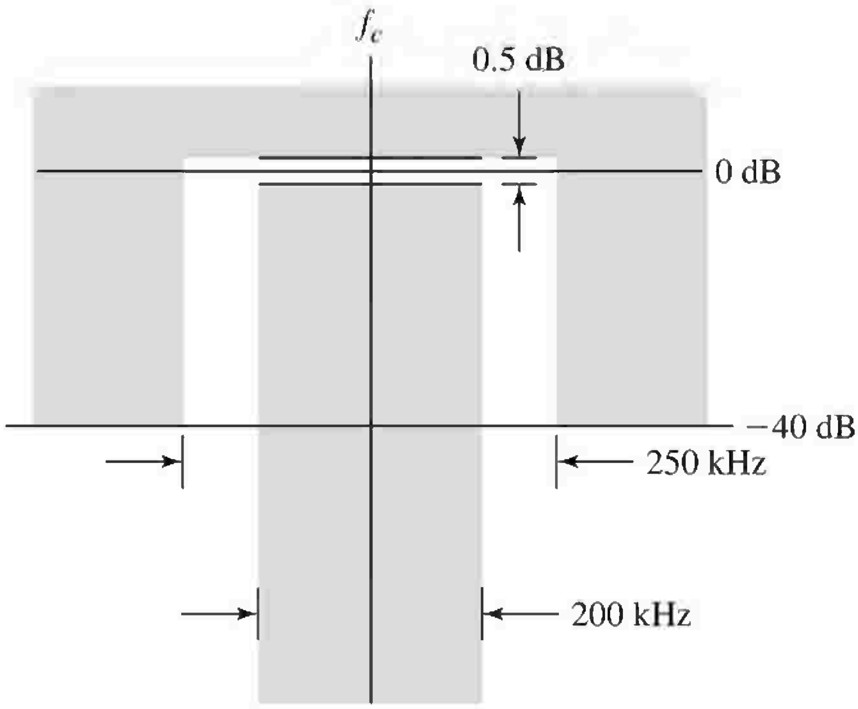
شكل رقم (١٥.٤٢) استجابات الصدمة والاستجابات الترددية لتصميمي FIR

تأثيرات الاقتطاع من الاستجابة الترددية تكون واضحة في صورة تذبذبات في الاستجابة الترددية لتصميم FIR عندما يكون معدل العينة قليلاً وزمن الاقتطاع أقصر.

مثال ١٥.١٠

تصميم مرشح رقمي لقناة اتصال

مدى الترددات بين 900 و 905MHz يتم تقسيمه إلى 20 قناة متساوية العرض يتم فيها إرسال الإشارات اللاسلكية. لكي يتم الإرسال في واحدة من هذه القنوات، يجب على المرسل أن يرسل إشارة يكون مقدار طيفها ينطبق داخل الحدود في شكل (١٥.٤٣). يقوم جهاز الإرسال بتعديل موجة حاملة جيبية يكون ترددها هو التردد المركزي لإحدى هذه القنوات، مستخدماً إشارة مجال القاعدة. قبل تعديل الموجة الحاملة يتم ترشيح إشارة مجال القاعدة التي يكون لها طيف مسطح تقريباً باستخدام مرشح FIR يكون دوره هو التأكد من أن الإشارة المرسلة تقابل الشروط الموجودة في شكل (١٥.٤٣). بفرض أن معدل العينة هو 2MHz صمم هذا المرشح.



شكل رقم (١٥.٤٣) مواصفات طيف الإشارة المرسلة

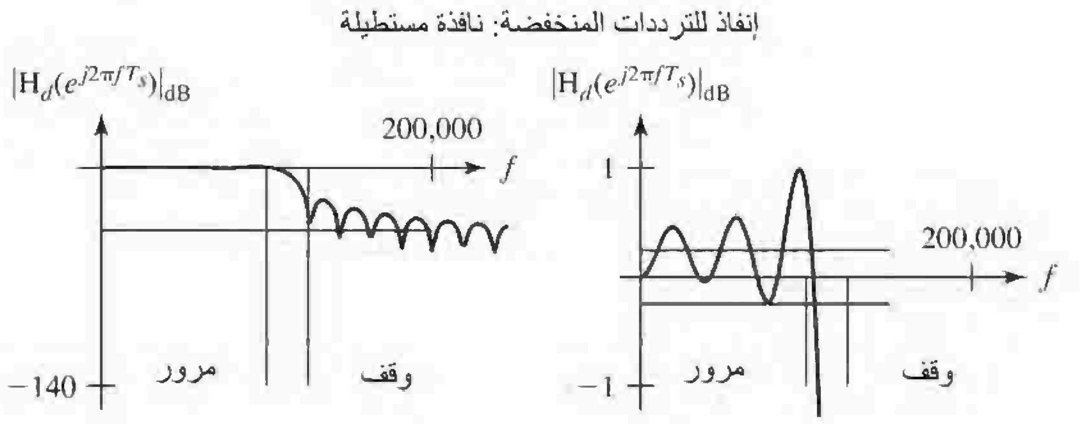
نحن نعرف أن شكل استجابة الصدمة للمرشح التماثلي المثالي لإشارة مجال القاعدة المنفذ للترددات المنخفضة سيكون:

$$h_a(a) = 2Af_m sinc(2f_m(t - t_0))$$

حيث f_m هي التردد الركني. استجابة الصدمة المعيننة ستكون:

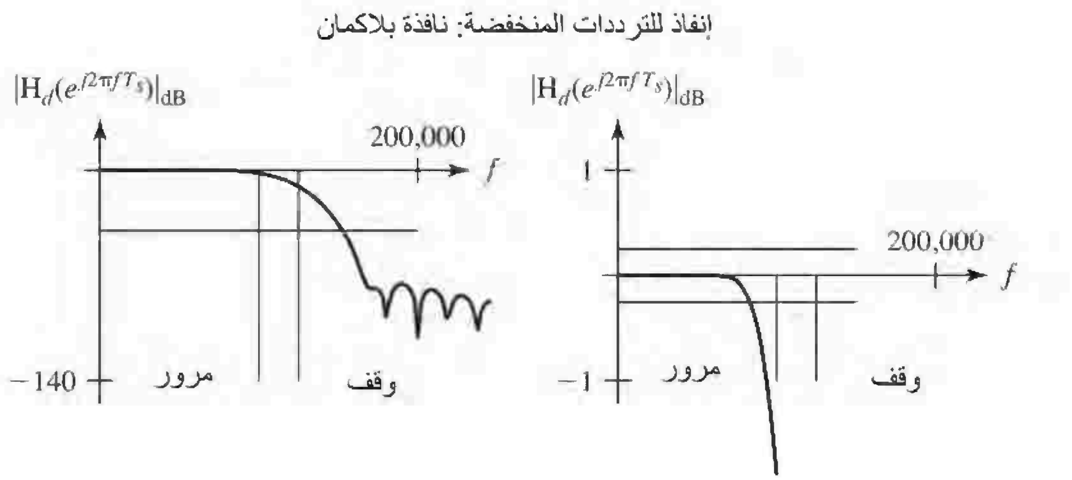
$$h_d[n] = 2Af_m sinc(2f_m(nT_s - t_0))$$

يمكننا وضع التردد الركني للمرشح المثالي المنفذ للترددات المنخفضة عند حوالي نصف المسافة بين 100kHz و 125kHz ولنفترض أنه 115kHz أو 5.75% من معدل العينة. سنفترض معامل التكبير يساوي A يساوي واحداً. الزمن بين العينات يساوي 0.5µs. سيقترب المرشح من المثالية مع اقتراب طوله من المالانهاية. كمحاولة أولى سنفترض أن متوسط مربع الفرق بين استجابة الصدمة للمرشح واستجابة الصدمة للمرشح المثالي يكون أقل من 1% مع استخدام نافذة مستطيلة. يمكننا أن نحدد تكرارياً كم سيكون طول المرشح عن طريق حساب متوسط مربع الفرق بين المرشح ومرشح بطول كبير جداً. بدفع متوسط مربع الخطأ الأقل من 1% سيجعل طول المرشح يساوي 108 أو أكثر. هذا التصميم يعطي الاستجابات الترددية التي في شكل (١٥.٤٤).



