الفصل الأول

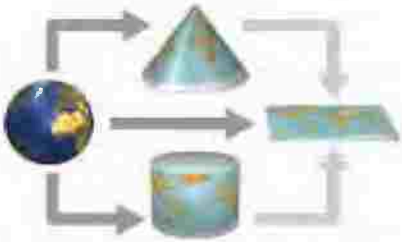
النظرية العامة لنظم الإسقاط

(١,١) نظام إسقاط سطح الإهليلج (الكرة) على مستو [١]

إن تمثيل سطح الأرض على مستو كان يمكن أن يتم بسهولة لو أمكن نشر سطح الإهليلج (الكرة) على مستوٍ بمقياس مصغَّر. إلا أن سطح الإهليلج ثنائي الانحناء، ومن ثمَّ يستحيل نشره دون تمزق أو تشوه.

ومن المعروف أن هناك سطحين قابلين للنشر دون تمزق أو تشوه، حيث يعتبر كل منهما سطح أحادي الانحناء وهما الأسطوانة والمخروط. ومن هنا عرفت نظم الإسقاط الأسطوانية ونظم الإسقاط المخروطية، حيث يتم فيها إسقاط سطح الإهليلج (الكرة) على سطح أسطوانة أو مخروط ماس أو قاطع لسطح الكرة، ومن ثم يتم نشر السطح على مستوٍ. وهناك أيضاً نظم الإسقاط السمتية التي تعتمد على إسقاط سطح الكرة على مستوٍ ماسٍّ أو قاطعٍ لسطح الإهليلج (الكرة).

الشكل رقم (١) يبيِّن هذه النماذج الثلاثة:



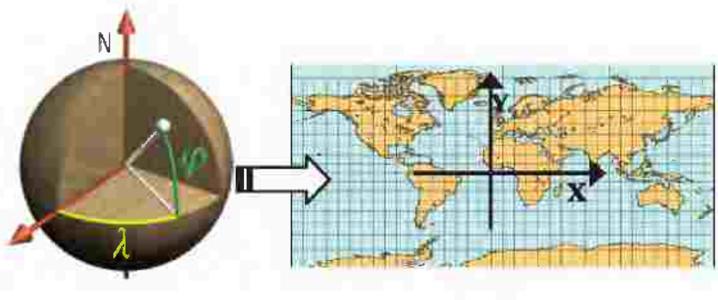
الشكل رقم (١). سطوح الإسقاط [٢].

وتعرف أيضاً نظم إسقاط أخرى تسمى نظم إسقاط تحليلية تعتمد على خاصة تحليلية معينة، أي أنها لا تشكل عملية إسقاط هندسي لسطح على آخر.

بشكل عام يمكن تعريف نظام الإسقاط بأنه علاقة وحيدة التعيين بين نقاط سطح الإهليلج (الكرة) المنسوبة إلى نقطة ما من سطحه بالإحداثيات (φ,λ) ، ونقاط المستوي المنسوبة إلى نقطة ما منه بالإحداثيات (x,y) التي تمثل المسقط (الشكل رقم ٢).

يمكن التعبير عن هذه العلاقة بالشكل التالي:

$$x = f_1(\varphi,\lambda) \quad , \quad y = f_2(\varphi,\lambda) \qquad (1.1)$$



الشكل رقم (٢). مبدأ إسقاط الخرائط [٢].

يتضح من العلاقة (١,١) أن عدد نظم الإسقاط لانهائي. التابعان f_1 ، f_2 يجب أن يكونا معرفين ومستمرين مع مشتقاتهما من الدرجة الأولى والثانية ووحيدي التعيين ومستقلين في كافة نقاط المنطقة المراد حساب نظام الإسقاط من أجلها.

يمكن كتابة العلاقة العكسية بين مجموعتي الإحداثيات من العلاقات (١,١) على الشكل التالي:

$$\varphi = F_1(x,y), \quad \lambda = F_2(x,y) \qquad (١,٢)$$

هنا أيضاً يجب أن تتحقق شروط التابعين f_1, f_2 في التابعين F_1, F_2.

تعتبر العلاقات (١,٢) معادلات خطوط الطول وخطوط العرض. ويمكن أيضاً التعبير من العلاقات (١,٢) عن معادلة خط العرض $\varphi=\varphi_0=const.$ أو خط الطول $\lambda=\lambda_0=const.$ بعلاقات وسيطية:

$$\begin{cases} x = f_1(\varphi_0, \lambda) \quad , \quad y = f_2(\varphi_0, \lambda) \\ x = f_1(\varphi, \lambda_0) \quad , \quad y = f_2(\varphi, \lambda_0) \end{cases} \qquad (١,٣)$$

أو بعلاقات من الشكل:

$$\Phi_1(x,y,\varphi) = 0 \quad , \quad \Phi_2(x,y,\lambda) = 0 \qquad (١,٤)$$

إن مسقط خطوط الطول والعرض في المستوي يُسمى الشبكة الكارتوغرافية. شكل خطوط هذه الشبكة يتبع لعلاقات نظام الإسقاط (١,١) ولدينا الحالات التالية:

- إذا كانت العلاقات (١,١) من الشكل:

$$x = f_1(\lambda) \quad , \quad y = f_2(\varphi)$$

فإن مسقط الشبكة عبارة عن مستقيمات متعامدة.

- وإن كانت العلاقات (١,١) من الشكل:

$$x = f_1(\varphi, \lambda) \quad , \quad y = f_2(\varphi)$$

فإن مسقط الشبكة عبارة عن مجموعة مستقيمات متوازية تمثل خطوط العرض، ومنحنيات تمثل خطوط الطول.

- إذا كانت علاقات نظام الإسقاط من الشكل:

$$x = f_1(\lambda) \quad , \quad y = f_2(\varphi, \lambda)$$

فإن الموازيات (خطوط العرض) ترتسم كمنحنيات. أما خطوط الطول فمستقيمات.

- في الحالة العامة عندما تكون العلاقات من الشكل:

$$x = f_1(\varphi, \lambda) \quad , \quad y = f_2(\varphi, \lambda)$$

فإن كلاً من خطوط الطول والعرض ترتسم منحنيات.

مسقط القطب يمكن أن يكون نقطة أو مستقيماً أو منحنياً؛ ففي حالة تمثيله بنقطة تعطى إحداثياته بالعلاقات:

$$x_p = 0 \quad , \quad y_p = f_1(\varphi_p) \tag{١,٥}$$

وفي حالة كون المسقط مستقيماً فإن:

$$x_p = f_1(\varphi_p, \lambda) \quad , \quad y_p = f_2(\varphi_p) \tag{١,٦}$$

في حالة المنحني:

$$x_p = f_1(\varphi_p, \lambda) \quad , \quad y_p = f_2(\varphi_p, \lambda) \tag{١,٧}$$

يمكن أن ترتسم خطوط الشبكة الكارتوغرافية في الخرائط خطوطاً متناظرة بالنسبة لخط الطول الأساسي أو لخط الاستواء أو أن تكون غير متناظرة.

يمكن التعبير عن شروط التناظر بالعلاقات التالية:

- بالنسبة لنظم الإسقاط المتناظرة حول مسقط خط الطول الأساسي:

$$\begin{cases} y(\varphi, \lambda) = y(\varphi, -\lambda) \\ x(\varphi, \lambda) = -x(\varphi, -\lambda) \end{cases} \tag{١,٨}$$

شرط تعامد مسقط خط الطول الأساسي مع مسقط الموازيات هو:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)_{\lambda c}=0 \qquad (١,٩)$$

- بالنسبة لنظم الإسقاط المتناظرة حول مسقط خط الاستواء:

$$\begin{cases} y(\varphi,\lambda)=-y(-\varphi,\lambda) \\ x(\varphi,\lambda)=\ \ x(-\varphi,\lambda) \end{cases} \qquad (١,١٠)$$

شرط تعامد مسقط خط الاستواء مع مسقطات خطوط الطول هو:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=0}=0 \qquad (١,١١)$$

إن عملية إسقاط سطح الكرة على سطح أسطوانة أو مخروط هي عملية انتقال بين سطحين هندسيين يمكن التعبير عنهما بعلاقات تحليلية. إلا أن ذلك لايعني أن عملية الإسقاط ستعطي تمثيلاً واقعياً لسطح الأرض. ولكننا سنحصل على تشوهات في المسقط. هذه التشوهات بشكل عام هي في الأطوال والمساحات والزوايا. إلا أنه يمكن فرض بعض الشروط على التابعين f_1 ، f_2 في العلاقات (١,١) للحصول على مسقط ذي تشوهات معينة دون أخرى. في الكارتوغرافيا الرياضية تستخدم عدة معايير للتعبير عن التشوهات. فمثلاً تستخدم العلاقة:

$$\mu=\frac{ds'}{ds} \qquad (١,١٢)$$

وهي نسبة طولي عنصرين خطيين، ds' في المستوي، و ds على سطح الإهليلج، وهي التي تسمى علاقة المقياس المحلي الخطي للتعبير عن تشوه الأطوال. كما تستخدم العلاقة:

$$\mu_s=\frac{dF'}{dF} \qquad (١,١٣)$$

وهي نسبة عنصرين مساحيين، dF' في المستوي، و dF على سطح الإهليلج وتسمى علاقة المقياس المحلي المساحي للتعبير عن تشوه المساحات.

