الفصل الثاني عشر

نظام الإسقاط المثالي

(١٢,١) المسألة المباشرة والمسألة العكسية في الكارتوغرافيا الرياضية

مر معنا في الفصل الأول من هذا الكتاب أن المعادلات العامة لنظام الإسقاط تعطى بالشكل:

$$x=f_1(\varphi,\lambda) \quad , \quad y=f_2(\varphi,\lambda)$$

حيث f_2, f_1 يسميان بتابعي التمثيل، أو بتابعي إسقاط سطح الإهليلج على مستو. على أساس هذين التابعين يمكن استنتاج العلاقات التفاضلية لنظم الإسقاط المختلفة. هذه العلاقات تعطى بالشكل:

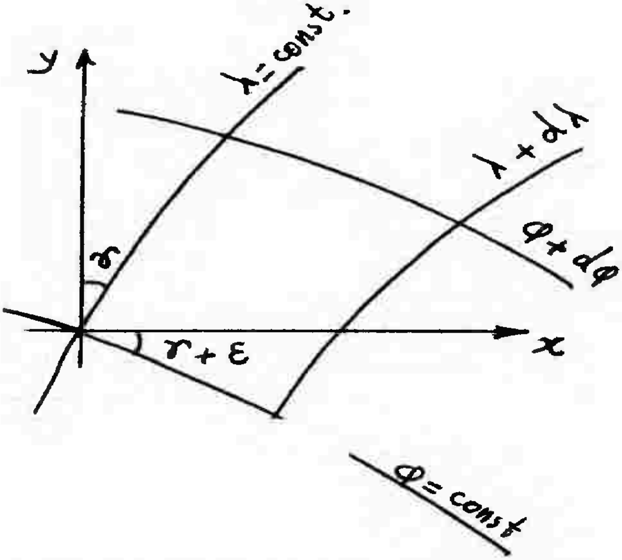
$$\left\{\begin{aligned}
&m=\frac{1}{M}[(\frac{\partial x}{\partial \varphi})^2+(\frac{\partial y}{\partial \varphi})^2]\\
&n=\frac{1}{r}[(\frac{\partial x}{\partial \lambda})^2+(\frac{\partial y}{\partial \lambda})^2]\\
&a^2+b^2=m^2+n^2,\ ab=m\,n\,sin\,i\\
&\mu_s=\frac{1}{Mr}[\frac{\partial x\,\partial y}{\partial \lambda\,\partial \varphi}\ \ \frac{\partial x\,\partial y}{\partial \varphi\,\partial \lambda}]\\
&\gamma=arctan[\frac{\partial x}{\partial \varphi}/\frac{\partial y}{\partial \varphi}]\\
&i=arctan[\frac{\frac{\partial x\,\partial y}{\partial \lambda\,\partial \varphi}-\frac{\partial x\,\partial y}{\partial \varphi\,\partial \lambda}}{\frac{\partial x\,\partial x}{\partial \varphi\,\partial \lambda}-\frac{\partial y\,\partial y}{\partial \varphi\,\partial \lambda}}]\\
&sin(\omega/2)=(a-b)/(a+b))
\end{aligned}\right. \qquad (١٢,١)$$

وقد مر سابقاً تفصيل هذه العلاقات.

إن حل المسألة المباشرة في الكارتوغرافيا الرياضية، يعني تحديد عناصر نظام الإسقاط، من إحداثيات وتشوهات، على أساس تابعين f_1, f_2 مفروضين. تتميز هذه المسألة بالسهولة وهي تشمل كل ما درسناه في الفصول السابقة، من نظم إسقاط معروفة. إن سلبية استخدام هذه المسألة هو محدودية إمكانية البحث عن نظام إسقاط جديد مناسب.

أما حل المسألة العكسية في الكارتوغرافيا الرياضية، فيعني تحديد توابع النظام إسقاط f_1, f_2 على أساس توزيع مفروض للتشوهات، أو على أساس صفة أخرى مفروضة.