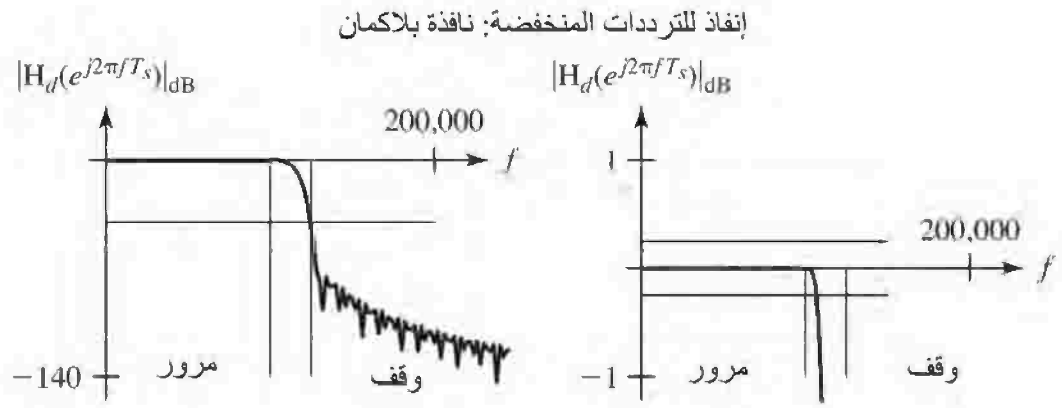
شكل رقم (١٥.٤٤) الاستجابة الترددية لمرشح FIR بنافذة مستطيلة وخطأ أقل من 1%
في استجابة الصدمة

هذا التصميم ليس بالجودة الكافية. التذبذبات في مجال المرور كبيرة والقمع في مجال الوقف ليس كبيراً بما فيه الكفاية. يمكننا تقليل التذبذبات باستخدام نافذة مختلفة. دعنا نحاول مع نافذة بلاكمان مع الاحتفاظ بالمعاملات نفسه الأخرى كما في شكل (١٥.٤٥).



شكل رقم (١٥.٤٥) الاستجابة الترددية للمرشح FIR مع نافذة بلاكمان وخطأ أقل من 1%
من استجابة الصدمة

هذا التصميم ما زال أيضاً غير مناسب. نحتاج لجعل متوسط مربع الخطأ أقل من ذلك. بجعل متوسط مربع الخطأ أقل من 25% سيجعل طول المرشح 210 وسيعطي مقدار استجابة ترددية كما في شكل (١٥.٤٦).



الشكل رقم (١٥.٤٦) الاستجابة الترددية للمرشح FIR مع نافذة بلاكمان وخطأ أقل من 25% من استجابة الصدمة.

هذا المرشح يفي بالشروط المطلوبة. القمع في مجال الوقف يحقق المطلوب تقريباً وأيضاً التذبذبات تقابل المواصفات المطلوبة بسهولة. مثل هذا التصميم لا يكون فريداً على الإطلاق. العديد من التصميمات الأخرى التي لها ترددات ركنية مختلفة قليلاً ومتوسط مربع خطأ أو نوافذ مختلفة من الممكن أن تحقق أيضاً هذه المواصفات نفسها.

التصميم الأمثل للمرشح FIR: هناك طريقة لتصميم المرشحات بدون استخدام نوفذة استجابات الصدمة أو تقريب التصميمات القياسية للمرشحات التماثلية. هذه الطريقة تسمى طريقة باركس مكليلان للتصميم الأمثل المتساوي التذبذبات وتم تقديمها عن طريق **Thomas W. Parks** توماس باركس و **James H. McClellan** جيمز مكليلان في بداية السبعينيات. إنها تستخدم خواريزم تم اكتشافه عام 1934 إفجيني رامز. شرح هذه الطريقة خارج الهدف من هذا الكتاب ولكنها على درجة من الأهمية بحيث يجب أن يهتم بها الطلاب وأن يكونوا قادرين على استخدامها في تصميم المرشحات الرقمية.

طريقة باركس مكليلان لتصميم المرشحات الرقمية تم تنفيذها في ماتلاب من خلال الأمر firpm التي صورتها العامة هي:

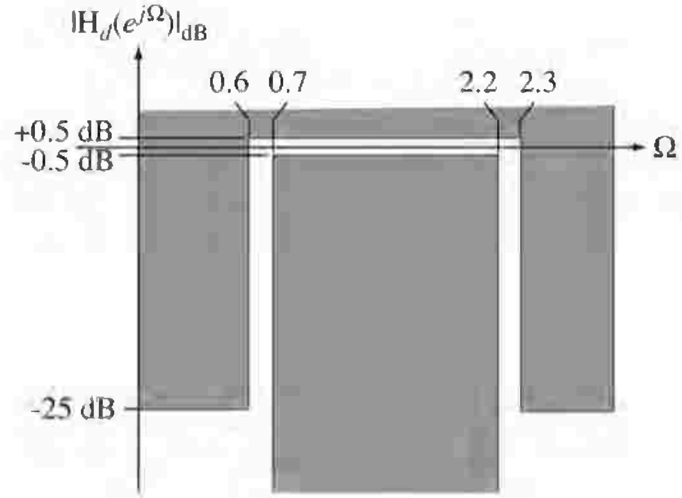
B=firpm(N, F, A)

حيث B هي متجه من N+1 من المعاملات الحقيقية المتماثلة في استجابة الصدمة للمرشح FIR وهي تعطي أفضل تقريب لأي استجابة ترددية مطلوبة وموصوفة بـ F و A. F هي متجه حواف المجال الترددي كأزواج، في ترتيب تصاعدي بين 0 و 1 حيث الـ 1 يقابل تردد نيكويست أو نصف تردد العينة. على الأقل واحد من المجالات الترددية يجب أن يكون لها عرض لا يساوي الصفر. A متجه حقيقي له الحجم نفسه مثل F والذي يحدد المقدار المطلوب للاستجابة الترددية للمرشح الناتج B. الاستجابة المطلوبة تكون هي الخط الموصل للنقط ((F(k), A(k)) و (F(k+1), A(k+1)) لقيم الـ k الفردية. الأمر firpm يعامل المجالات بين F(k+1) و F(k+2) لقيم k الفردية كمجالات انتقالية. لذلك، فإن المقدار المطلوب يكون خطياً متقطع مع المجالات الانتقالية.

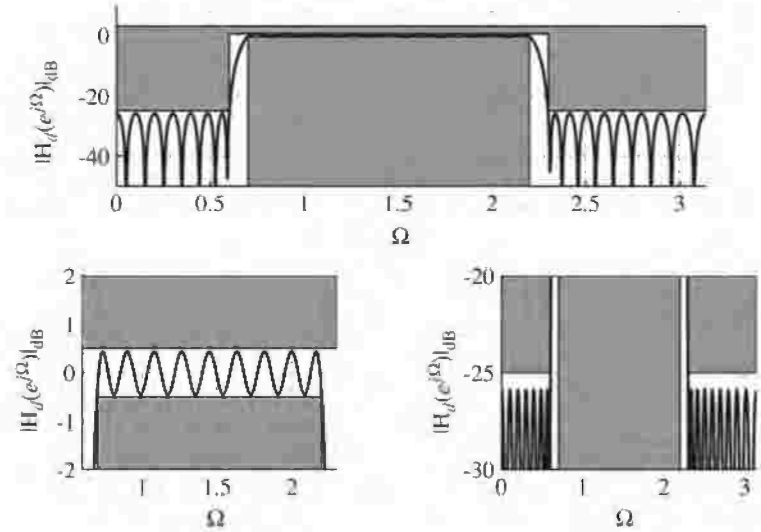
هذا الوصف يخدم فقط كمقدمة لهذه الطريقة. يمكن أن تجد تفاصيل أكثر في وصف المساعدة الموجودة في ماتلاب.