(١,٢) المعادلات التفاضلية للمقياس المحلي الخطي

لنعتبر العنصر ds' في مستوي نظام الإسقاط. طول هذا العنصر يمكن التعبير عنه بدلالة مساقطه على المحاور الإحداثية بالعلاقة الآتية:

$$ds'^2 = dx^2 + dy^2 \tag{١,١٤}$$

ولكن حسب العلاقات (١,١):

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda$$

بالتعويض في العلاقة (١,١٤) نحصل على:

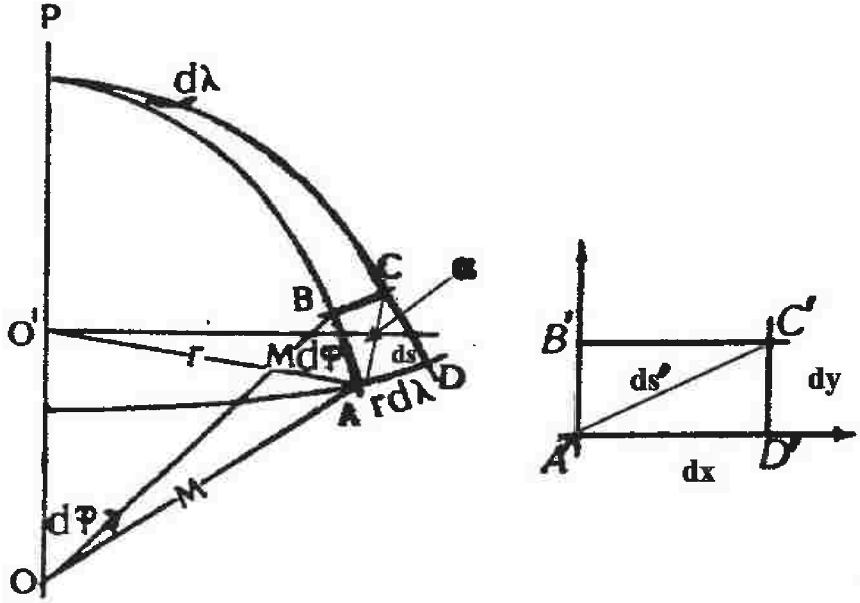
$$ds'^2 = \left[(\frac{\partial x}{\partial \varphi})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \varphi})^2 \right] d\varphi^2 + 2\left[(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right] d\varphi\, d\lambda$$
$$+ \left[(\frac{\partial x}{\partial \lambda})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \lambda})^2 \right] d\lambda^2$$

$$ds'^2 = e\, d\varphi^2 + 2f\, d\varphi\, d\lambda + g\, d\lambda^2 \tag{١,١٥}$$

حيث:

$$\begin{cases} e = (\dfrac{\partial x}{\partial \varphi})^2 + (\dfrac{\partial y}{\partial \varphi})^2 \\ f = \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \dfrac{\partial x}{\partial \lambda} + \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \dfrac{\partial y}{\partial \lambda} \\ g = (\dfrac{\partial x}{\partial \lambda})^2 + (\dfrac{\partial y}{\partial \lambda})^2 \end{cases} \tag{١,١٦}$$

لنعتبر الآن نظير العنصر ds' على سطح الإهليلج هو ds (الشكل رقم ٣).
باعتبار المثلث ABC لامتناهٍ بالصغر يمكن اعتباره مستوياً وأضلاعه القائمة هي أجزاء من خطوط الطول والعرض. ومن ثمَّ:



الشكل رقم (٣). مسقط عنصر لا متناه بالصغر من شبكة خطوط الطول والعرض.

$$\begin{cases} ds^2 = ds_m^2 + ds_p^2 \\ ds_m = M\, d\varphi \\ ds_p = r\, d\lambda \end{cases} \qquad (1.17)$$

حيث M نصف قطر انحناء خط الطول في النقطة A.

r نصف قطر الموازي المار من A.

تحسب r من العلاقة:

$$r = N\cos\varphi \qquad (1.18)$$

حيث N نصف قطر انحناء المقطع الناظمي الرئيس في A .

إن M و N تحسبان من العلاقتين المعروفتين :

$$M=\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}}$$

$$N=\frac{a}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}}$$

لنطبق الآن علاقة المقياس المحلي الخطي (١,١٢) مع اعتبار الاستنتاجات السابقة (١,١٥) و(١,١٧):

$$\mu^2=\frac{ed\varphi^2+2f\,d\varphi d\lambda+g d\lambda^2}{M^2d\varphi^2+r^2d\lambda^2} \tag{١,١٩}$$

نقسم (١,١٩) على $d\lambda^2$ ونستنتج من (الشكل رقم ٣) قيمة النسبة $\frac{d\varphi}{d\lambda}$:

$$\frac{d\varphi}{d\lambda}=\frac{r}{M}c\tan\alpha \tag{١,٢٠}$$

هنا استبدلنا المتحولين $d\varphi$ و $d\lambda$ بمتحول واحد هو اتجاه العنصر α ، أي :

$$\mu^2=\frac{e\frac{r^2}{M^2}c\tan^2\alpha+2f\frac{r}{M}c\tan\alpha+g}{r^2(c\tan^2\alpha+1)}$$

وباعتبار أن $c\tan^2\alpha+1=\cos ec^2\alpha$ نستنتج أن :

$$\mu^2=\frac{e}{M^2}\cos^2\alpha+\frac{f}{Mr}\sin2\alpha+\frac{g}{r^2}\sin^2\alpha$$

فإذا اعتبرنا أن :

$$p=\frac{e}{M^2}\ ,\ Q=\frac{f}{Mr}\ ,\ R=\frac{g}{r^2} \tag{١,٢١}$$

نحصل على علاقة المقياس المحلي الخطي التفاضلية بشكلها العام :

$$\mu^2=p\cos^2\alpha+Q\sin2\alpha+R\sin^2\alpha \tag{١,٢٢}$$

نلاحظ من (١,٢٢) مع اعتبار (١,٢١) ما يلي:

عندما $\alpha = 0$ أو $\alpha = 180^\circ$ فإن اتجاه العنصر ينطبق مع خط الطول، عندها نرمز للمقياس المحلي بالرمز m. أي:

$$\mu = m = \frac{\sqrt{e}}{M} \tag{١,٢٣}$$

وعندما $\alpha = 90^\circ$ أو $\alpha = 270^\circ$ فإن اتجاه العنصر ينطبق مع خط العرض (الموازي) ونرمز عندها للمقياس المحلي بالرمز n ومن ثمَّ:

$$\mu = n = \frac{\sqrt{g}}{r} = \frac{\sqrt{g}}{N\cos\varphi} \tag{١,٢٤}$$

من أجل سطح الكرة:

$$m = \frac{\sqrt{e}}{R} \quad , \quad n = \frac{\sqrt{g}}{R\cos\varphi}$$

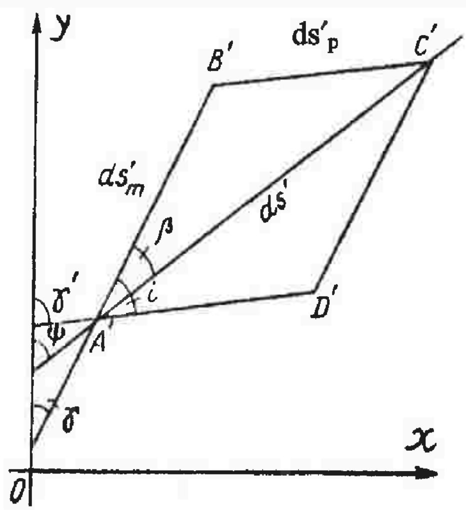
حيث R نصف قطر الأرض. ويجب التمييز بين R نصف قطر الأرض و R في العلاقة (١,٢١).

(١,٣) المعادلات التفاضلية للاتجاه في المسقط

لنعتبر العنصر الخطي ds على الإهليلج في النقطة A باتجاه α بالنسبة لخط الطول ولنعتبر مسقطة في المستوي ds' في نظير النقطة A وهي A' باتجاه β الذي يمثل مسقط الاتجاه α. في الشكل رقم (٤).

