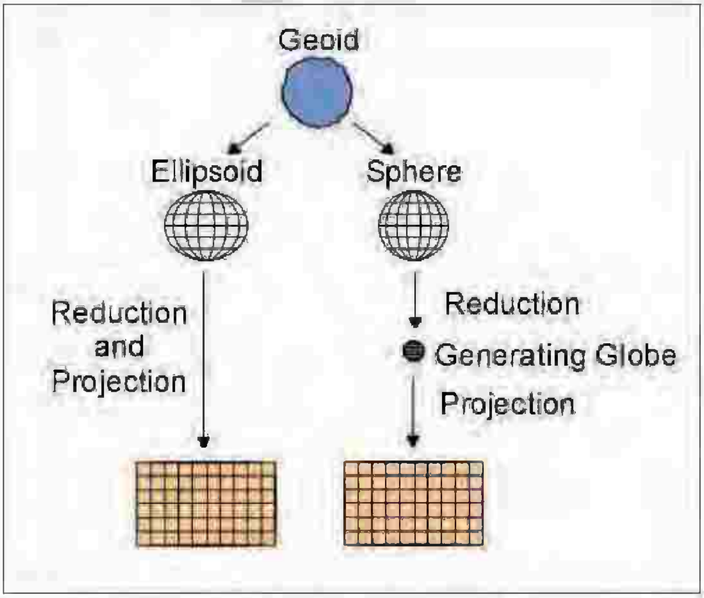
الفصل الثاني

إسقاط الإهليلج على الكرة

(٢,١) اعتبارات عامة في تمثيل سطح الإهليلج على سطح كرة

إن نظم الإسقاط الكارتوغرافية يمكن الحصول عليها بإسقاط سطح الإهليلج مباشرة على سطح مستوٍ أو بالإسقاط الثنائي، حيث يتم أولاً إسقاط سطح الإهليلج على سطح كرة، ومن ثم يتم إسقاط المرتسم على سطحٍ مستوٍ (الشكل رقم ١٣).



الشكل رقم (١٣). مراحل الانتقال من الجيوئيد للمستوي [٤]

يكون أسلوب الإسقاط الثنائي هو الأفضل في كثير من الحالات، من حيث سهولة الحسابات (نظم الإسقاط المائلة) ومن حيث قيم التشوهات وتوزعها.

لنعتبر القطاع المحدود Δ_1 من سطح الإهليلج ونظيره على سطح الكرة Δ_2 ولنعتبر منظومة الإحداثيات الجيوديزية على سطح الإهليلج $\lambda=const.\ ,\ \varphi=const.$ وعلى سطح الكرة نعتبر منظومة الإحداثيات الجغرافية $\lambda'=const.,\varphi'=const.$ يمكن التعبير عن العلاقة بين المنظومتين بالشكل التالي:

$$\varphi'=f_1(\varphi,\lambda)\ \ ,\ \ \lambda'=f_2(\varphi,\lambda) \qquad (٢,١)$$

حيث يجب أن تتوفر في التابعين f_2 , f_1 نفس الشروط في التابعين بالعلاقة (١,١). بالوقت الحاضر تعرف عدة طرق لتمثيل سطح الإهليلج على سطح الكرة منها طريقة (بيسيل) أو طريقة تطابق النواظم وغيرها [٥].

إن أسهل الطرق المعروفة هي التي يمكن إهمال التفلطح الإهليلجي فيها. أي يفرض أن:

$$\varphi'=\varphi,\ \lambda'=\lambda$$

في هذه الحالة، نصف قطر الكرة البديلة R، وللإقلال من قيم التشوهات، يؤخذ كنصف قطر الانحناء عند نقطةٍ ما على خط العرض φ_0 :

$$R=\sqrt{M_0\ N_0} \qquad (٢,٢)$$

حيث M , N تمثلان أنصاف أقطار الانحناء الأعظمي والأصغري.

أو يمكن اعتبار نصف قطر الكرة كنصف قطر الانحناء الوسطي بالنسبة لقيم R في خطوط العرض المحيطة بالمنطقة المدروسة. أي خط العرض الشمالي φ_N والجنوبي φ_s

$$R=\sqrt{R_N\ R_S} \qquad (٢,٣)$$

وأحياناً يحسب نصف قطر الكرة على أساس تساوي حجم الإهليلج مع حجم الكرة:

$$R = \sqrt[3]{a^2\ b} \qquad (٢,٤)$$

حيث a, b أنصاف أقطار الإهليلج.