لنعتبر الشكل رقم (١٣١) ولنوجد العلاقة بين المقياس المحلي الخطي وزاوية تقارب خطوط الطول γ، والتفاضلات الجزئية للإحداثيات التربيعية.



الشكل رقم (١٣١). مسقط شبكة خطوط الطول والعرض.

بملاحظة الشكل رقم (١٣١) واعتبار علاقات n,m في المجموعة (١٢,١)، يمكن التعبير عنها بالشكل التالي [٥]:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \varphi}=mM\sin\gamma, \frac{\partial y}{\partial \varphi}=mM\cos\gamma \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda}=nr\cos(\gamma+\varepsilon), \frac{\partial y}{\partial \lambda}=nr\sin(\gamma+\varepsilon) \end{cases} \quad (١٢,٢)$$

حيث γ زاوية تقارب خطوط الطول. ε انحراف زاوية تقاطع خطوط الشبكة عن التعامد.

الآن نفرض شروط التكامل على العلاقات (١٢,٢):

$$\frac{\partial(\frac{\partial x}{\partial \varphi})}{\partial \lambda}=\frac{\partial(\frac{\partial x}{\partial \lambda})}{\partial \varphi}, \frac{\partial(\frac{\partial y}{\partial \varphi})}{\partial \lambda}=\frac{\partial(\frac{\partial y}{\partial \lambda})}{\partial \varphi} \quad (١٢,٣)$$

بتعـويض قـيم التفاضـلات الجزئيـة في (١٢,٣) مـن (١٢,٢)، مـع اعتبـار أن الإسقاط مطابق، أي أن $m = n$, $\varepsilon = 0$ ، نحصل على النتيجة التالية:

$$\frac{\partial^2 lnm}{\partial q^2}+\frac{\partial^2 lnm}{\partial \lambda^2}=sech^2 q \qquad (١٢,٤)$$

وهي معادلة (بواسون). تؤول هـذه العلاقـة بحلها لتابع المقيـاس المحلي بالنسبة للإحداثيات الإيزومترية. طبعاً بحل هذه المعادلـة على أسـاس شـروط معينـة مفروضـة، نكـون قـد حـصلنا علـى توزيـع معـين لقـيم المقيـاس المحلـي m علـى امتـداد المنطقـة المدروسة. بعد ذلك نحصل على التابعين f_1, f_2 لنظام الإسقاط. ولكن من أجل إنشاء الخرائط الطبوغرافية، ليس هناك من ضرورة للحصول على التوابع f_1, f_2 ، بشكل توابع تحليلية مستمرة. بل يكفي الحصول على القيم العددية للتابعين في نقـاط تقـاطع خطوط الشبكة. هذا الاعتبار لـه أهميـة عمليـة، لأن المسألة العكسية في الكارتوغرافيا الرياضية تؤول إلى حل معادلـة تفاضـلية مـن الدرجة الثانية. هـذه المرحلـة تعتبر صعبة وأحياناً لايمكن حلها. من هنا قلنا أن هناك أهمية عملية لتعريـف التـابعين f_1, f_2 بقيم عددية في نقاط معينة. ففي هذه الحالـة يمكننـا استخدام الطرق العدديـة لحساب تكامـل معادلة تفاضلية.

(١٢,٢) نظام الإسقاط المثالي (نظرية تشيبتشيف)

في عـام ١٨٥٣م قـدم (تشيبتـشيف) نظريتـه عـن الإسـقاط المثـالي. تـنص هـذه النظرية على أن الإسقـاط المطـابق المثـالي، هـو النظـام الـذي يحـافظ فيه المقيـاس المحلـي الخطي، على قيمة ثابتة على حدود المنطقة المصورة. بمعنى أن شكل حدود المنطقة يعتبر كأحد الخطوط الايزومترية في نظام الإسقاط. وقام (غرافي) بعد ذلك بالبرهان على هذه

النظرية بشكل تحليلي. ثم اقترح (اورمايف) عدة طرق عملية للحصول على هذا النظام في عام (١٩٤٧م).