مثال ١٥.١١

تصميم مرشح رقمي منفذ لمجال من الترددات باستخدام طريقة مكليلان



شكل رقم (١٥.٤٧) مواصفات المرشح المنفذ لمجال من الترددات



شكل رقم (١٥.٤٨) الاستجابة الترددية لمرشح FIR مثالي متساوي الذبذبات منفذ لمجال من الترددات له N=70

حواف المجالات تكون عند $\Omega=\{0, 0.6, 0.7, 2.2, 2.3, \pi\}$ وقدار الاستجابة عند هذه الحواف المجالية $A=\{0, 0, 1, 1, 0, 0\}$. لذلك فالمتجه F يجب أن يكون:

$$F=\Omega/\pi=\{0, 0.19, 0.2228, 0.7003, 0.7321, 1\}$$

بعد الاختيارات البسيطة للـ N، فقد وجد أن المرشح الذي له N=70 يقابل المواصفات المطلوبة، كما في شكل (١٥.٤٨).

أدوات تصميمية في ماتلاب

بالإضافة لخواص ماتلاب التي ذكرت في فصول سابقة وفي أجزاء سابقة من هذا الفصل، فهناك العديد من الأوامر الأخرى والدوال في ماتلاب التي يمكنها أن تساعد في تصميم المرشحات الرقمية.

ربما تكون أكثر هذه الدوال فائدة هي الدالة filter. هذه دالة تقوم بالترشيح الرقمي الحقيقي لمتجه من البيانات يمثل مقطعاً زمنياً محدداً من إشارة متقطعة زمنياً. الصورة العامة لهذه الدالة هي:

y=filter(bd, ad, x)

حيث x هي متجه البيانات المطلوب ترشيحها و bd و ad يمثلان متجهي معاملات في معادلة المرشح التي ستكون على الصورة التالية:

$$ad(1) * y(n) = bd(1) * x(n) + bd(2) * x(n-1) + \cdots + bd(nb+1) * x(n-nb) - ad(2) * y(n-1) - \cdots - ad(na+1) * y(n-na)$$

(هذه المعادلة مكتوبة في الصورة المستخدمة في ماتلاب الذي يستخدم الأقواس (.) للدلالة على معاملات كل الدوال بدون التمييز بين الدوال المستمرة أو المتقطعة زمنياً). دالة متعلقة بهذه الدالة السابقة هي الدالة filtfilt. إنها تعمل بطريقة الدالة نفسها filter تماماً فيما عدا أنها تقوم بترشيح متجه البيانات بالطريقة العادية المعروفة ثم بعد ذلك تقوم بترشيح متجه البيانات الناتج بطريقة عكسية. إن ذلك يجعل الإزاحة الطورية الناتجة عن عملية الترشيح الكلية تساوي صفراً تماماً عند جميع الترددات وتضاعف المقدار بالديسبل.

هناك أربع دوال أخرى متعلقة بالموضوع، وكل منها تصمم مرشحاً رقمياً. الدالة butter تصمم مرشح رقمي بتروورث من الدرجة N منفذاً للترددات المنخفضة من خلال الصورة العامة لها وهي:

[bd, ad]=butter[N, wn]

حيث N هي درجة المرشح، و wn هي التردد الركني يتم التعبير عنها كنسبة أو كسر من معدل العينة (وليست معدل العينة نفسه). هذه الدالة تعطي متجهي المعاملات bd و ad التي يمكن استخدامها مباشرة مع الدالة filter أو الدالة filtfilt لترشيح أي متجه من البيانات. يمكن استخدام هذه الدالة أيضاً لتصميم مرشح رقمي بتروورث منفذاً لمجال من الترددات عن طريق وضع ωn عبارة عن متجه صف يحتوي الترددين الركنيين للمرشح على الصورة [ω1, ω2]. مجال المرور للمرشح سيكون بالتالي ω1<ω<ω2 وبالطريقة نفسها ستكون نسبة من معدل العينة. يمكن إضافة العبارة 'high' أو 'stop' لتصميم مرشح منفذ للترددات العالية أو معوق لمجال من الترددات.

أمثلة

[bd, ad]=butter[3, 0.1]	مرشح بتروث من الدرجة الثالثة تردده الركني عند $0.5f_s$
[bd, ad]=butter[4, [0.1 0.2]]	مرشح بتروث من الدرجة الرابعة منفذ لمجال من الترددات والترددات الركنية عند $0.05f_s$ و $0.1f_s$
[bd, ad]=butter[4, 0.02, 'high']	مرشح بتروث من الدارجة الرابعة منفذ للترددات المرتفعة وتردده الركني عند $0.1f_s$
[bd, ad]=butter[2,[0.32 0.34], 'stop']	مرشح بتروث من الدرجة الثانية معوق لمجال من الترددات ترددات الركنية عند $0.16f_s$ و $0.17f_s$

(هناك أيضاً صور بديلة للدالة butter يمكنك مراجعتها بكتابة help butter حيث يمكن استخدامها أيضاً لتصميم المرشحات التماثلية).

الثلاث دوال الأخرى هي الدوال cheby1، و cheby2، و ellip وهذه الدوال تصمم مرشحات من النوع شيبيشيف والبيضاوي. المرشحات شيبيشيف والبيضاوية تتميز بمجال انتقال أضيق من المرشحات البترورث التي لها الدرجة نفسها ولكن ذلك يتم على حساب التذبذبات في مجال المرور أو مجال الوقف. الصورة العامة لهذه الدوال تشبه تماما الدالة butter فيما عدا أنه يتم ذكر أعلى قيمة مسموحة للتذبذبات في مجالات المرور أو الوقف.

هناك العديد من دوال النوافذ المثالية التي يمكن استخدامها مع المرشحات FIR. هذه الدوال هي Bartlett، و blackman، و boxcar وهي المستطيلة، و chebwin نافذة شيبيشيف، و hamming، و hanning، و kaiser، و triang وهي تشبه ولكنها ليست مساوية للنافذة بارتليت.

الدالة freqz تعطي الاستجابة الترددية لمرشح رقمي بطريقة مشابهة للدالة freqs للمرشحات التماثلية. الصورة العامة لهذه الدالة هي:

[H, ω]=freqz(bd, ad, N] ;

حيث H هي الاستجابة الترددية المركبة للمرشح، و W هي متجه للترددات المتقطعة زمنياً بالراديان (ليس راديان على الثانية لأنها تردد متقطع زمنياً) التي يتم حساب H عندها، و bd و sd هي متجهات معاملات البسط والمقام لدالة عبور المرشح الرقمي و N هي عدد النقاط.

الدالة upfirdn تغير معدل العينة لأي إشارة برفع المعدل upsampling ثم الترشيح FIR ثم تخفيض معدل العينة downsampling. الصورة العامة لهذه الدالة هي:

y=upfirdn(x,h,p,q) ;

حيث y هي الإشارة الناتجة من تغيير معدل العينة، و x هي الإشارة المطلوب تغيير معدل العينة لها، و h هي استجابة الصدمة للمرشح FIR، و p هي معامل رفع معدل العينة عن طريق إدخال أصفار في الإشارة قبل الترشيح، و q هي معامل تخفيض معدل العينة للإشارة بعد عملية الترشيح.

هذه ليست كل قدرات ماتلاب على معالجة الإشارات الرقمية. اكتب help signal لترى دوال أخرى.