إن الطرق المذكورة في العلاقات (٢,٢) و (٢,٣) و (٢,٤) أو غيرها من الطرق التقريبية تستخدم لإصدار الخرائط ذات المقياس الصغير، بحيث يمكن إهمال التشوهات الناجمة عن عملية إسقاط سطح الإهليلج على سطح الكرة.

في الكارتوغرافيا الرياضية الطرق الأكثر استخداماً هي نظام الإسقاط المطابق ونظام الإسقاط المكافئ ونظام الإسقاط المتساوي المسافات.

في معظم طرق تمثيل سطح الإهليلج على سطح الكرة يفترض أن مستوي الاستواء في الإهليلج وفي الكرة منطبقان وأن مركزيهما أيضاً منطبقان. كما أن الموازيات على سطح الإهليلج ترتسم موازيات أيضاً على سطح الكرة، وأن خطي الطول الأساسيين على كلا السطحين يقعان في مستوٍ واحد وهو مبدأ الإحداثيات. أما خطوط الطول الأخرى فهي متناسبة فيما بينها على السطحين، هذا يعني أن مرتسم شبكة الإهليلج هو شبكة متعامدة أيضاً على الكرة. ومن ثم الاتجاهان الأساسيان على سطح الكرة (المرتسم) ينطبقان مع خطوط الطول والعرض.

عدا عن هذه الطرق أحياناً يستخدم نظام إسقاط يُحافظ فيه على طول خط الطول الأساسي. كما تستخدم طرق نظام الإسقاط المنظوري.

لنعتبر عنصر خطي ds على الإهليلج ونظيره في المرتسم ds' ولنحسب هذه الأطوال:

$$ds^2 = M^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2$$
$$ds'^2 = R^2 d\varphi'^2 + R^2 \cos^2\varphi' d\lambda'^2$$

حيث R نصف قطر الكرة. $R\cos\varphi'$ نصف قطر الموازي على سطح الكرة.

عندئذ المقياس المحلي الخطي يُعطى بالعلاقة:

$$\mu^2 = \frac{R^2\, d\varphi'^2 + R^2 \cos^2\varphi'\, d\lambda'^2}{M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2\varphi\, d\lambda^2} \qquad (٢,٥)$$

المقياس حسب اتجاه خطوط الطول:

$$m = \frac{R\, d\varphi'}{M\, d\varphi} \qquad (٢,٦)$$

والمقياس حسب اتجاه خطوط العرض:

$$n = \frac{R\cos\varphi'\, d\lambda'}{N\cos\varphi d\lambda} = \alpha \frac{R\cos\varphi'}{N\cos\varphi} \qquad (٢,٧)$$

حيث α عامل تناسب خطوط الطول بين السطحين.

(٢,٢) نظام الإسقاط المطابق لسطح الإهليلج على سطح الكرة

في نظام الإسقاط المطابق يجب أن يتحقق شرط تشابه الأشكال اللامتناهية في الصغر، ومن ثم يكون المقياس المحلي الخطي مستقل عن الاتجاه، والزوايا لا تتشوه، والشبكة متعامدة. أي:

$$a = b = m = n = \mu \qquad (٢,٨)$$

وباعتبار الموازيات ترتسم موازيات، وخطوط الطول أيضاً ترتسم خطوط طول. أي:

$$\lambda' = \alpha\, \lambda \quad , \quad \varphi' = f(\varphi)$$

وحسب العلاقة (١,٦٦):

$$\frac{R\, d\varphi'}{M\, d\varphi} = \alpha \frac{R\cos\varphi'}{N\cos\varphi}$$

$$\frac{d\varphi'}{\cos\varphi'} = \frac{\alpha M\, d\varphi}{N\cos\varphi} \qquad (٢,٩)$$

$$\frac{d\varphi'}{\cos\varphi'}=\alpha\frac{a(1-e^2)(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}}{a(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

$$\frac{d\varphi'}{\cos\varphi'}=\frac{\alpha(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

$$\frac{d\varphi'}{\cos\varphi'}=\alpha\frac{1-e^2\sin^2\varphi-e^2\cos^2\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

$$\frac{d\varphi'}{\cos\varphi'}=\alpha\frac{d\varphi}{\cos\varphi}-\alpha\frac{e^2\cos^2\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

