الفصل الحادي عشر

نظم الإسقاط الدائرية

تعتبر نظم الإسقاط الدائرية حالة خاصة من نظم الإسقاط النصف مخروطية. وسميت دائرية لأن مرتسم كل من خطوط الطول و العرض عبارة عن أقواس دوائر. استخدمت نظم الإسقاط الدائرية المعروفة لتصوير العالم بأكمله ولتصوير أوجه الكرة الأرضية. من هذه النظم تعرف: نظام الإسقاط الكروي، نظام إسقاط (لاغرانج) ونظام إسقاط (غرينتين).

(١١,١) نظام الإسقاط الكروي(*)

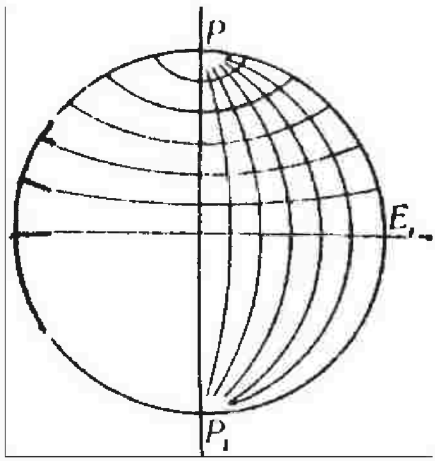
نظام الإسقاط الكروي قريب بشكل شبكته من نظام الإسقاط السمتي المعترض المتساوي المسافات. وبالنسبة للتشوهات يمكن تصنيفه وسطاً بين نظام الإسقاط المطابق والمكافئ. خطوط تساوي التشوهات قريبة جداً من الدائرية، وهذا هو وجه التشابه مع نظام الإسقاط السمتي. يمتاز هذا الإسقاط بسهولة رسم شبكته حيث ترسم دائرة

(*) نظام الإسقاط الكروي ينسب لـ(Giambattista Nicolosi / 1670 - 1610)، بينما اقترحه البيروني قبله بحوالي ٦٠٠ عام[٩] وذلك من أجل تمثيل القبة السماوية المعترضة لتصوير دائرة البروج التي كان لها أهميتها في ذلك الوقت.

نصف قطرها $R\ k=\frac{\pi}{2}$ في مقياس الخريطة، ومن ثم يرسم قطران متعامدان فيها، يمثل أحدهما مرتسم الاستواء، بينما يمثل الآخر مرتسم خط الطول الأوسط. الدائرة المرسومة تمثل مرتسم خطي الطول $\lambda = \pm 90^0$ بالنسبة لخط الطول الأوسط. بعد ذلك يصار إلى تقسيم أنصاف الأقطار إلى أقسام متساوية (كل ١٥°) وأيضاً تقسم أرباع الدائرة إلى نفس العدد من الأقسام المذكورة.

الآن يمكن رسم أقواس دوائر بحيث تمر من ثلاث نقاط واقعة على خط الطول الأوسط وخطي الطول الطرفيين. هذه الأقواس مراكزها تقع على امتداد مرتسم خط الطول الأوسط وهي تمثل مرتسمات خطوط العرض. ثم ترسم أقواس دوائر مارة بثلاث نقاط واقعة على مرتسم الاستواء ونقطتي القطبين (الشكل رقم ١٢٨).

هذه الأقواس تقع مراكزها على امتداد مرتسم خط الاستواء، وهي تمثل مرتسم خطوط الطول.



الشكل رقم (١٢٨). الشبكة في الإسقاط الكروي.

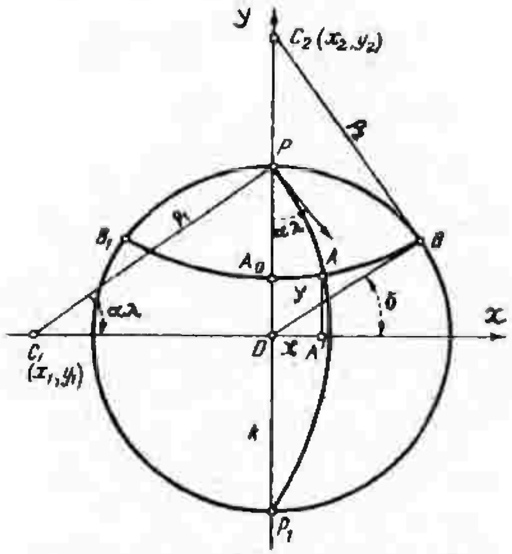
(١١,٢). نظام إسقاط (لاغرانج)