مثال ١٥.١٢

ترشيح نبضة متقطعة زمنياً باستخدام مرشح بتر ورث منفذ للترددات المرتفعة في ماتلاب

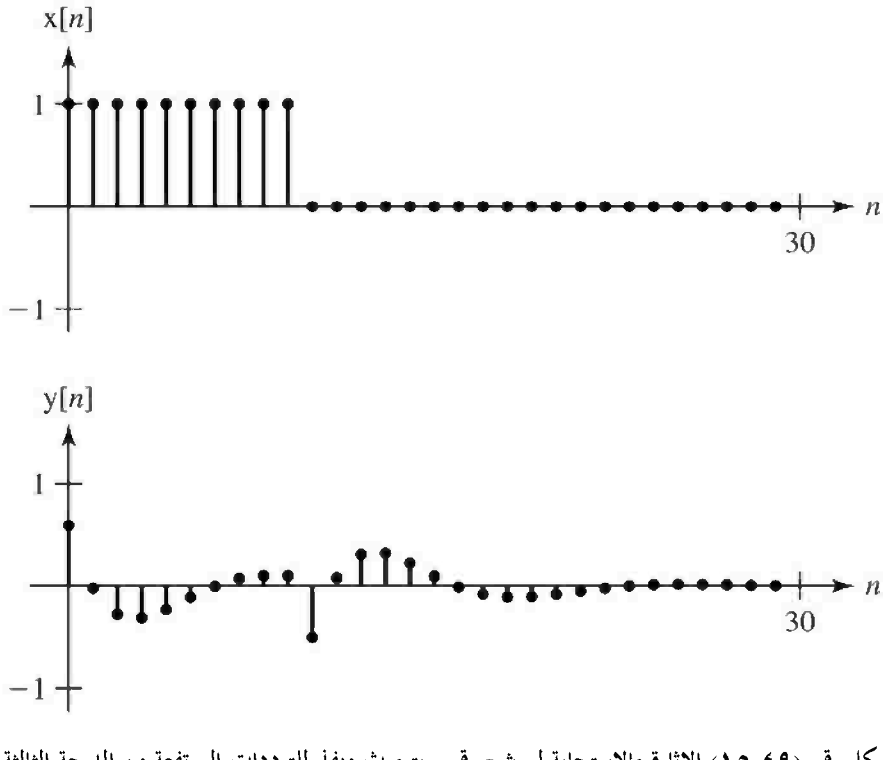
رشح رقميا الإشارة التالية المتقطعة زمنياً :

x[n]=u[n]-u[n-10]

باستخدام مرشح رقمي بتر ورث من الدرجة الثالثة منفذ للترددات المرتفعة تردده الركني المتقطع زمنياً هو π/6 راديان.

```
% استخدام ٣٠ نقطة لتمثيل الإثارة والاستجابة
N = 30 ;
% توليد إشارة الإثارة
n = 0:N-1 ; x = uDT(n) - uDT(n-10) ;
% تصميم مرشح رقمي بترورث من الدرجة الثالثة منفذ للترددات المرتفعة
[bd,ad] = butter(3,1/6,'high') ;
% ترشيح الإشارة
y = filter(bd,ad,x) ;
```

شكل (١٥.٤٩) يبين كل من الإثارة والاستجابة لهذا المرشح.



شكل رقم (١٥.٤٩) الإثارة والاستجابة لمرشح رقمي بترورث منفذ للترددات المرتفعة من الدرجة الثالثة

(١٥.٤) ملخص للنقاط المهمة

١- المرشح بترورث مسطح تماماً في كل من مجالي المرور والوقف وكل أقطابه تقع على نصف دائرة في النصف الأيسر من المستوى s.

٢- يمكن تحويل مرشح بترورث منفذ للترددات المنخفضة إلى آخر منفذ للترددات المرتفعة، أو منفذ لمجال من الترددات أو معوق لمجال من الترددات عن طريق التغيير المناسب في معاملات المرشح.

٣- المرشحات شيبيشيف، والبيضاوية والبيسيل كلها مرشحات تمت أمثلتها على أساس مختلف عن المرشح بترورث. يمكن تصميمها أيضاً لتكون منفذة للترددات المنخفضة، ثم بعد ذلك يمكن تحويلها إلى أخرى منفذة للترددات العالية أو منفذة أو معوقة لمجال من الترددات.

٤- أحد الطرق الشهيرة لتصميم المرشحات الرقمية هي محاكاة التصميمات المعروفة للمرشحات التماثلية.

٥- هناك فصيلان أساسيان من المرشحات الرقمية وهما المرشحات ذات استجابة الصدمة اللانهائية IIR والمرشحات ذات استجابة الصدمة المحددة FIR.

٦- أشهر طرق تصميم المرشحات الرقمية IIR هي طريقة ثبات الصدمة، وثبات الخطوة، والتعويض المباشر، وتحويل z المتوافق، والطريقة ثنائية الخطية.

٧- المرشحات FIR يمكن تصميمها عن طريق نوفذة استجابة صدمة مثالية أو عن طريق خواريزم مكليلان المتساوي التذبذبات.

تمارين مع إجاباتها

(في كل تمرين تكون الإجابات مرتبة عشوائياً)

المرشحات بترورث المستمرة زمنياً

١- باستخدام الآلة الحاسبة، أوجد دالة العبور لمرشح بترورث منفذ للترددات المنخفضة من الدرجة الثالثة (n=3) وتردده الركني هو $w_c=1$ ومعامل تكبير يساوي واحداً عند التردد صفر؟

الإجابة:

$$\frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

٢- باستخدام ماتلاب أوجد دالة العبور لمرشح بترورث منفذ للترددات المنخفضة من الدرجة الثامنة تردده الركني عند $w_c=1$ ومعامل تكبيره يساوي واحداً عند التردد صفر؟

الإجابة:

$$\frac{1}{s^8+5.126s^7+13.1371s^6+21.8462s^5+25.6884s^4+21.8462s^3+13.1371s^2+5.126s+1}$$

٣- أوجد دالة العبور لكل من المرشحات بترورث التالية:

(أ) من الدرجة الثانية منفذ للترددات المرتفعة تردده الركني 20kHz ومعامل تكبيره في مجال المرور يساوي 5.

(ب) من الدرجة الثالثة منفذ لمجال من الترددات وتردداته الركنية هي 4750Hz و 5250Hz ومعامل تكبير مجال المرور يساوي واحداً.

(ت) من الدرجة الرابعة معوق لمجال من الترددات وتردداته الركنية هي 9.975MHz و 10.025MHz ومعامل تكبير مجال المرور يساوي واحداً.

الإجابة:

$$\frac{3.1\times10^{4}s^{3}}{s^{6}+6283s^{5}+2.97\times10^{9}s^{4}+1.24\times10^{13}s^{3}+2.93\times10^{18}s^{2}+6.09\times10^{21}s+9.542\times10^{26}}$$

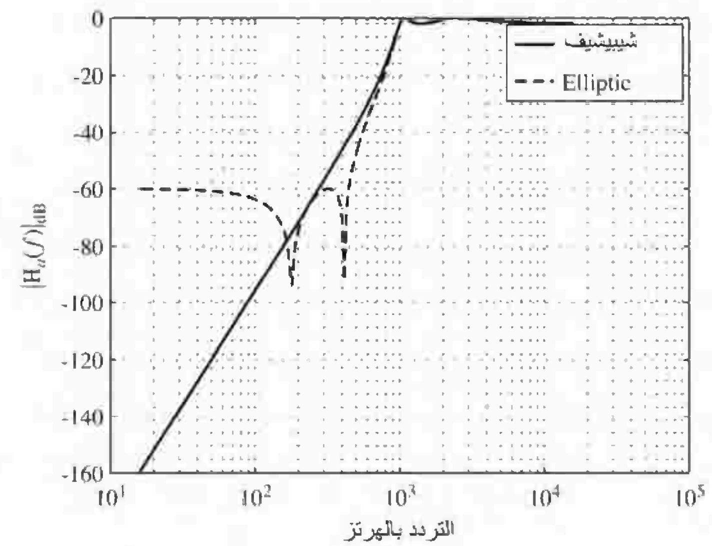
$$\frac{s^{8}+1.57\times10^{16}s^{6}+9.243\times10^{31}s^{4}+2.418\times10^{47}s^{2}+2.373\times10^{62}}{\begin{bmatrix} s^{8}+8.205\times10^{5}s^{7}+1.57\times10^{16}s^{6}+9.665\times10^{21}s^{5}+9.24\times10^{31}s^{4}+ \\ 3.729\times10^{37}s^{3}+2.419\times10^{47}s^{2}+5.256\times10^{52}s+2.373\times10^{62} \end{bmatrix}}$$

$$\frac{5s^{2}}{s^{2}+1.777\times10^{5}s+1.579\times10^{10}}$$

٤- باستخدام ماتلاب صمم مرشح شيبيشيف نوع 1، وآخر بيضاوياً من الدرجة الرابعة منفذاً للترددات المرتفعة وتردد قطع يساوي 1kHz. افترض أن التذبذبات المسموحة في مجال المرور تساوي 2dB وافترض أن أقل إعاقة في مجال الوقف تساوي 60dB. ارسم مخطط بود للمقدار للاستجابات الترددية لهما على التدريج نفسه للمقارنة. ما هو عرض مجال الانتقال لكل مرشح ؟