$A'B'$ و $D'C'$ عبارة عن مساقط خطوط الطول. أما $A'D'$ و $B'C'$ فهي مسقطات خطوط العرض. الزاوية i هي زاوية تقاطع خطوط الشبكة الكارتوغرافية عند النقطة A'. الزاوية γ تمثل سمت مسقط خط الطول ونرمز لها أيضاً بـ γ_m. الزاوية γ' تمثل سمت خط العرض ونرمز لها أيضاً بـ γ_n. يقصد بكلمة السمت هنا

الاتجاه بالنسبة لشمال الخريطة. بينما β هي السمت الجغرافي بالنسبة لخط الطول. من الشكل رقم (٤)، وبدلالة مساقط العنصر ds' على المحاور المتعامدة يمكن التعبير عن السمت Ψ (سمت العنصر ds' في المسقط) بالعلاقة التالية:



الشكل رقم (٤). مسقط العنصر الخطي في المستوي.

$$\tan\Psi=\frac{dx}{dy}=\frac{\frac{\partial x}{\delta\varphi}d\varphi+\frac{dx}{d\lambda}d\lambda}{\frac{\delta y}{\delta\varphi}d\varphi+\frac{\delta y}{\delta\lambda}d\lambda} \qquad (١,٢٥)$$

نعبر عن قيم γ_m و γ_n بنفس العلاقة وذلك باعتبار أن $\varphi=const.$ من أجل مسقط خط العرض، و $\lambda=const.$ من أجل مسقط خط الطول، فنحصل على:

$$\tan\gamma_m=\frac{\frac{\partial x}{\partial\varphi}}{\frac{\partial y}{\partial\varphi}} \qquad (١,٢٦)$$

$$\tan\gamma_n = \frac{\dfrac{\partial x}{\partial \lambda}}{\dfrac{\partial y}{\partial \lambda}} \qquad (١,٢٧)$$

ومن الشكل رقم (٤) لدينا $\beta = \Psi - \gamma_m$ أي أن:

$$\tan\beta = \frac{\tan\Psi - \tan\gamma_m}{1 + \tan\Psi\ \tan\gamma_m} \qquad (١,٢٨)$$

نعوض في (١,٢٨) ما ورد في (١,٢٥) و (١,٢٦) فنحصل على العلاقة التالية:

$$\tan\beta = \frac{\dfrac{\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}d\varphi + \dfrac{\partial x}{\partial\lambda}d\lambda}{\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}d\varphi + \dfrac{\partial y}{\partial\lambda}d\lambda} - \dfrac{\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}}{\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}}}{1 + \dfrac{\left(\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}d\varphi + \dfrac{\partial x}{\partial\lambda}d\lambda\right)\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}}{\left(\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}d\varphi + \dfrac{\partial y}{\partial\lambda}d\lambda\right)\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}}}$$

$$\tan\beta = \frac{\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}d\varphi + \dfrac{\partial x}{\partial\lambda}\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}d\lambda - \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}d\varphi - \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\dfrac{\partial y}{\partial\lambda}d\lambda}{\left(\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 d\varphi + \left(\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2 d\varphi + \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\dfrac{\partial x}{\partial\lambda}d\lambda + \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\dfrac{\partial y}{\partial\lambda}d\lambda}$$

وباعتبار (١,١٦):

$$\tan\beta = \frac{\left(\dfrac{\partial x}{\partial\lambda}\dfrac{\partial y}{\partial\varphi} - \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\dfrac{\partial y}{\partial\lambda}\right)d\lambda}{e\,d\varphi + f\,d\lambda}$$

نرمز للمقدار بين القوسين بالرمز h. أي:

$$h = \frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial y}{\partial\varphi} - \frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\lambda} \qquad (١,٢٩)$$

ونقسم العلاقة الناتجة على $d\lambda$ فنحصل على:

$$\tan\beta = \frac{h}{e\frac{d\varphi}{d\lambda}+f} \qquad (١,٣٠)$$

إلا أن المقدار $\frac{d\varphi}{d\lambda}$ سبق وعبرنا عنه بالعلاقة (١,٢٠) . إذاً :

$$\tan\beta = \frac{M\,h}{e\,r\,\mathrm{ctan}\,\alpha + M\,f} \qquad (١,٣١)$$

نكون بذلك قد ربطنا قيمة السمت α على الإهليلج بمسقطه في المستوي β .

أما بالنسبة لزاوية التقاطع i فهي في المسقط تساوي :

$$i = \gamma_n - \gamma_m$$

$$\tan\ i = \frac{\tan\gamma_n - \tan\gamma_m}{1+\tan\gamma_n\ \tan\gamma_m} = \frac{\dfrac{\frac{\partial x}{\partial\lambda}}{\frac{\partial y}{\partial\lambda}} - \dfrac{\frac{\partial x}{\partial\varphi}}{\frac{\partial y}{\partial\varphi}}}{1+\dfrac{\frac{\partial x}{\partial\lambda}}{\frac{\partial y}{\partial\lambda}}\ \dfrac{\frac{\partial x}{\partial\varphi}}{\frac{\partial y}{\partial\varphi}}} -$$

$$\tan\ i = \frac{\frac{\partial x}{\partial\lambda}\ \frac{\partial y}{\partial\varphi} - \frac{\partial x}{\partial\varphi}\ \frac{\partial y}{\partial\lambda}}{\frac{\partial x}{\partial\varphi}\ \frac{\partial x}{\partial\lambda} + \frac{\partial y}{\partial\varphi}\ \frac{\partial y}{\partial\lambda}} = \frac{h}{f} \qquad (١,٣٢)$$

ويمكن استنتاج النسب المثلثية الأخرى بالشكل التالي :

$$\sin^2 i = \frac{\tan^2 i}{1+\tan^2 i} = \frac{\frac{h^2}{f^2}}{1+\frac{h^2}{f^2}} = \frac{h^2}{f^2+h^2} = \frac{h^2}{eg} \qquad (١,٣٣)$$

$$\cos^2 i = \frac{1}{1+\tan^2 i} = \frac{1}{1+\frac{h^2}{f^2}} = \frac{f^2}{f^2+h^2} = \frac{f^2}{eg} \qquad (١,٣٤)$$

من(١,٣٢) نستنتج فيما إذا كانت i في الربع الأول أو الثاني. كما نستنتج شرط تعامد الشبكة الكارتوغرافية وهو $f=0$.

يعبر أحياناً عن زاوية تقاطع خطوط الشبكة الكارتوغرافية بالزاوية ε التي تساوي انحراف الزاوية i عن قيمة $90°$ أي:

$$\varepsilon = i - 90°$$

ومن ثم:

$$\tan i = \tan(90° + \varepsilon) = \frac{h}{f}$$

$$\tan \varepsilon = -\frac{f}{h} \qquad (١,٣٥)$$

إذاً حتى تكون الشبكة متعامدة يجب أن تكون $\varepsilon = 0$ وذلك يحصل عندما $f=0$.

لنعد الآن إلى العلاقة (١,٢٢) التي تعطي المقياس المحلي الخطي بدلالة السمت α على سطح الإهليلج. إن ما يلزمنا بالواقع هو علاقة تعطي المقياس المحلي الخطي بدلالة السمت الجغرافي β الذي يمكن قياسه مباشرة على الخريطة (مستوي نظام الإسقاط).

من العلاقة (١,٣١) يمكن صياغة العلاقة التالية:

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{h}{e}\,ctan\,\beta - \frac{f}{e} \qquad (١,٣٦)$$

نعوض هذه القيمة في بسط العلاقة (١,١٩) بعد تقسيم العلاقة على $d\lambda^2$ فنجد قيمة البسط كما يلي:

$$e\left[\frac{h}{e}ctan\beta-\frac{f}{e}\right]^2+2f\left[\frac{h}{e}ctan\beta-\frac{f}{e}\right]+g$$

بفك الأقواس والإصلاح واعتبار أن $eg=f^2+h^2$ نستنتج أن قيمة البسط تساوي:

$$\frac{h^2}{e\sin^2\beta}$$

نعوض هذه القيمة في العلاقة (١,٢٢) ونقلب الطرفين فنحصل على:

$$\frac{1}{m^2}=\frac{e\,sin^2 b}{h^2}\left[M^2(\frac{h}{e}\ ctan\, b-\frac{f}{e})^2+r^2\right] \qquad (١,٣٧)$$

بفك الأقواس والإصلاح نحصل على:

$$\frac{1}{\mu^2}=p_1\cos^2\beta+Q_1\sin2\beta+R_1\sin^2\beta \qquad (١,٣٨)$$

حيث:

$$\begin{cases} p_1=\dfrac{M^2}{e} \quad , \quad Q_1=-\dfrac{M^2 f}{e\,h} \\ R_1=\dfrac{M^2 f^2+e^2r^2}{e\,h^2} \end{cases} \qquad (١,٣٩)$$

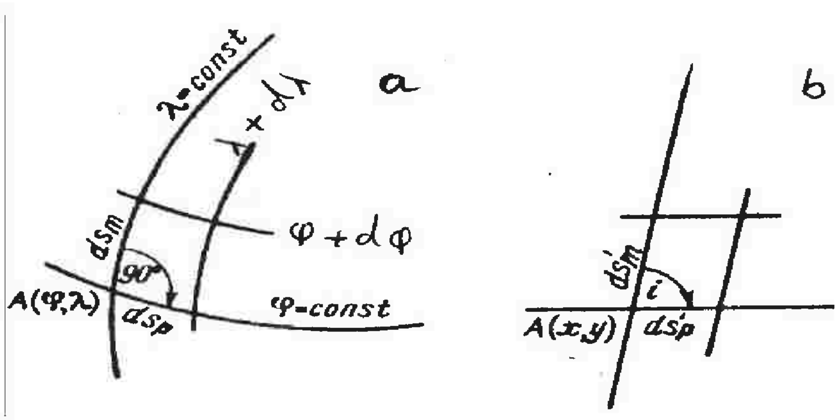
وبذلك حصلنا على علاقة متوافقة من حيث الشكل مع العلاقة (١,٢٢) تمكننا من حساب المقياس المحلي الخطي اعتماداً على السمت الجغرافي للعنصر الخطي في نظام الإسقاط.