يعتمد حساب نظام إسقاط (تشيبتشيف) على النظرية العكسية في الكارتوغرافيا الرياضية. ففي المرحلة الأولى يتم حساب قيم المقياس المحلي الخطي في نقاط تقاطع خطوط الشبكة، بحيث نحصل على قيمة ثابتة للمقياس (غالباً تساوي الواحد) على طول حدود المنطقة. تشمل المرحلة الثانية حساب الإحداثيات التربيعية x , y للنقاط التي حسب فيها المقياس المحلي الخطي.

تؤول المرحلة الأولى إلى حل معادلة (بواسون) (١٢،٤) والتي تقبل حلاً من الشكل:

$$\ln m = F_1(q+i\lambda) \qquad (١٢،٥)$$

والتابع F يمكن تحديده بطرق عددية.

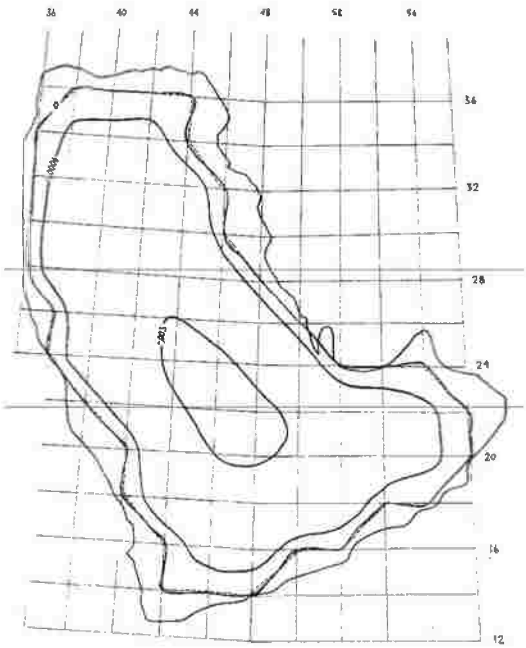
أما المرحلة الثانية، فتشمل تحديد قيم التابع F_2 الذي يمكن التعبير عنه - باعتبار النظام مطابق- بشكل تابع عقدي من الشكل:

$$y+ix = F_2(q+i\lambda) \qquad (١٢،٦)$$

إن مسألة تحديد شكل التابعين F_2, F_1 تخرج عن إطار هذا الكتاب. لذا نكتفي بالفكرة العامة التي قدمناها عن نظام إسقاط (تشيبتشيف). يبين الشكل رقم (١٣٢) نموذج لاستخدام إسقاط لابورد المعدل [٧]، [٨] الشبيه بنظام تشيبتشيف، لإصدار خرائط منطقة شبه الجزيرة العربية. ينطبق الخط الإيزومتري مع شكل حدود المنطقة المعمم. وكان بالإمكان تحسين الانطباق مع تعميم أدق لحدود المنطقة. إلا أن ذلك ينعكس على حجم الحسابات. ولكن بوجود الحاسوب في الوقت الحاضر، أصبح من

الممكن زيادة دقة هذا النظام. تم حساب قيم المقياس المحلي في النموذج الموضح بالشكل رقم (١٣٢). إن حل معادلة (بواسون) بطريقة عددية تسمى طريقة الشبكات.

نذكر أيضاً أن سعي العلماء اتجه نحو إيجاد نظم إسقاط قريبة بنتائجها من نظام إسقاط (تشيبتشيف)، ولكن بهيكل رياضي أسهل. وكان لهذا الأمر أهميته البالغة قبل ظهور الحاسوب. مثال ذلك نذكر نظم إسقاط: (لاغرانج)، (سخولس)، (يونغ)، (لابورد) [١٠] وغير ذلك. في هذه الإسقاطات، تأخذ الخطوط الإيزومترية شكل قطع ناقص، يمكن تحديد عناصره وتوجيهه حسب شكل وامتداد المنطقة. إلا أن الانطباق التام مع حدود المنطقة لايمكن أن يحصل إلا في نظام إسقاط (تشيبتشيف).



الشكل رقم (١٣٢). الخطوط الإيزومترية في إسقاط لابورد المعدل لمنطقة شبه الجزيرة العربية.