الإجابة:

مرشح شيبيشيف نوع ١ : 726Hz ، والبيضاوي : 555Hz



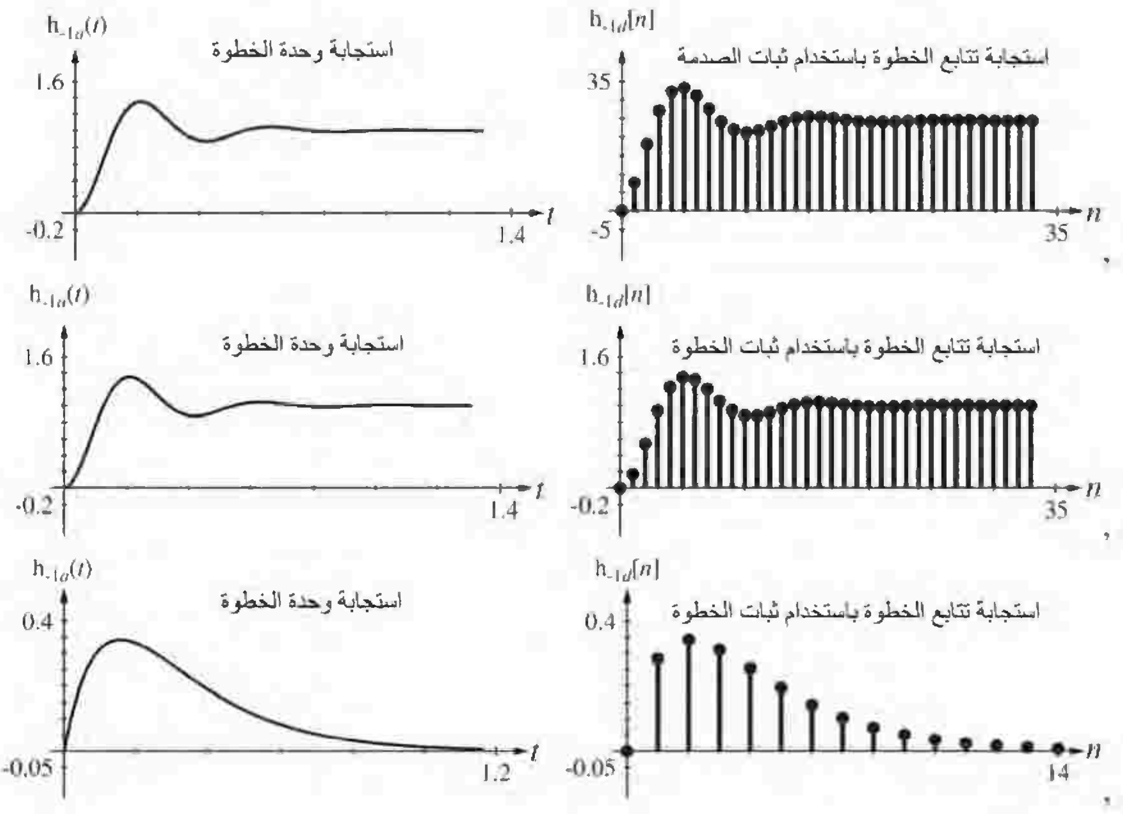
شكل رقم (ج-ت٤)

تصميم المرشحات بثبات الصدمة وثبات الخطوة

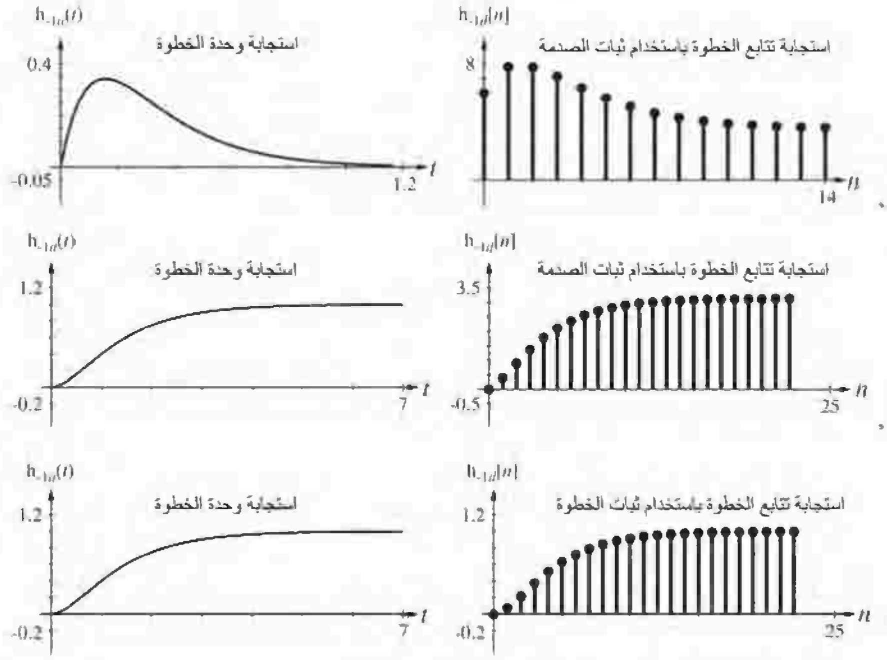
٥- باستخدام طرق تصميم ثبات الصدمة وثبات الخطوة، صمِّمْ مرشحات رقمية تحاكي المرشحات التماثلية التي لها دوال العبور التالية. في كل حالة اختره معدل العينة يكون ١٠ مرات مقدار المسافة بين أبعد قطب أو صفراً من نقطة الأصل في المستوى s. قارن عن طريق الرسم بين استجابات الخطوة للمرشح الرقمي والتماثلي.

(أ) $H_a(s) = \frac{2}{s^2+3s+2}$ (ب) $H_a(s) = \frac{6s}{s^2+13s+40}$

(ت) $H_a(s) = \frac{250}{s^2+10s+250}$



شكل رقم (ج-ت-٥أ)



شكل رقم (ج–ت–٥ب)

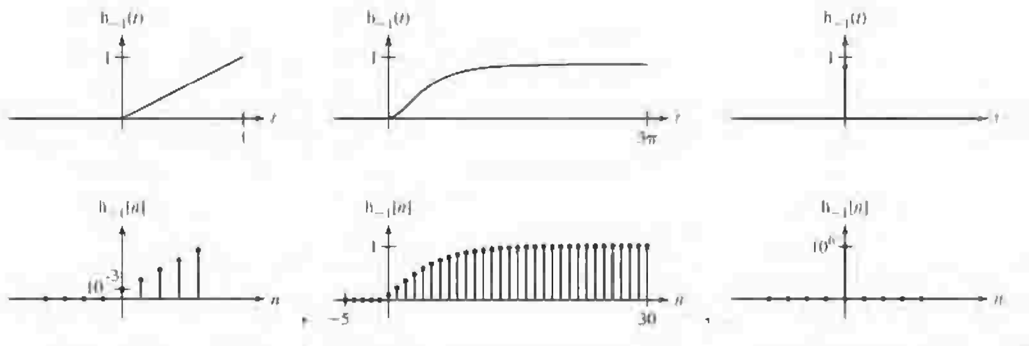
تصميم المرشحات بالفروق المحددة

٦- باستخدام طريقة الفروق المحددة وكلها فروق عكسية، صمم مرشحات رقمية تحاكي المرشحات التماثلية التي لها دوال العبور التالية. في كل حالة إذا لم يتم ذكر تردد العينة، اختر معدل عينة يكون ١٠ مرات مقدار المسافة بين أبعد قطب أو صفراً من نقطة الأصل في المستوى s. قارن بالرسم بين استجابات الخطوة للمرشح الرقمي والتماثلي.