لنعتبر $e\sin\varphi=\sin\psi$

إذاً :

$$d(e\sin\varphi)=d(\sin\psi)=\cos\psi d\psi=e\cos\varphi d\varphi$$

$$\frac{d\varphi'}{\cos\varphi'}=\alpha\frac{d\varphi}{\cos\varphi}-\alpha e\frac{d\psi}{\cos\psi}$$

$$\int\frac{d\varphi'}{\cos\varphi'}=\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi}-\alpha e\int\frac{d\psi}{\cos\psi}$$

$$\ln\tan(45^\circ+\frac{\varphi'}{2})=\alpha\ln\tan(45^\circ+\frac{\varphi}{2})-\alpha e\ln\tan(45^\circ+\frac{\psi}{2})+\ln k$$

$$\tan(45^\circ+\frac{\varphi'}{2})=k\,U^\alpha \qquad (٢,١٠)$$

حيث :

$$U=\frac{\tan(45^\circ+\frac{\varphi}{2})}{\tan^e(45^\circ+\frac{\psi}{2})} \qquad (٢,١١)$$

يتحدد الثابتان α و k من شروط معينة. فإذا فرضنا أن زوايا الطول متطابقة على سطح الإهليلج وسطح الكرة، فهذا يعني $\lambda' = \lambda$ أي $\alpha = 1$.

وإذا فرضنا أن مستوي الاستواء في الإهليلج ينطبق مع مستوي الاستواء في الكرة، فهذا يعني أنه عندما $\varphi = 0$ فإن $\varphi' = 0$ ومن ثم $k = 1$ إذاً:

$$\tan(45^\circ + \frac{\varphi'}{2}) = U \tag{٢,١٢}$$

والمقياس المحلي الخطي يعطى بالعلاقة

$$m = \frac{R \cos\varphi'}{N \cos\varphi} \tag{٢,١٣}$$

والمقياس المحلي المساحي $\mu_s = m^2$.

أما حساب نصف قطر الكرة فيحدد من اعتبار أو شرط كون المقياس المحلي الخطي m مساوياً الواحد حسب الموازي φ_k. أي حسب (٢,١٣):

$$R = \frac{N \cos\varphi_k}{\cos\varphi'_k} \tag{٢,١٤}$$

(٢,٣) نظام الإسقاط المكافئ لسطح الإهليلج على سطح كرة

في نظم الإسقاط المكافئة يتم المحافظة على ثبات النسبة بين عنصر مساحي من سطح الإهليلج وآخر (نظيره) من سطح الكرة، وغالباً هذه النسبة تساوي الواحد. ونرمز للإحداثيات الكروية بـ φ'' و λ'' مع اعتبار أن $\lambda'' = \lambda$ و $\varphi'' = f(\varphi)$ أي أن الشبكة متعامدة. حسب التعريف والاعتبار المذكور فإن:

$$\mu_s = m\,n = 1$$

$$\mu_s = \frac{R\,d\varphi''.R\cos\varphi''}{M\,d\varphi.N\cos\varphi} = \frac{R^2\cos\varphi''\,d\varphi''}{M\,N\cos\varphi\,d\varphi} \tag{٢,١٥}$$

$$\cos\varphi'' d\varphi'' = \frac{1}{R^2} MN \cos\varphi \, d\varphi$$

$$\cos\varphi'' d\varphi'' = \frac{a^2}{R^2}(1-e^2)(1-e^2\sin^2\varphi)^{-2}\cos\varphi \, d\varphi$$

$$\cos\varphi'' d\varphi'' = \frac{a^2(1-e^2)}{R^2}(1+2e^2\sin^2\varphi+$$
$$3e^4\sin^4\varphi+4e^6\sin^6\varphi+......)\cos\varphi \, d\varphi$$

بعد إجراء التكامل واعتبار أن ثابت التكامل يساوي الصفر لأنه عندما $\varphi=0$ فإن $\varphi''=0$ فرضاً:

$$\sin\varphi'' = \frac{a^2(1-e^2)}{R^2}\,(\sin\varphi+\frac{2}{3}e^2\sin^3\varphi+\frac{3}{5}e^4\sin^5\varphi+$$

$$\frac{4}{7}e^6\sin^7\varphi+......) \qquad (٢,١٦)$$

وهو شكل التابع f في حالة نظام الإسقاط المكافئ.