(١,٤) المعادلات التفاضلية للمقياس المحلي المساحي

لنعتبر شبه منحرف لامتناه في الصغر من سطح الإهليلج محدود بخطي العرض φ, $\varphi+d\varphi$ وخطي الطول λ و $\lambda+d\lambda$ أضلاعه ds_m, ds_p ، ومساحته

$dF = ds_m\ ds_p$. بإسقاط هذا الشكل على مستوٍ يمكن- وباعتباره لامتناهٍ في الصغر- اعتباره متوازي أضلاع، أضلاعه ds'_m, ds'_p وهي تمثل مساقط ds_m, ds_p (الشكل رقم ٥). الزاوية بين هذين الضلعين تساوي i مساحة هذا العنصر في المستوي يمكن التعبير عنها بالعلاقة :

$$dF' = ds'_m\ ds'_p \sin i \qquad (1,40)$$



الشكل رقم (٥). مسقط عنصر مساحي لا متناهٍ بالصغر.

ومن ثم فالمقياس المحلي المساحي حسب (١,١٣) يكون :

$$\mu_s = \frac{dF'}{dF} = \frac{ds'_m\ ds'_p \sin i}{ds_m\ ds_p} \qquad (1,41)$$

ولكن حسب (١,١٥) من أجل خط الطول لدينا $d\lambda = 0$ أي :

$$ds'_m = \sqrt{e}\ d\varphi$$

ومن أجل خط العرض لدينا $d\varphi = 0$ أي :

$$ds'_p = \sqrt{g}\ d\lambda$$

ومن (١،١٧):

$$ds_m = Md\varphi \,, ds_p = rd\lambda$$

ومن (١،٣٣):

$$\sin i = \sin\beta_{\alpha=90} = \frac{h}{\sqrt{eg}}$$

إذاً العلاقة (١،٤١) تأخذ الشكل:

$$\mu_s = \frac{\sqrt{e}\, d\varphi \sqrt{g}\, d\lambda\, h}{M\, d\varphi\, r\, d\lambda \sqrt{e\, g}} = \frac{h}{M\, r} \qquad (١،٤٢)$$

يمكن أيضاً، اعتماداً على تعريف المقياس المحلي الخطي (١،١٢)، كتابة علاقة المقياس المحلي المساحي بشكل آخر انطلاقاً من (١،٤١):

$$\mu_s = m\,.n\,.\sin i \qquad (١،٤٣)$$

عندما تكون الشبكة الكارتوغرافية متعامدة فإن:

$$\mu_s = m\, n \qquad (١،٤٤)$$

(١،٥) دراسة تغيرات المقياس المحلي الخطي بالنسبة للاتجاه

لنعد للعلاقة (١،٢٢):

$$\mu^2 = p\cos^2\alpha + Q\sin 2\alpha + R\sin^2\alpha$$

نلاحظ أن المقياس يرتبط بالاتجاه α على الإهليلج. لنبحث عن القيم الحدية لهذا المقياس من خلال اشتقاق المعادلة السابقة بالنسبة للمتحول α مع اعتبار أن $R,\ Q,\ p$ مقادير مستقلة عن هذا المتحول.

$$\frac{d\mu^2}{d\alpha} = (R-P)\sin 2\alpha + 2Q\cos 2\alpha = 0 \qquad (١،٤٥)$$

إذاً

$$\tan 2\alpha = \frac{2Q}{P-R}$$

وباعتبار (١,٢١):

$$\tan 2\alpha = \frac{2f\ M\ r}{e\,r^2 - g\,M^2} \qquad (١,٤٦)$$

هنا نحصل على حلين لـ α يختلفان عن بعضهما بالمقدار $90°$.

لندرس المشتق الثاني انطلاقاً من (١,٤٥):

$$\frac{d^2\mu^2}{d\alpha^2} = 2(R-P)\ \cos 2\alpha - 4Q\ \sin 2\alpha$$

$$= \left[(R-P) - 2\,Q\ \tan 2\alpha\right] 2\ \cos 2\alpha \qquad (١,٤٧)$$

إن ما داخل القوسين في العلاقة (١,٤٧) لا يؤثر على إشارة العلاقة وذلك من أجل حلين لـ α هما $\alpha, \alpha+90°$. إذاً الإشارة تابعة للمقدار $\cos 2\alpha$. ومن أجل الحلين المذكورين نحصل على إشارتين متعاكستين، أي أن هذين الحلين يرافقان قيمتين حديتين للمقياس المحلي الخطي، أعظمية وأصغرية.

والآن لندرس الحالة في المستوي أي لنختبر ما إذا كانت القيم الحدية للمقياس المحلي في مستوي نظام الإسقاط متعامدة أو لا. بعبارة أخرى لندرس مسقط الاتجاهين $\alpha, \alpha+90°$.

إن الاتجاهين $\alpha, \alpha+90°$ حسب العلاقة (١,٣١) يوافقان:

$$\begin{cases} \tan\ \beta_\alpha = \dfrac{M\ h}{er\,\text{ctan}\ \alpha + M\,f} \\[2ex] \tan\ \beta_{\alpha+90} = \dfrac{M\ h}{e\ r\ \text{ctan}\,(\alpha+90°) + M\,f} = \dfrac{M\ h}{-e\ r\ \ \tan\alpha + M\,f} \end{cases} \qquad (١,٤٨)$$

فإذا كان الاتجاهان β_α ، $\beta_{\alpha+90}$ متعامدين فيجب أن يكون جداء الميلين مساوياً /-١/.

$$\tan\ \beta_\alpha\ \tan\ \beta_{\alpha+90} = \frac{-M^2\,h^2}{e^2\,r^2 + ef\ M\ r\,(\tan\ \alpha - \text{ctan}\ \alpha) - M^2 f^2} \qquad (١,٤٩)$$

ولكن حسب (١,٤٦):

$$c\tan 2\alpha = \frac{er^2 - gM^2}{2fMr}$$

نعوض في (١,٤٩) فنجد:

$$\tan\beta_\alpha \tan\beta_{\alpha+90} = \frac{h^2}{f^2 - eg} \qquad (١,٥٠)$$

بتعويض قيم g,e,f من العلاقات (١,١٦) نجد أن مقام العلاقة (١,٥٠) يساوي $-h^2$ ونستنتج أن:

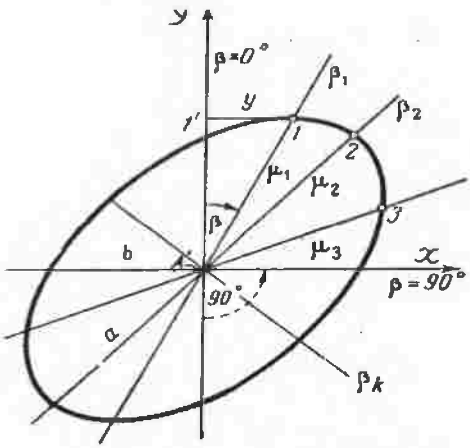
$$\tan\beta_\alpha \tan\beta_{\alpha+90} = -1 \qquad (١,٥١)$$

أي أن الاتجاهين الحديين على الإهليلج متعامدان ويقابلان في المسقط اتجاهين حديين أيضاً متعامدين. نسمي هذين الاتجاهين في المسقط بالاتجاهين الرئيسين ونرمز للمقياس الأعظمي بـ a وللأصغري بـ b وهما منطبقان مع الاتجاهين الرئيسين. حتى الآن عرفنا أن المقياس المحلي الخطي في نقطة ما من مستوي نظام الإسقاط هو تابع للاتجاه α على الإهليلج حسب العلاقة (١,٢٢) وتابع للاتجاه β في المستوي حسب (١,٣٨)، وعرفنا أن هناك قيمتين حديتين عظمى وصغرى للمقياس المحلي الخطي وفق اتجاهين متعامدين على الإهليلج حسب (١,٤٧) وفي المستوي حسب (١,٥١). ولكن ما طبيعة توزع التشوهات أو توزع قيم المقياس المحلي الخطي بين القيم الحدية؟ سندرس ذلك في الفقرة التالية.

(١,٦) قطع التشوهات

لنأخذ على سطح الإهليلج دائرة لا متناهية في الصغر، ذات نصف قطر واحدي، ولنبحث في مسقطها في المستوي. نأخذ في هذه الدائرة عدة اتجاهات

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.... مسقط هذه الاتجاهات هو $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.... والمقياس المحلي الخطي حسب هذه الاتجاهات هو μ_1, μ_2, μ_3.... نحمل هذه القيم للمقياس على الاتجاهات في المسقط حسب الشكل رقم (٦) وذلك اعتباراً من مبدأ الإحداثيات o' الذي يمثل مسقط مركز الدائرة o ، ومع اعتبار أن oy عبارة عن مسقط خط الطول المار بـ o الذي نقيس منه السموت β_i. نصل بين النقاط الناتجة؛ فنحصل على منحنٍ يجسد بيانياً توزع قيم المقياس المحلي بين الاتجاهين الرئيسين.



الشكل رقم (٦). قطع التشوهات.