(أ) $H_a(s) = s,\ f_s = 1\text{MHz}$ (ب) $H_a(s) = 1/s,\ f_s = 1\text{kHz}$

(ت) $H_a(s) = \frac{2}{s^2+3s+2}$

الإجابة:



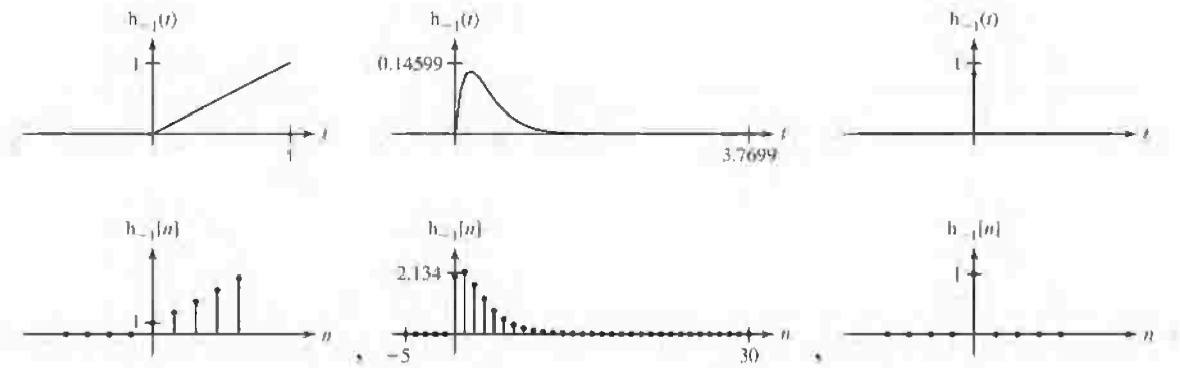
شكل رقم (ج–ت–٦)

تصميم المرشحات بطريقة تحويل z المتوافق وطريقة التعويض المباشر

٧- باستخدام طريقتي تحويل z المتوافق والتعويض المباشر، صمم مرشحات رقمية تحاكي المرشحات التماثلية التي لها دوال العبور التالية. في كل حالة اختر معدل العينة يكون ١٠ مرات مقدار المسافة بين أبعد قطب أو صفراً من نقطة الأصل في المستوى s (إلا إذا كانت كل الأقطاب أو الأصفار عند نقطة الأصل وفي هذه الحالة، فإن معدل العينة لن يكون مهماً في هذه الطريقة). قارن عن طريق الرسم بين استجابات الخطوة للمرشح الرقمي والتماثلي.

(أ) $H_a(s) = s$ (ب) $H_a(s) = 1/s$ (ت) $H_a(s) = \frac{2s}{s^2+10s+25}$

الإجابة:



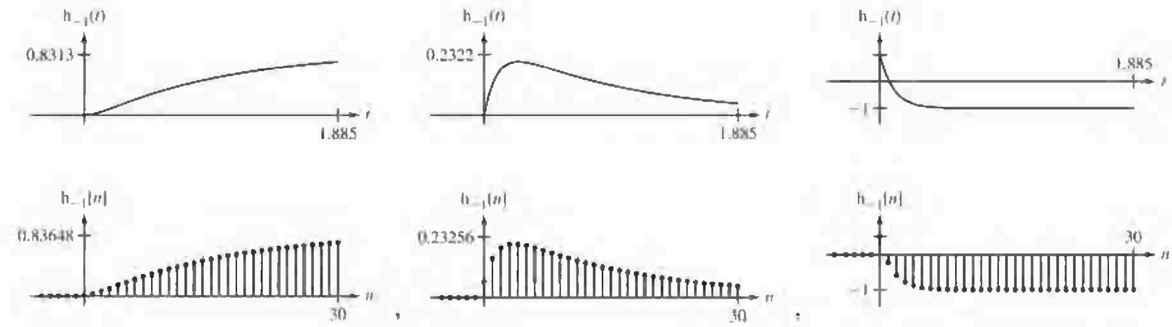
شكل رقم (ج-ت-٧)

تصميم المرشحات بطريقة التحويل ثنائي الخطية

٨- باستخدام طريقة التحويل ثنائي الخطية، صمم مرشحات رقمية تحاكي المرشحات التماثلية التي لها دوال العبور التالية. في كل حالة اختر معدل العينة يكون ١٠ مرات مقدار المسافة بين أبعد قطب أو صفراً من نقطة الأصل في المستوى s. قارن عن طريق الرسم بين استجابات الخطوة للمرشح الرقمي والتماثلي.

(أ) $H_a(s) = \frac{s-10}{s+10}$ (ب) $H_a(s) = \frac{10}{s^2+11s+10}$ (ت) $H_a(s) = \frac{3s}{s^2+11s+10}$

الإجابة:



شكل رقم (ج–ت–٨)

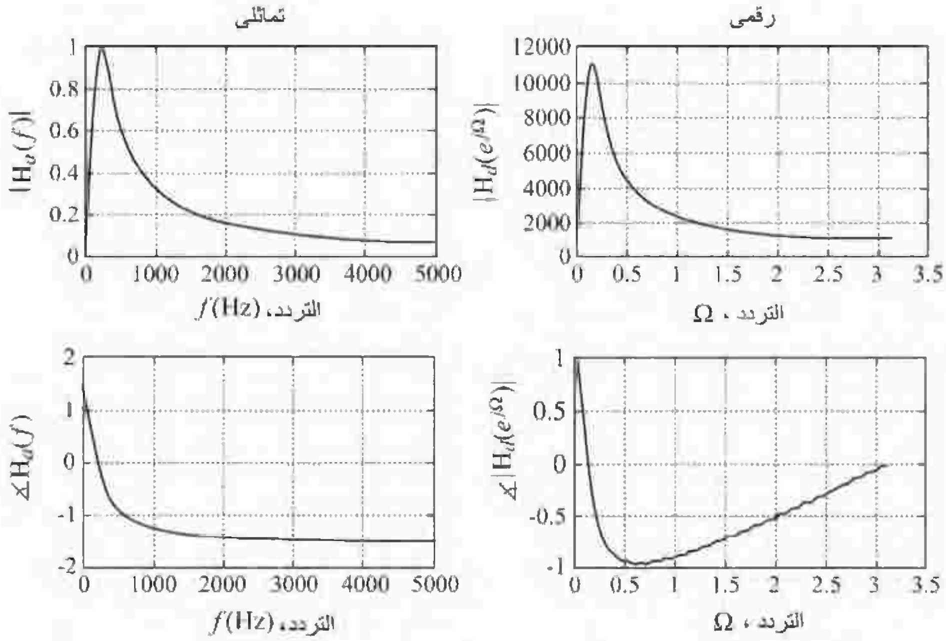
تصميم المرشحات FIR

٩- باستخدام نافذة مستطيلة عرضها ٥٠ ومعدل عينة مقداره 10000عينة/الثانية، صَمِّمْ مرشحاً رقمياً FIR يحاكي المرشح التماثلي الذي له دالة العبور التالية :

$$H_a(s) = \frac{2000s}{s^2+2000s+2\times10^6}$$

قارن بين الاستجابة الترددية للمرشح الرقمي والمرشح التماثلي.