لنعتبر دائرة نصف قطرها k والذي نعتبره الثابت الأول في نظام الإسقاط. ولنعتبر أن أحد أقطار هذه الدائرة يمثل مرتسم خط الطول الأوسط λ_0 ، وأن P , P_1 تمثلان مرتسمي القطبين (الشكل رقم ١٢٩). باقي خطوط الطول مرتسمها أقواس دوائر تمر من النقطتين P , P_1 تشكل كل منها مع مرتسم خط الطول الأوسط الزاوية $\alpha\lambda$ ، حيث α الثابت الثاني في نظام الإسقاط. λ زاوية طول بين λ_0 وخط الطول المار بالنقطة المدروسة. القطر المعامد للقطر PP_1 سنعتبره تمثيلاً لخط العرض φ_1 (بحالة خاصة الاستواء). باقي خطوط العرض ترتسم بشكل أقواس دوائر. خطوط الشبكة متعامدة لأن نظام الإسقاط مطابق. لنعتبر الآن مجموعة محاور إحداثية متعامدة oxy بحيث ينطبق محور oy مع مرتسم خط الطول λ_0. نرسم في الشكل رقم (١٢٩) خط الطول المار بالنقطة $A(\varphi,\lambda)$ أي القوس PAP_1. كما نرسم خط العرض BAB_1 المار بنفس النقطة. إن مركز القوس PAP_1 هي النقطة C_1 وإحداثياتها (x_1,y_1) ، ومركز القوس BAB_1 هي النقطة $C_2\,(x_2,y_2)$. نصف قطر القوس الأول هو ρ_1 ، والقوس الثاني ρ_2.

إذاً يمكن كتابة مايلي :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1=-k\tan(\alpha\lambda)\ ,\ y_1=0,\rho_1=k\,cosec(\alpha\lambda) \\ x_2=0\ ,\ y_2=k\,cosec\delta\ ,\ \rho_2=kctg\delta \end{array}\right. \qquad (١١,١)$$

حيث δ وسيط تابع لـ φ ، يمثل الزاوية بين ox ونصف قطر الدائرة k المار بنقطة تقاطع مرتسم خط العرض φ مع الدائرة k.



الشكل رقم (١٢٩). الشبكة في إسقاط لاغرانج.

يمكن إعطاء معادلة مرتسم خط الطول بالشكل التالي:

$$[x + k\, ctan(\alpha\lambda)\;]^2 + y^2 = [k\, cosec(\alpha\lambda)]^2 \qquad (١١,٢)$$

ومعادلة مرتسم خط العرض:

$$x^2 + (y - k\, cosec\, \delta)^2 = (k\, ctan\, \delta)^2 \qquad (١١,٣)$$

يمكن كتابة العلاقتين الأخيرتين بالشكل التالي:

$$\begin{cases} x^2 + 2k\, x\, ctan(\alpha\lambda) + y^2 = k^2 \\ x^2 - 2k\, y\, cosec\, \delta + y^2 = -k^2 \end{cases} \qquad (١١,٤)$$

بالحل المشترك للعلاقتين (١١,٤) نحصل على:

$$\begin{cases} x = \dfrac{k\, cos\delta\, sin(\alpha\lambda)}{1 + cos\delta\, cos(\alpha\lambda)} \\ y = \dfrac{k\, sin\delta}{1 + cos\, \delta\, cos(\alpha\lambda)} \end{cases} \qquad (١١,٥)$$

التابع δ يتم تحديده على أساس تحقيق المطابقة أي تحقيق الشروط (١,٧١) و(١,٧٢):

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}=\frac{r}{M}\frac{\partial y}{\partial \varphi} \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda}=-\frac{r}{M}\frac{\partial x}{\partial \varphi}$$

نوجد التفاضلات الجزئية حسب (١١,٥):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}=\dfrac{\partial x}{\partial \delta}\dfrac{d\delta}{d\varphi}=-\dfrac{k\, sin\delta\, sin(\alpha\lambda)}{[1+cos\,\delta\, cos(\alpha\lambda)]^2}\dfrac{d\delta}{d\varphi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \lambda}=\dfrac{\alpha k\, cos\delta[cos\,\delta+cos(\alpha\lambda)]}{[1+cos\delta\, cos(\alpha\lambda)]^2} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \varphi}=\dfrac{\partial y}{\partial \delta}\dfrac{d\delta}{d\varphi}=\dfrac{k[cos\delta+cos(\alpha\lambda)]}{[1+cos\delta\, cos(\alpha\lambda)]^2}\dfrac{d\delta}{d\varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \lambda}=\dfrac{\alpha k\, sin\delta\, cos\delta\, sin(\alpha\lambda)}{[1+cos\delta\, cos(\alpha\lambda)]^2} \end{cases} \tag{١١,٦}$$