من الشكل رقم (٦) يمكن كتابة العلاقات التالية:

$$x_i = \mu_i \sin\beta_i \quad , \quad y_i = \mu_i \cos\beta_i$$

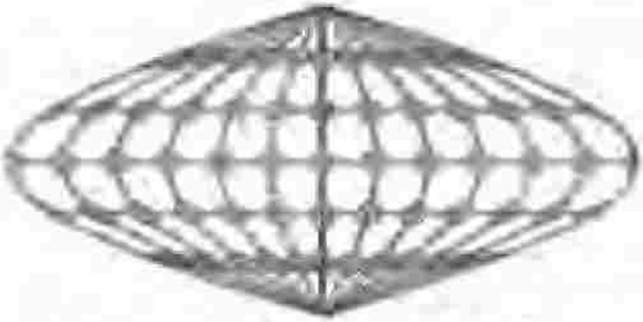
من هذه العلاقات نعوض قيم $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\sin 2\beta$ في العلاقة (١,٣٨) حيث:

$$\sin\beta = \frac{x}{\mu} \ , \ \cos\beta = \frac{y}{\mu} \ , \ \sin 2\beta = \frac{2xy}{\mu^2}$$

لنحصل على الشكل النهائي لمعادلة المنحني المغلق لقيم المقياس المحلي:

$$P_1 y^2 + 2Q x y + R_1 x^2 = 1 \qquad (١,٥٢)$$

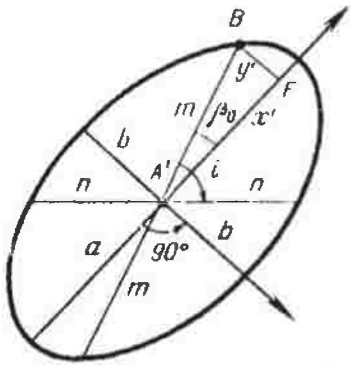
هذه المعادلة عبارة عن معادلة قطع ناقص بالحالة العامة (عدم انطباق المحاور الإحداثية مع محاور القطع الرئيسة). نستنتج مما سبق أن أي عملية إسقاط لدائرة لامتناهية بالصغر من سطح الإهليلج على مستوٍ ستعطي قطعاً ناقصاً، باستثناء نظم الإسقاط التي تحافظ على تشابه الأشكال اللامتناهية في الصغر (المطابقة). يسمى هذا القطع بقطع التشوهات أو قطع (TISSOT). المحاور الرئيسة لهذا القطع عبارة عن مسقط قطرين متعامدين في الدائرة الأصل. اتجاها هذين المحورين يسميان بالاتجاهين الرئيسين لأن المقياس المحلي فيهما يأخذ القيم الحدية. الشكل رقم (٧) يوضح مسقط عدة دوائر متساوية. في الشكل يلاحظ تشوه الأطوال الذي تجسد بالمساحات وتشوه الأشكال الذي تجسد بشكل القطوع واتجاهاتها.



الشكل رقم (٧). توزع قطع التشوهات بالخارطة.

كما ذكرنا سابقاً ليس من الضروري أن تنطبق محاور القطع الرئيسة مع اتجاه مسقط خطوط الطول والعرض بسبب تشوه الاتجاه، وهذا ما يظهر في

الـشكل رقـم (٧). أمـا أنـصاف أقطـار القطـع المتطابقـة مـع مـسقطات خطـوط الطول والعرض فقيمتها n , m كما يظهر في الشكل رقم (٨).



الشكل رقم (٨).عناصر قطع التشوهات.

إن قيم n,m يمكن حسابها بسهولة من معادلات نظام الإسقاط (١,٢٣) و(١,٢٤) إذاً لنبحث عن علاقات تربط n , m مع القيم الحدية b,a بحيث يمكننا حساب التشوهات الأعظمية في كل نقطة من مستوي نظام الإسقاط.

سنعتمد على فرضيات (أبولون) في حل هذه المسألة وهي :

$$\begin{cases} m^2 + n^2 = a^2 + b^2 \\ m\ n \sin i = a\ b \end{cases} \qquad (١,٥٣)$$

نحل المعادلتين حلاً مشتركاً فنلاحظ بالجمع والطرح :

$$m^2+n^2+2mn\sin i=(a+b)^2$$

$$m^2+n^2-2mn\sin i=(a-b)^2$$

لنعتبر المقادير التالية :

$$\begin{cases} A = a+b = \sqrt{m^2+n^2+2m\ n \sin i} \\ B = a-b = \sqrt{m^2+n^2-2m\ n \sin i} \end{cases} \qquad (١,٥٤)$$

ومن ثم:

$$a=\frac{A+B}{2}\ ,\quad b=\frac{A-B}{2} \tag{١,٥٥}$$

حيث من العلاقة (١,٣٣):

$$\sin i=\frac{h}{\sqrt{eg}}$$

تمكننا العلاقات (١,٥٥) من حساب المقياس الأعظمي والأصغري أي التشوهات الحدية بدلالة التشوهات وفق مساقط خطوط الطول والعرض.

(١,٧) التشوه الأعظمي بالزوايا

من المعلوم أن أي زاوية تتشكل بين اتجاهين محددين. فمن أجل كل اتجاه هناك تشوه سيحصل عند الانتقال من سطح الإهليلج إلى سطح المستوي (نظام الإسقاط). والعلاقة التي تعبر عن هذا التشوه سبق أن مرت معنا وهي العلاقة (١,٣١) التي يمكن كتابتها بالشكل:

$$tan\beta=\frac{M\,h\,tan\,\alpha}{er+M\,f\,tan\,\alpha}$$

ومن أجل نظم الإسقاط ذات الشبكة المتعامدة لدينا الشرط $f=0$ من العلاقة (١,٣٥) ومن ثم:

$$tan\beta=\frac{M\,h\,tan\,\alpha}{er}=\frac{M\sqrt{ge}}{er}tan\,\alpha$$

وحسب العلاقات (١,٥٣):

$$\tan\,\beta=\frac{n}{m}\,\tan\alpha=\frac{b}{a}\,\tan\alpha \tag{١,٥٦}$$

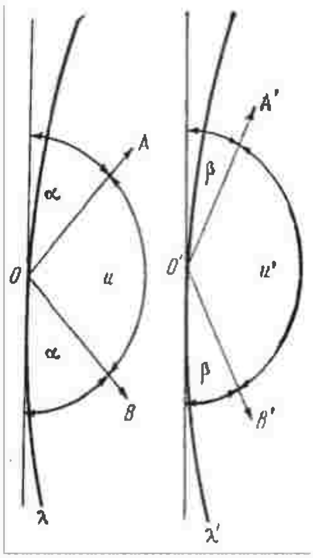
هذه العلاقة يمكن استخدامها بدل العلاقة (١,٣١) فقط عندما تكون شبكة نظام الإسقاط متعامدة؛ وذلك لأن أقطار قطع التشوهات b,a تنطبق مع مسقطات خطوط الطول والعرض.

لنعتبر الشكل رقم (٩) الذي يبين الزاوية u على سطح الإهليلج ومسقطها u' في المستوي. اعتبرنا أضلاع كل زاوية متناظرة بالنسبة لسمتها مع خط الطول أو مع مسقطه وهي الحالة التي تحقق أكبر قيمة في الفرق بين α و β [٥].

من العلاقة (١,٥٦) يمكن صياغة العلاقات التالية:

$$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{a-b}{a}\tan\alpha$$

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{a+b}{a}\tan\alpha$$



الشكل رقم (٩). التشوه الأعظمي بالزوايا.

ومنه وباعتبار العلاقات بين النسب المثلثية:

$$\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a-b}{a+b} \qquad (1,57)$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \frac{a-b}{a+b}\sin(\alpha+\beta) \qquad (1,58)$$

القيمة الأعظمية للفرق $\alpha-\beta$ سيكون عندما تأخذ القيمة $\alpha+\beta=90°$ ، عندها:

$$\sin(\alpha_0-\beta_o) = \frac{a-b}{a+b} \qquad (1,59)$$

في الواقع هذا يمثل الفرق بين اتجاهين β_o, α_o.

أما لحساب الفرق بين زاويتين وحسب الشكل رقم (٩) فإن:

$$\alpha_o - \beta_o = \frac{\omega}{2}$$

حيث ω التشوه الأعظمي بالزوايا. إذاً تكتب العلاقة (١,٥٩) بالشكل التالي:

$$\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{a-b}{a+b} \qquad (1,60)$$

وقيم الزوايا الموافقة للتشوه الأعظمي تحسب من العلاقتين:

$$\alpha_0+\beta_0=90^0$$

$$\alpha_0-\beta_0=\frac{\omega}{2}$$

أي:

$$\alpha_0 = 45^0+\frac{\omega}{4} \quad , \quad \beta_0 = 45^0-\frac{\omega}{4} \qquad (1,61)$$

ونحصل أيضاً على علاقة أخرى لحساب ω تعتبر شكلاً آخر للعلاقة (١,٦٠) من (١,٦١) مع اعتبار (١,٥٦):

$$\tan\left(45^0-\frac{\omega}{4}\right)=\frac{b}{a}\tan\left(45^0+\frac{\omega}{4}\right)$$

وبما أن:

$$tan(45^0+\frac{\omega}{4})=\frac{1}{tan(45^0-\frac{\omega}{4})}$$

إذاً :

$$tan(45^0+\frac{\omega}{4})=\sqrt{a/b} \quad (1-62)$$

(١,٨) نظم الإسقاط المكافئة

في نظم الإسقاط المكافئة تتم المحافظة على العلاقة بين المساحات في الخريطة والمساحات المطابقة لها على سطح الإهليلج. إذاً المقياس المحلي المساحي في نظم الإسقاط هذه يجب أن يكون ثابتاً وغالباً يساوي الواحد أي :

$$\mu_s = const. \quad (\mu_s = 1)$$

ولكن حسب العلاقة (١,٤٢) وباعتبار $\mu_s = 1$ يكون :

$$h = Mr$$

أي من أجل سطح الإهليلج وحسب (١,٢٩) :

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \varphi}-\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda}=M\,r \qquad (١,٦٣)$$

ومن أجل سطح الكرة :

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \varphi}-\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda}=R^2\cos\varphi \qquad (١,٦٤)$$

(١,٩) نظم الإسقاط المطابقة

تعتبر نظم الإسقاط المطابقة أكثر أنواع نظم الإسقاط استخداماً. ففي نظم الإسقاط هذه تتساوى الزوايا المقاسة على الواقع مع نظيرتها في الخريطة. مثل هذه

النظم تستخدم في الخرائط العسكرية التي تتطلب مثلاً التحضير لرمايات المدفعية والصواريخ وخرائط الملاحة البحرية وخرائط عمليات التثليث بالمسح العقاري.