الإجابة :

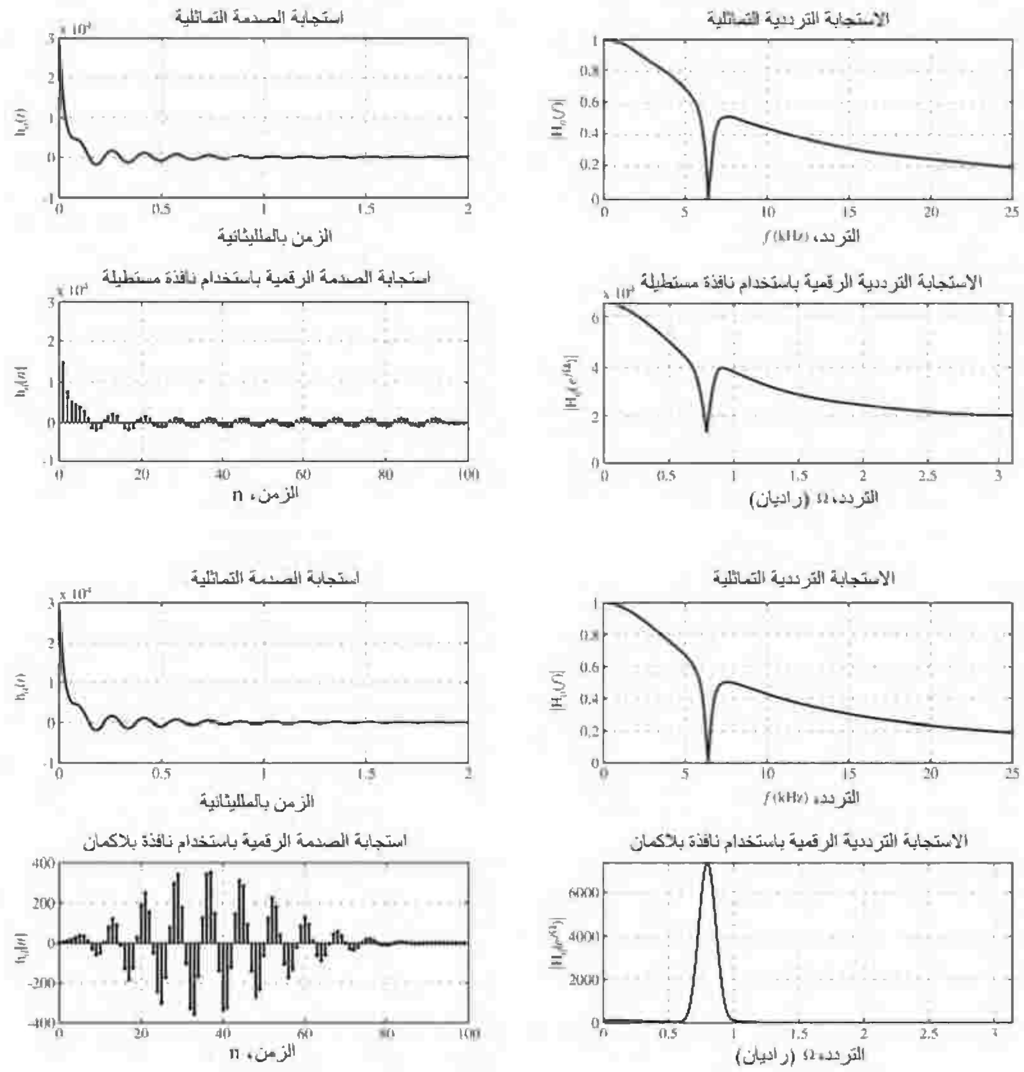


شكل رقم (ج–ت–٩)

١٠- باستخدام النافذة المستطيلة التي عرضها 100 ومعدل عيننة يساوي 50000 عينة/الثانية، صَمِّمْ مرشحاً رقمياً يحاكي المرشح التماثلي الذي له دالة العبور التالية:

$$H_a(s) = 3 \times 10^4 \frac{s^2+1.6\times10^9}{(s+3\times10^4)(s^2+5000s+1.6\times10^9)}$$

ارسم استجابة الصدمة والاستجابة الترددية للمرشح الرقمي. أعد هذا التصميم مستخدماً نافذة بلا كمان واشرح التأثير الذي تراه في الاستجابة الترددية.



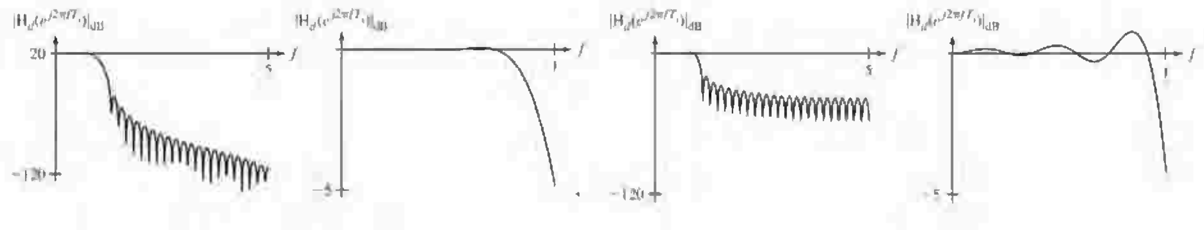
شكل رقم (ج–ت–١٠)

١١- صَمِّمْ مرشحاً رقمياً تقريبياً لكل واحد من المرشحات التماثلية المثالية التالية عن طريق عينة نسخة مقتطعة من استجابة الصدمة وباستخدام النافذة المذكورة. في كل حالة اختر معدل العينة بحيث يكون 10 أمثال أكبر تردد يمر من المرشح التماثلي. اختر أزمنة التأخير ومرات الاقتطاع بحيث لا يتم اقتطاع أكثر من 1٪ من طاقة بإشارة استجابة الصدمة. قارن بالرسم بين الاستجابة الترددية للمرشح الرقمي والمرشح التماثلي باستخدام تدريج بالديسبل مع التردد الخطي.

(أ) مرشح منفذ للترددات المنخفضة، و f_c=1Hz، و نافذة مستطيلة

(ب) مرشح منفذ للترددات المنخفضة، f_c=1Hz، و نافذة هان

الإجابة:



شكل رقم (ج-ت-١١)

تمارين بدون إجابات

المرشحات التماثلية

١٢- يتم استخدام ازدواج حراري لقياس درجة الحرارة في العديد من العمليات الصناعية. يتم تثبيت الازدواج الحراري ميكانيكياً في العادة داخل شريحة معدنية لحمايته من التلف نتيجة الاهتزازات أو الانثناء أو أي قوى أخرى. أحد تأثيرات هذه الحماية هي أن الكتلة الحرارية لها تبطئ الاستجابة الزمنية الفعلية للازدواج الحراري مع هذه الحماية بالمقارنة بالاستجابة الزمنية للازدواج الحراري وحده. افترض أن درجة الحرارة الفعلية على السطح الخارجي للحماية بالكيلفين هي $T_s(t)$، وافترض أن فرق الجهد الناتج من الازدواج كاستجابة للحرارة هو $v_t(t)$. استجابة الازدواج لكلفين واحد كخطوة تغيرية لدرجة الحرارة على سطح الحماية من T_1 إلى T_1+1 هي:

$$v_t(t) = K\left[T_1 + \left(1 - e^{-\frac{t}{0.2}}\right)u(t)\right]$$

حيث K هي ثابت تحويل درجة حرارة الازدواج إلى فرق جهد.

(أ) افترض أن ثابت التحويل K=40μV/K. صَمِّمْ مرشحاً فعالاً يعالج جهد الازدواج ويستعوض زمن تأخيره بحيث يجعل استجابة النظام الكلي لخطوة في درجة حرارة الحماية تكون هي نفسها خطوة جهدية مقدارها 1mV.