بتعويض هذه التفاضلات في علاقات (كوشي- ريمان) نحصل على:

$$\begin{cases} \alpha\cos\delta=\dfrac{r}{M}\dfrac{d\delta}{d\varphi} \\ \dfrac{d\delta}{\cos\delta}=\alpha\dfrac{M}{N\cos\varphi}d\varphi \end{cases} \tag{١١,٧}$$

بإجراء التكامل (الفقرة ٤,٣):

$$tan(45^\circ+\frac{\delta}{2})=\beta U^\alpha \tag{١١,٨}$$

حيث β ثابت التكامل وهو ثابت نظام الإسقاط الثالث.

$$U=\frac{tan(45^0+\varphi/2)}{tan^e(45^0+\psi/2)}\,,\psi=arcsin(e\,sin\varphi)$$

يمكن إعطاء المقياس المحلي حسب خطوط الطول m (ويساوي n) بالعلاقة (١,٢٤):

$$m=\frac{1}{r}\sqrt{(\frac{\partial x}{\partial \lambda})^2+(\frac{\partial y}{\partial \lambda})^2}$$

وباعتبار (١١,٦):

$$m=\frac{\alpha k \cos\delta}{r[1+\cos\delta\cos(\alpha\lambda)]} \qquad (١١,٩)$$

نأتي الآن لتحديد ثوابت نظام الإسقاط الثلاثة k , α , β.

نفرض الشرط بأن المقياس المحلي الخطي هو حدي في النقطة (φ_0, λ_0). لنأخذ لوغاريتم طرفي العلاقة (١١,٩):

$$lgm=lg(\alpha k)+lg(\cos\delta)-lg\,r-lg[1+\cos\delta\cos(\alpha\lambda)]$$

ولنوجد التفاضل الجزئي لهذه العلاقة بالنسبة للمتحولين φ , λ في النقطة (φ_0, λ_0):

$$\frac{\partial\, lgm}{\partial \lambda}=\frac{\alpha\cos\delta\sin(\alpha\lambda)}{1+\cos\delta\cos(\alpha\lambda)}$$

$$(\frac{\partial\, lgm}{\partial \lambda})_0=\frac{\alpha\cos\delta\sin(\alpha\lambda_0)}{1+\cos\delta\cos(\alpha\lambda_0)}=0$$

ومن ثم نستنتج أن $\lambda_0 = 0$. هذا يعني أن المقياس الخطي سيكون حدياً على خط الطول الأوسط، عند نقطة تقاطعه مع الموازي φ_0 الذي سنحدده فيما يلي:

$$\frac{\partial lgm}{\partial\varphi}=-\tan\delta\frac{d\delta}{d\varphi}+\frac{M\sin\varphi}{r}+\frac{\sin\delta}{1+\cos\delta}\frac{d\delta}{d\varphi}$$

$$=(\frac{\sin\delta}{1+\cos\delta}-\tan\delta)\frac{d\delta}{d\varphi}+\frac{M\sin\varphi}{r}$$

$$=\frac{M}{r}\sin\varphi-\tan\frac{\delta}{2}\sec\delta\frac{d\delta}{d\varphi}$$

وباعتبار العلاقة (١١,٧) نحصل على :

$$\frac{\partial lgm}{\partial \varphi}=\frac{M}{r}(sin\varphi-\alpha tan\frac{\delta}{2})$$

$$(\frac{\partial lgm}{\partial \varphi})_0=\frac{M_0}{r_0}(sin\varphi_0-\alpha tan\frac{\delta_0}{2})=0$$

$$tan\frac{\delta_0}{2}=\frac{sin\ \varphi_0}{\alpha} \qquad (١١,١٠)$$

فإذا كانت α , φ_0 معلومتين، فيمكن استناداً إلى (١١,١٠) حساب δ_0. بعد معرفة δ_0 يمكن تطبيق (١١,٨) لحساب β :

$$\beta=tan(45^0+\frac{\delta_0}{2})U^{-\alpha} \qquad (١١,١١)$$

بعد معرفة β , δ_0 يمكن تطبيق العلاقة (١١,٥) لحساب الثابت k على أساس قيمة ما مفروضة لـ m_0 في مركز نظام الإسقاط ($\lambda_0=0$) :

$$k=\frac{m_0 r_0}{\alpha}(1+sec\delta_0) \qquad (١١,١٢)$$

لقد افترضنا في العلاقات (١١,١٠)- (١١,١٢) أن α معلومة. يتم تحديد قيمة α على أساس معادلة خط تساوي التشوهات بجوار مركز نظام الإسقاط. فيما يلي علاقة حساب α [٥]:

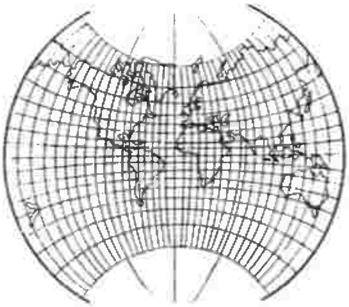
$$\alpha^2=1+\frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}cos^2\varphi_0 \qquad (١١,١٣)$$

حيث $\eta=\frac{a}{b}$. a,b أنصاف أقطار القطع الناقص المغلف بأقرب ما يمكن لحدود المنطقة المصورة. مركز هذا القطع ينطبق مع مركز نظام الإسقاط.

الآن نرتب علاقات نظام إسقاط (لاغرانج) وفق تسلسل حسابها كما يلي :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\alpha^2 = 1 + \dfrac{1-\eta^2}{1+\eta^2} \cos^2 \varphi_0 \ , \ \eta = \dfrac{b}{a} \\
\tan \dfrac{\delta_0}{2} = \dfrac{\sin \varphi_0}{\alpha} \quad , \quad \beta = \tan(45^\circ + \dfrac{\delta_0}{2}) U_0^{-\alpha} \\
k = \dfrac{m_0 r_0}{\alpha} (1 + \sec \delta_0) \ , \ \tan(45^\circ + \dfrac{\delta}{2}) = \beta U^\alpha \\
U = \dfrac{\tan(45^\circ + \dfrac{\varphi}{2})}{\tan^e (45^\circ + \dfrac{\psi}{2})} \ , \ \psi = \arcsin(e \sin \varphi) \\
x = \dfrac{k \cos \delta \sin(\alpha \lambda)}{1 + \cos \delta \cos(\alpha \lambda)} \\
y = \dfrac{k \sin \delta}{1 + \cos \delta \cos(\alpha \lambda)} \ , \ m = \dfrac{\alpha k \cos \delta}{r[1 + \cos \delta \cos(\alpha \lambda)]} \\
\mu_s = m^2 \quad , \ \omega = 0
\end{array}
\right. \qquad (١١،١٤)
$$

الشكل رقم (١٣٠) يبين شكل شبكة خطوط الطول والعرض في نظام إسقاط (لاغرانج) لتمثيل منطقة العالم بالكامل.



الشكل رقم (١٣٠). إسقاط (لاغرانج) لتمثيل منطقة العالم.

معادلات نظام إسقاط لاغرانج من أجل سطح الكرة، مع اعتبار أن $m_0 = 1$ وأن نظام الإسقاط لخارطة العالم:

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{1+cos^2\,\varphi_0} \\ \beta = \dfrac{\alpha + sin\varphi_0}{\alpha - sin\varphi_0} ctan^{\alpha}(45^\circ + \dfrac{\varphi_0}{2}) \\ k = \dfrac{R\alpha}{cos\varphi_0} \\ tan(45^\circ + \dfrac{\beta}{2}) = \beta\, tan^{\alpha}(45^\circ + \dfrac{\varphi}{2}) \\ x = \dfrac{k\, cos\delta\, sin(\alpha\lambda)}{1+cos\delta\, cos(\alpha\lambda)} \\ y = \dfrac{k\, sin\delta}{1+cos\delta\, cos(\alpha\lambda)} \\ m = \dfrac{\alpha k\, cos\delta}{r[1+cos\delta\, cos(\alpha\lambda)]} \\ \mu_s = m^2 \end{cases} \qquad (١١,١٥)$$

نظام إسقاط (لاغرانج) يعتبر أول نظام إسقاط مطابق يمكن توجيه الخطوط الأيزومترية فيه لتناسب شكل وامتداد المنطقة المصورة.

(١١,٣) نظام إسقاط غرينتين

في هذا الإسقاط خطوط الطول والعرض تتمثل بشكل أقواس دوائر متناظرة بالنسبة لمرتسم خط الطول الأوسط ومرتسم الاستواء. يستخدم هذا الإسقاط لتمثيل مناطق واسعة والعالم بأكمله ضمن دائرة نصف قطرها $k = \pi R$ ، والتي تمثل بدورها مرتسم خطي الطول $\lambda = \pm 180^\circ$ بالنسبة لمرتسم خط الطول الأوسط.