طبعاً، في نظم الإسقاط هذه يجب أن تكون الشبكة الكارتوغرافية متعامدة أي $\varepsilon = 0$. ولكن هذا الشرط غير كاف بل يجب أن تكون قيم التشوه في الزوايا ω معدومة في كل نقاط نظام الإسقاط. فمن العلاقة (١,٦٠) يجب أن يكون $a - b = 0$ ومن ثم $a = b$. هذا يعني أن يكون مسقط دائرة لامتناهية في الصغر أيضاً دائرة لامتناهية في الصغر. بعبارة أخرى أن يكون المقياس المحلي الطولي مستقلاً عن الاتجاه. إن الشرطين السابقي الذكر يتلخصان بعلاقة واحدة هي العلاقة (١,٤٥) التي تعني استقلالية μ عن α:

$$\frac{d\mu^2}{d\alpha} = (R-P)sin2\alpha + 2Qcos2\alpha = 0$$

هذه العلاقة تتحقق فقط عندما $Q = 0$ أي $\frac{f}{Mr} = 0$

ومن ثم:

$$f = 0 \qquad (١,٦٥)$$

وعندما $R = P$ أي $\frac{e}{M^2} = \frac{g}{r^2}$

ومن ثم:

$$m = n \qquad (١,٦٦)$$

فالشرط (١,٦٥) يعني أن تكون الشبكة متعامدة. والشرط (١,٦٦) أن يتساوى المقياس المحلي الخطي بجميع الاتجاهات ومنها اتجاه الطول والعرض.

نعوض في(١,٦٥) و(١,٦٦) قيم f و e و g من العلاقات (١,١٦):

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda}+\frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda}=0 \qquad (١,٦٧)$$

$$\frac{1}{M^2}\left[(\frac{\partial x}{\partial \varphi})^2+(\frac{\partial y}{\partial \varphi})^2\right]=\frac{1}{r^2}\left[(\frac{\partial x}{\partial \lambda})^2+(\frac{\partial y}{\partial \lambda})^2\right] \qquad (١,٦٨)$$

من العلاقة (١,٦٨) نضع المقدار $(\frac{\partial x}{\partial \varphi})^2$ خارج القوس بالطرف الأيمن والمقدار $(\frac{\partial y}{\partial \lambda})^2$ خارج القوس بالطرف الأيسر فنحصل على:

$$\frac{1}{M^2}(\frac{\partial y}{\partial \varphi})^2\left[1+\frac{(\frac{\partial x}{\partial \varphi})^2}{(\frac{\partial y}{\partial \varphi})^2}\right]=\frac{1}{r^2}(\frac{\partial x}{\partial \lambda})^2\left[1+\frac{(\frac{\partial y}{\partial \lambda})^2}{(\frac{\partial x}{\partial \lambda})^2}\right]$$

وبملاحظة (١,٦٧):

$$(\frac{\partial x/\partial \varphi}{\partial y/\partial \varphi})^2=(\frac{\partial y/\partial \lambda}{\partial x/\partial \lambda})^2$$

نجد أن:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}=\pm\frac{r}{M}\frac{\partial y}{\partial \varphi} \qquad (١,٦٩)$$

بالتعويض في (١,٦٧) نحصل على:

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda}=\pm\frac{r}{M}\frac{\partial x}{\partial \varphi} \qquad (١,٧٠)$$

بالنسبة للإشارات التي يجب اعتمادها، هناك علاقة يجب أن تتحقق بين هذه التفاضلات الجزئية والمتمثلة بقيمة h التي يجب أن تكون موجبة دوماً، حسب تعريف المقياس المحلي المساحي، وحسب العلاقة (١,٤٢) ومن ثم نحصل على ما يلي:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}=+\frac{r}{M}\frac{\partial y}{\partial \varphi} \qquad (١,٧١)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda}=-\frac{r}{M}\frac{\partial x}{\partial \varphi} \qquad (١,٧٢)$$

تعتبر العلاقتان (١,٧١) و(١,٧٢) الشكل النهائي لشرطي المطابقة اللتين تسميان بمعادلتي (كوشي- ريمان).

(١,١٠) نظم الإسقاط المتساوية المسافات

هناك نوعان من هذه النظم. الأول هو نظام الإسقاط ذو الشبكة المتساوية المسافات حسب خطوط الطول. والثاني نظام الإسقاط ذو الشبكة المتساوية المسافات حسب خطوط العرض. في النوع الأول يجب أن يتحقق شرط التساوي بين مسقط خط الطول وخط الطول نفسه على سطح الإهليلج أي $m=1$ ويمكن التعبير عن ذلك حسب (١,٢٣) كما يلي:

$$(\frac{\partial x}{\partial \varphi})^2+(\frac{\partial y}{\partial \varphi})^2 = M^2 \qquad (١,٧٣)$$

أما بالنسبة للنوع الثاني فيجب أن يتحقق الشرط $n=1$ أي تساوي مسقط خط العرض وخط العرض نفسه حسب (١,٢٤). إذاً:

$$(\frac{\partial x}{\partial \lambda})^2+(\frac{\partial y}{\partial \lambda})^2 = r^2 \qquad (١,٧٤)$$

(١,١١) تطبيق حول النظرية العامة لنظم الإسقاط

لندرس نظام الإسقاط المعطى بالعلاقات التالية:

$$x=R\cos\varphi\sin\lambda \ , \ y=R\cos\varphi\cos\lambda \quad (a)$$

- تحديد شكل شبكة خطوط الطول والعرض في المسقط:

لو كانت y تابعة للعرض φ و x تابعة للطول λ فقط، مثلاً:

$$x = R\lambda \quad , \quad y = R\varphi$$

لكانت معادلات نظام الإسقاط هي نفسها معادلات مسقطات خطوط الطول والعرض. ولكن وباعتبار x و y تابعتان لكل من φ و λ، فإن تحديد معادلات مسقطات خطوط الطول والعرض يتم على أساس حذف أحد المتحولين من العلاقات (a). فبحذف φ نحصل على العلاقة:

$$F_1(x, y, \lambda) = 0 \qquad (b)$$

التي تمثل معادلة خطوط الطول في المسقط. وبحذف λ نحصل على العلاقة:

$$F_2(x, y, \varphi) = 0$$

التي تمثل معادلة خطوط العرض في المسقط. لنطبق ذلك بالنسبة للعلاقات (a) فنحصل على:

$$y = x\, c\tan \lambda$$

وهي معادلة حزمة مستقيمات مارة بمبدأ الإحداثيات. وبما أن هذه المستقيمات هي مساقط خطوط الطول حسب (b)، فإن مبدأ الإحداثيات هو مسقط القطب.

نحذف λ من (a) بتربيع وجمع المعادلتين فنحصل على:

$$x^2 + y^2 = R^2 \cos^2 \varphi$$

وهي معادلة حزمة دوائر متمركزة في مسقط القطب.

عند الابتعاد عن القطب باتجاه الاستواء، أي عندما تتناقص φ من $90°$ إلى $o°$ فإن نصف قطر مسقط الموازي يزداد بالتناسب مع المقدار $\cos\varphi$. أما المسافة بين مساقط خطوط العرض فتتناقص. طبعاً المنطقة التي يمكن تمثيلها بنظام الإسقاط هذا لاتتجاوز نصف الكرة $(\cos 0 = 1)$ لأنه بتناقص φ ستحصل ازدواجية في المسقط.

وهذا غير مقبول في الخرائط الجغرافية ولكن يمكن قبول ذلك في الخرائط الفلكية حيث تكون عناصر النصف الجنوبي للكرة بلون مخالف لما هو عليه في النصف الشمالي.

- ندرس تعامد الشبكة حسب العلاقة (١,٦٥):

$$f=\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda}+\frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda}=0$$

التفاضلات الجزئية نحسبها من العلاقات (a):

$$\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \varphi}=-R\sin\varphi\ \sin\lambda\ ,\ \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \lambda}=R\cos\varphi\ \cos\lambda$$

$$\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \varphi}=-R\sin\varphi\ \cos\lambda\ ,\ \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \lambda}=R\cos\varphi\ \sin\lambda$$

نجد من هذه العلاقات أن $f=0$ أي أن الشبكة متعامدة.