(ب) افترض أيضاً أن الازدواج يتعرض لتداخل كهرومغناطيسي EMI من خطوط القدرة والأجهزة القريبة. افترض أن الـ EMI تم نمذجتها بدالة جيبية مقدارها 20μV عند طرفي الازدواج. احسب استجابة مرشح الازدواج لترددات EMI تساوي 1Hz و 10Hz و 60Hz. ما مقدار التغيرات في درجة الحرارة الناتجة بسبب كل حالة من الـ EMI ؟

١٣- صَمِّمْ مرشح شيبيشيف نوع 2 منفذاً لمجال من الترددات بأقل درجة ممكنة لتحقيق المواصفات التالية:

مجال مرور: 4kHz حتى 6kHz، ومعامل التكبير بين الصفر و 2dB-

مجال الوقف: 3kHz> و 8kHz<، والإعاقة أو الاضمحلال 60dB<

ما هي أقل درجة؟ ارسم مخطط بود لمقدار وزاوية الاستجابة الترددية واختبره لتتأكد من مواصفات مجالي المرور والوقف قد تحققت. ارسم مخطط الأصفار والأقطاب. ما هو زمن حدوث القمة في استجابة الصدمة؟

تصميم المرشحات بطريقة ثبات الصدمة وثبات الخطوة

١٤- باستخدام طريقة التصميم بثبات الصدمة، صمم نظاماً متقطعاً زمنياً ليحاكي الأنظمة المستمرة زمنياً التي لها دوال العبور التالية ومعدلات العينة التالية. قارن بين استجابات الصدمة واستجابات الخطوة للأنظمة المستمرة والمتقطعة زمنياً.

(أ) $H_a(s) = \frac{712s}{s^2+46s+240}, f_s = 20Hz$

(ب) $H_a(s) = \frac{712s}{s^2+46s+240}, f_s = 200Hz$

١٥- باستخدام طرق التصميم بثبات الصدمة وثبات الخطوة، صمم المرشحات الرقمية التي تحاكي المرشحات التماثلية التي لها دوال العبور التالية. في كل حالة اختر تردد عينة يساوي 10 مرات من مقدار المسافة بين أبعد قطب أو صفراً من نقطة الأصل في المستوى s. قارن برسم استجابات الخطوة للمرشح الرقمي والمرشح التماثلي.

(أ) $H_a(s) = \frac{16s}{s^2+10s+250}$ (ب) $H_a(s) = \frac{s+4}{s^2+12s+32}$

(ت) $H_a(s) = \frac{s^2+4}{s(s^2+12s+32)}$

تصميم المرشحات بالفروق المحددة

١٦- باستخدام طريقة الفروق المحددة وكلها فروق عكسية، صَمِّمْ المرشحات الرقمية التي تحاكي المرشحات التماثلية التي لها دوال العبور التالية. في كل حالة اختر تردد عينة يساوي 10 مرات من مقدار المسافة بين أبعد قطب، أو صفراً من نقطة الأصل في المستوى s. قارن برسم استجابات الخطوة للمرشح الرقمي والمرشح التماثلي.

(أ) $H_a(s) = \frac{s^2}{s^2+3s+2}$ (ب) $H_a(s) = \frac{s+60}{s^2+120s+2000}$

(ت) $H_a(s) = \frac{16s}{s^2+10s+250}$

تصميم المرشحات باستخدام تحويل z المتوافق والتعويض المباشر

١٧- باستخدام طريقة التعويض المباشر، صَمِّمْ المرشحات الرقمية التي تحاكي المرشحات التماثلية التي لها دوال العبور التالية. في كل حالة اختر تردد عينة يساوي ١٠ مرات من مقدار المسافة بين أبعد قطب أو صفراً من نقطة الأصل في المستوى s. قارن برسم استجابات الخطوة للمرشح الرقمي والمرشح التماثلي.

(أ) $H_a(s) = \frac{s^2}{s^2+1100s+10^5}$ (ب) $H_a(s) = \frac{s^2+100s+5000}{s^2+120s+2000}$

(ت) $H_a(s) = \frac{s^2+4}{s^2+12s+32}$

تصميم المرشحات بطريقة التحويل ثنائي الخطية

١٨- باستخدام طريقة التحويل ثنائي الخطية، صمم المرشحات الرقمية التي تحاكي المرشحات التماثلية التي لها دوال العبور التالية. في كل حالة اختر تردد عينة يساوي ١٠ مرات من مقدار المسافة بين أبعد قطب أو صفر من نقطة الأصل في المستوى s. قارن برسم استجابات الخطوة للمرشح الرقمي والمرشح التماثلي.

(أ) $H_a(s) = \frac{s^2}{s^2+100s+250000}$ (ب) $H_a(s) = \frac{s^2+100s+5000}{s^2+120s+2000}$

(ت) $H_a(s) = \frac{s^2+4}{s^2+12s+32}$

١٩- استخدم التحويل ثنائي الخطية ومعدل عينة 10kHz لتحاكي المرشح التماثلي بترورث من الدرجة الرابعة المنفذ للترددات المنخفضة والذي له تردد قطع 4kHz. أوجد النقطة 3dB- للمرشح الرقمي وقارنها مع تردد القطع المطلوب $\Omega_c=2\pi f_c/f_s=0.8\pi$، لماذا يختلفان ؟

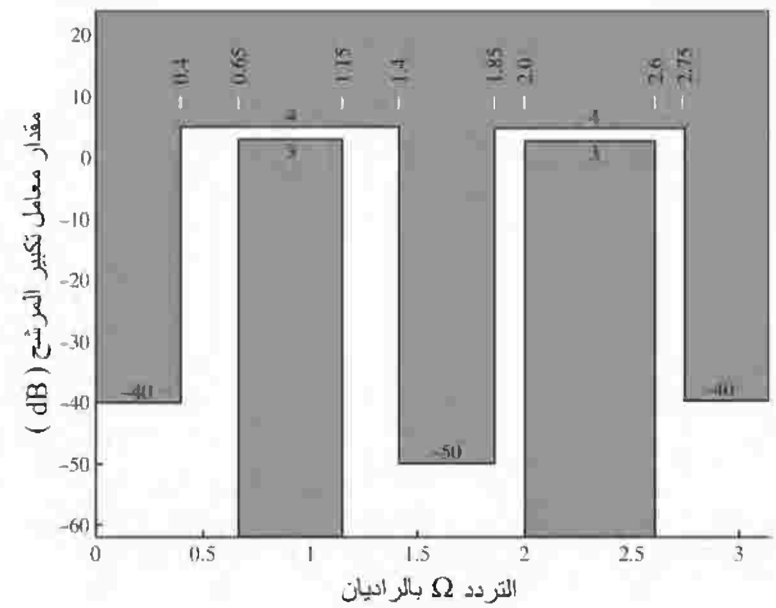
تصميم المرشحات FIR

٢٠- صمم مرشحاً رقمياً يحاكي كل واحد من المرشحات التماثلية المثالية التالية عن طريق عينة نسخة مقتطعة من استجابة الصدمة واستخدام النوافذ المذكورة. في كل حالة اختر معدل العينة يساوي ١٠ مرات أعلى تردد يمر من خلال المرشح التماثلي. اختر أزمنة التأخير والاقتطاع بحيث إنه ليس أكثر من ١٪ من طاقة الإشارة في استجابة الصدمة سيتم اقتطاعها. قارن بالرسم بين مقدار الاستجابات الترددية للمرشح الرقمي والمرشح التماثلي المثالي باستخدام تدريج dB مع التردد الخطي.

(أ) منفذ لمجال من الترددات، flow=10Hz، fhigh=20Hz، و نافذة مستطيلة

(ب) منفذ لمجال من الترددات، flow=10Hz، fhigh=20Hz، و نافذة بلاكمان

٢١- ارسم الاستجابة الترددية لمرشح FIR مصمم باستخدام خوارزم مكليلان الذي يحقق المواصفات الموضحة في شكل (ت- ٢١) باستخدام أقصر استجابة صدمة ممكنة.



شكل رقم (ت-٢١)