نصف قطر الكرة R يحسب اعتماداً على تساوي مساحة سطح الإهليلج مع سطح الكرة:

$$4\pi a^2(1-e^2)(1+\frac{2}{3}e^2+\frac{3}{5}e^4+\frac{4}{7}e^6+....)=4\pi R^2$$

$$R^2 = a^2(1-e^2)(1+\frac{2}{3}e^2+\frac{3}{5}e^4+\frac{4}{7}e^6+....) \qquad (٢,١٧)$$

المقياس المحلي الخطي :

$$n=\frac{R\cos\varphi''}{N\cos\varphi}$$

ولأن نظام الإسقاط مكافئ فإن:

$$m=\frac{1}{n}$$

(٢,٤) نظام الإسقاط المتساوي المسافات لسطح الإهليلج على سطح كرة

في هذا النظام يتم المحافظة على شرط تساوي الأطوال، وذلك إما حسب اتجاه خطوط الطول $m=1$ ، أو حسب اتجاه خطوط العرض $n=1$. ونرمز للإحداثيات الكروية في هذه النظم بـ φ''' , λ'''.

في الحالة الأولى:

$$m=\frac{Rd\varphi'''}{M\,d\varphi}=1$$

$$d\varphi'''=\frac{M}{R}d\varphi$$

$$\varphi'''=\frac{1}{R}\int M\,d\varphi+k$$

ولكن وباعتبار s طول قوس من خط الطول :

$$\int M\,d\varphi = s$$

ومن تطابق مستويي الاستواء في الإهليلج والكرة نستنتج أن $k=0$

إذاً:

$$\varphi''' = \frac{s}{R} \qquad (٢,١٨)$$

ولتحديد R ننطلق من شرط أن $\varphi'''=90^0$ عندما $\varphi=90^0$. أي:

$$R=\frac{s_0^{90^0}}{\pi/2} \qquad (٢,١٩)$$

من (١,٢٤) نحصل على n , μ_s :

$$n=\frac{R\cos\varphi'''}{N\cos\varphi} \quad , \quad \mu_s=n$$

في الحالة الثانية:

$$n=\frac{R\,\cos\varphi'''}{N\,\cos\varphi}=1$$

$$\cos\varphi''' = \frac{N\cos\varphi}{R} \qquad (٢,٢٠)$$

ولكن باعتبار أن $n=1$ لكل خطوط العرض فإن $n_{\varphi=0} = 1$ إذاً:

$$R = N_{\varphi=0} = a$$

حيث a نصف القطر الكبير للإهليلج . وحسب (٢,٢٠) نكتب:

$$\cos\varphi''' = \frac{\cos\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}} \qquad (٢,٢١)$$

$$\tan\varphi''' = \frac{\sin\varphi'''}{\cos\varphi'''} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\varphi'''}}{\cos\varphi'''} \qquad (٢,٢٢)$$

نعوض قيمة $\cos\varphi'''$ من (٢,٢١) في (٢,٢٢) وبعد الإصلاح نجد:

$$\tan\varphi''' = \sqrt{1-e^2}\ \tan\varphi \qquad (٢,٢٣)$$

نلاحظ من العلاقة الأخيرة أن قيمة φ''' ماهي إلا قيمة العرض الهندسي (العرض المحول) المعروف في علم الجيوديزيا [١].

المقياس المحلي حسب خطوط الطول:

$$m = \frac{R\,d\varphi'''}{M\,d\varphi}$$

ومن (٢,٢٣)

$$\frac{d\varphi'''}{\cos^2\varphi'''} = \sqrt{1-e^2}\ \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$$\frac{d\varphi'''}{d\varphi} = \sqrt{1-e^2}\ \frac{\cos^2\varphi'''}{\cos^2\varphi} \qquad (٢,٢٤)$$

وباعتبار (٢,٢٤) وقيمة M فإن:

$$m = \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-e^2}} \qquad (٢,٢٥)$$

$$\mu_s = m$$