- تحديد المقياس المحلي الخطي b,a,n,m والمقياس المحلي المساحي μ_s وتشوه الزوايا الأعظمي ω.

حسب (١,٢٣) وباعتبار التفاضلات الجزئية المحسوبة آنفاً نجد أن:

$$m=\frac{\sqrt{e}}{R}=\frac{\left[(\frac{\partial x}{\partial \varphi})^2+(\frac{\partial y}{\partial \varphi})^2\right]^{\frac{1}{2}}}{R}=\sin\varphi$$

إذاً في نقطة القطب حيث $\varphi=90^\circ$ نجد أن $m=1$ ويبدأ بالتناقص بالتوجه نحو الاستواء حسب التابع $\sin\varphi$ ليصبح $\mathrm{m}=0$ عندما $\varphi=0$.

من العلاقة(١,٢٤) يمكن حساب n:

$$n=\frac{\sqrt{g}}{R\cos\varphi}=\frac{\left[(\frac{\partial x}{\partial \lambda})^2+(\frac{\partial y}{\partial \lambda})^2\right]^{\frac{1}{2}}}{R\cos\varphi}=1$$

أي أن مسقط خطوط العرض بدون تشوه.

تحسب التشوهات الحدية من علاقات المقياس الحدي :

$$a = \frac{(A+B)}{2} \quad , \quad b = \frac{(A-B)}{2}$$

$$A = \sqrt{m^2 + n^2 + 2mn\sin i} \quad , \quad B = \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn\sin i}$$

$$\sin i = \frac{h}{\sqrt{eg}} \quad , \quad h = \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

بالحساب نحصل على $i = 90°$ وهذا محقق بشكل الشبكة كونها دوائر ومستقيمات منطلقة من المركز، ومن ثم فإن :

$$a = n = 1 \quad , \quad b = m = \sin\varphi$$

$$\mu_s = ab = mn\sin i = \sin\varphi$$

إذاً $\mu_s = 1$ عند القطب و $\mu_s = 0$ عند الاستواء.

يحسب التشوه الأعظمي للزوايا ω من العلاقة :

$$tan(45° + \frac{\omega}{4}) = \sqrt{\frac{1}{sin\varphi}} \quad , \quad |\omega|_{max} = 180°$$

- نظام الإسقاط غير مطابق لأن $f = 0$ ولكن $m \neq n$ و $\omega \neq 0$.
- نظام الإسقاط غير مكافئ لأن $\mu_s \neq 1$.
- نظام الإسقاط متساوي المسافات لأن $n = 1$.

(١,١٢) الإحداثيات القطبية في المسقط

في الفقرات السابقة عند دراسة النظرية العامة لتمثيل سطح الإهليلج على مستو تم استنتاج كافة علاقات نظام الإسقاط في مستو منسوب لجملة محاور إحداثية متعامدة. ولكن في الكارتوغرافيا الرياضية تستخدم أيضاً الإحداثيات القطبية : الزاوية القطبية δ

و نصف القطر الشعاعي ρ ، المنسوبة لنقطة ما من المستوي، إذاً يمكن التعبير عن علاقات نظام الإسقاط بالشكل التالي:

$$\delta = f_1(\varphi, \lambda) \qquad , \rho = f_2(\varphi, \lambda) \tag{١,٧٥}$$

حيث التابعان f_1 و f_2 يجب أن يكونا مستمرين وتنطبق عليهما نفس شروط التابعين في (١,١). العلاقة بين الإحداثيات المتعامدة والقطبية يمكن استنتاجها اعتماداً على الشكل رقم (١٠) حيث افترضنا نقطة القطب واقعة على المحور oy.

$$\begin{cases} x = \rho \sin \delta \\ y = q - \rho \cos \delta \end{cases} \tag{١,٧٦}$$

فإذا اعتبرنا أن مسقط خطوط العرض عبارة عن أقواس دوائر كما في نظم الإسقاط المخروطية فإن $\rho = f(\varphi)$ وكذلك q إذا اعتبرنا المسقط متناظر.

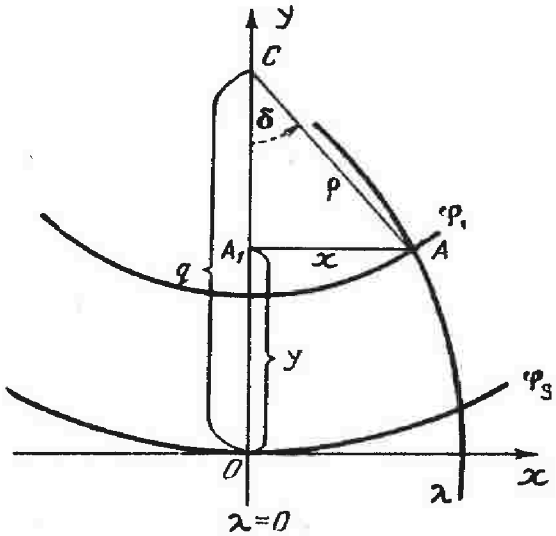
لنحسب المقادير m و n و μ_s و ε. ونبدأ بحساب المقادير e و g و h و f من العلاقات التي مرت سابقاً (١,١٦) و (١,٢٩).

$$e = (\frac{\partial x}{\partial \varphi})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \varphi})^2$$

$$g = (\frac{\partial x}{\partial \lambda})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \lambda})^2$$

$$f = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

$$h = \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda}$$



الشكل رقم (١٠). الإحداثيات القطبية في المسقط.

هذه العلاقات تتطلب أولاً حساب التفاضلات الجزئية باعتبار أن x , y أصبحت توابع ضمنية وذلك حسب (١,٧٥) و (١,٧٦):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial \rho}{\partial \varphi} \sin \delta + \rho \cos \delta \dfrac{\partial \delta}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \lambda} = \rho \cos \delta \dfrac{\partial \delta}{\partial \lambda} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} = \dfrac{d q}{d \varphi} - \dfrac{d \rho}{d \varphi} \cos \delta + \rho \sin \delta \dfrac{\partial \delta}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \lambda} = \rho \sin \delta \dfrac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{cases} \qquad (١,٧٧)$$

بعد التعويض والإصلاح نحصل على:

$$
(1,78)\quad
\begin{cases}
e = \left(\dfrac{d\,q}{d\,\varphi}\right)^2 + \left(\dfrac{d\,\rho}{d\,\varphi}\right)^2 - 2\dfrac{d\,q}{d\,\varphi}\dfrac{d\,\rho}{d\,\varphi}\cos\delta + \\
\qquad 2\rho\sin\delta\dfrac{d\,q}{d\,\varphi}\dfrac{\partial\,\delta}{\partial\,\varphi} + \rho^2\left(\dfrac{\partial\,\delta}{\partial\,\varphi}\right)^2 \\
g = \rho^2\left(\dfrac{\partial\,\delta}{\partial\,\lambda}\right)^2 \\
f = \rho\sin\delta\,\dfrac{d\,q}{d\,\varphi}\dfrac{\partial\,\delta}{\partial\,\lambda} + \rho^2\dfrac{\partial\,\delta}{\partial\,\varphi}\dfrac{\partial\,\delta}{\partial\,\lambda} \\
\quad = \rho\dfrac{\partial\,\delta}{\partial\,\lambda}\left(\sin\delta\,\dfrac{d\,q}{d\,\varphi} + \rho\dfrac{\partial\,\delta}{\partial\,\varphi}\right) \\
h = \rho\cos\delta\dfrac{d\,q}{d\,\varphi}\dfrac{\partial\,\delta}{\partial\,\lambda} - \rho\dfrac{d\,\rho}{d\,\varphi}\dfrac{\partial\,\delta}{\partial\,\lambda} \\
\quad = \rho\dfrac{\partial\,\delta}{\partial\,\lambda}\left(\cos\delta\,\dfrac{d\,q}{d\,\varphi} + \dfrac{d\,\rho}{d\,\varphi}\right)
\end{cases}
$$

$$
(1,79)\quad
\begin{cases}
\tan\,\varepsilon = \dfrac{-f}{h} = -\dfrac{\sin\delta\,\dfrac{d\,q}{d\,\varphi} + \rho\,\dfrac{\partial\,\delta}{\partial\,\varphi}}{\cos\delta\,\dfrac{d\,q}{d\,\varphi} - \dfrac{d\,\rho}{d\,\varphi}} \\
\mu_s = \dfrac{h}{M\,r} = \rho\dfrac{\partial\,\delta}{\partial\,\lambda}\,\dfrac{\cos\delta\,\dfrac{d\,q}{d\,\varphi} - \dfrac{d\,\rho}{d\,\varphi}}{M\,r} \\
n = \dfrac{\sqrt{g}}{r} = \dfrac{\rho}{r}\,\dfrac{\partial\,\delta}{\partial\,\lambda} \\
m = \dfrac{\mu_s}{n}\sec\varepsilon
\end{cases}
$$

إذا اعتبرنا في العلاقات السابقة أن $q = const.$ (نظم الإسقاط المخروطية) فإننا نحصل على العلاقات التالية:

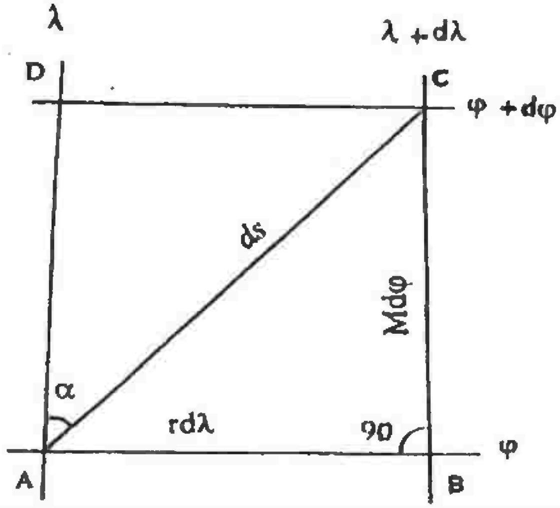
$$\begin{cases} \tan\varepsilon = \rho \dfrac{\dfrac{\partial\delta}{\partial\varphi}}{\dfrac{d\rho}{d\varphi}} \\ \mu_s = -\dfrac{\rho \dfrac{d\rho}{d\varphi} \dfrac{\partial\delta}{\partial\lambda}}{M\ r} \\ n = \dfrac{\rho}{r} \dfrac{\partial\delta}{\partial\lambda} \\ m = -\dfrac{\dfrac{d\rho}{d\varphi}}{M} \sec\varepsilon \end{cases} \qquad (١،٨٠)$$

(١،١٣) الطريقة الهندسية في دراسة النظرية العامة لنظم الإسقاط[٣]

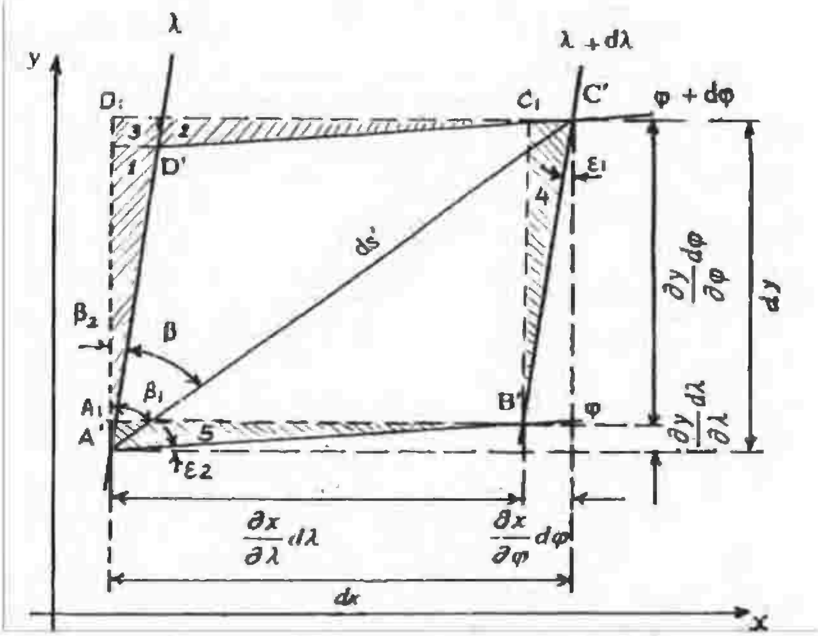
نجد أنه للوصول إلى العلاقات العامة للنظم إسقاط (١،٧١) و(١،٧٢) و(١،٤٢) و(١،٧٣) و(١،٧٤) كان لابد من المرور بالمراحل السابقة التي يمكن اعتبارها- بتفصيلها- طويلة ومعقدة بالنسبة للطالب؛ وذلك بسبب عدم وجود تصور هندسي عن عملية نظام الإسقاط، لذلك نعرض فيما يلي طريقة هندسية تؤدي بسهولة إلى المعادلات العامة للنظم إسقاط، بالإضافة إلى إزالة بعض الغموض في فهم النظرية العامة للنظم إسقاط.

من أجل استنتاج المعادلات التفاضلية التي مرت معنا بأسلوب هندسي سنعتبر العنصر الخطي ds المحدود بشبه المنحرف الإهليلجي اللامتناهي في الصغر ABCD (الشكل رقم ١١) الذي يمكن اعتباره مستطيلاً. ثم لنفرض أنه نتيجة الإسقاط (نظام

الإسقاط) تشوه هذا العنصر الخطي بسبب انحراف أضلاع شبه المنحرف كلها عن وضعها السابق مع اعتبار أن الشكل الناتج هو متوازي أضلاع $A'B'C'D'$ (الشكل رقم ١٢). وذلك بسبب صغر القيم $d\varphi$ و $d\lambda$. ولنوجد الآن العلاقة بين الوضع السابق للعنصر ds والوضع الجديد ds' في نظام الإسقاط. لذلك سنحاول تحليل مركبات ds' في المستوي معتبرين أن المتحولين $d\varphi$ و $d\lambda$ مستقلين. بعد ذلك سنحصل مباشرة على المعادلات التفاضلية لأنواع نظم الإسقاط الثلاثة: المطابق والمكافئ والمتساوي المسافات انطلاقاً من الشروط الهندسية لهذه النظم.



الشكل رقم (١١). عنصر خطي على سطح الإهليلج.



الشكل رقم (١٢). تحليل هندسي لمسقط عنصر خطي.

(١,١٣,١) نظم الإسقاط المكافئة

حتى يكون نظام الإسقاط مكافئاً يجب أن يتحقق شرط تساوي المساحات على الإهليلج وفي المستوي، أي:

$$S_{ABCD} = S_{A'B'C'D'}$$

ومن الشكل رقم (١١):

$$S_{ABCD} = r\,M\,d\varphi\,d\lambda \qquad (1,81)$$

أما مساحة $A'B'C'D'$ فتساوي حسب الشكل رقم (١٢) مساحة المستطيل $A_1B_1C_1D_1$ مطروحاً منها المساحات الجزئية ١ و٢ و٣ ومضافاً إليها ٤ و٥. ولكن المثلث ١ يكافئ ٤، كما أن المثلث ٢ يكافئ ٥. إذاً يبقى حذف المستطيل الجزئي ٣، أي:

$$S_{A'B'C'D'} = \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi - \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) d\varphi d\lambda = h\, d\varphi d\lambda \tag{١,٨٢}$$

وبالتعويض نجد:

$$M \; r \; d\varphi \, d\lambda = h \; d\varphi \, d\lambda \quad \Rightarrow \quad M \; r = h \tag{١,٨٣}$$

وهي نفس العلاقة (١,٤٢) وقد حصلنا عليها بسرعة وسهولة واضحة بالمقارنة مع الطريقة التحليلية.

كما يمكن استنتاج مساحة شبه المنحرف في المسقط بعلاقة جديدة استناداً إلى (١,١٧):

$$S = \iint h \, d\varphi d\lambda \tag{١,٨٤}$$

وهي علاقة تفيد في حساب المساحة في المسقط عند تعريف معادلات نظام الإسقاط.

(١,١٣,٢) نظم الإسقاط المطابقة

إن شرط المطابقة هو تشابه المثلثين ABC و A' B' C' أي تحقق التعامد في B′ وتناسب الأضلاع القائمة.

أولاً: شرط التعامد في B' يؤدي إلى:

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 \tag{١,٨٥}$$

$$\frac{\dfrac{\partial y}{\partial \lambda}}{\dfrac{\partial x}{\partial \lambda}} = -\frac{\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}}{\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = 0 \tag{١,٨٦}$$

وباعتبار(١,١٦) نجد أن:

$$f = 0$$

وهو شرط التعامد الذي مر معنا في العلاقة (١,٣٥).

ثانياً: تناسب الأضلاع، أي أن: $\dfrac{C'B'}{A'B'} = \dfrac{CB}{AB}$

من الشكل رقم (١٢):

$$C'B'^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 d\varphi^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi \tan \varepsilon_1\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 d\varphi^2 \left[1 + \tan^2 \varepsilon_1\right]$$

$$A'B'^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 d\lambda^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \tan \varepsilon_2\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 d\lambda^2 \left[1 + \tan^2 \varepsilon_2\right]$$

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi}{\frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda} = \frac{M d\varphi}{r d\lambda} \quad \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{r}{M} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} \qquad (١,٨٧)$$

وبالتعويض في (١,٨٦) نجد:

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = -\frac{r}{M} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \qquad (١,٨٨)$$

وهكذا نلاحظ أننا حصلنا على معادلتي (كوشي- ريمان) (١,٧١) و (١,٧٢) التي تمثل شروط المطابقة بسرعة وبسهولة و بتصور هندسي منطقي.

(١,١٣,٣) نظم الإسقاط المتساوية المسافات

إن شرط تساوي التباعد حسب خطوط العرض هو:

$$AB = A'B'$$

$$r^2 d\lambda^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2\right] d\lambda^2$$

$$r^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 \qquad (١,٨٩)$$

وهي نفس العلاقة(١,٧٤).

وشرط تساوي المسافات حسب خطوط الطول:

$$CB = C'B'$$

$$M^2 d\varphi^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2\right] d\varphi^2$$

$$M^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 \qquad (١,٩٠)$$

وهي نفس العلاقة(١,٧٣) التي حصلنا عليها تحليلياً.

هكذا نجد أنه بتحليل هندسي واضح و بسيط استطعنا الوصول مباشرة للعلاقة التفاضلية العامة لنظم الإسقاط المكافئة والمطابقة والمتساوية المسافات.