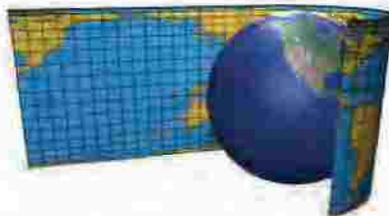


## نظم الإسقاط الأسطوانية

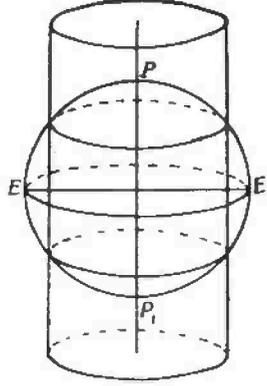
(٤,١) قهيد

في نظم الإسقاط الأسطوانية القائمة تتمثل خطوط الطول وخطوط العرض بمجموعتي مستقيمتين متعامدة، والتباعد بين مرتسمات خطوط الطول يتناسب مع التباعد بينها على سطح الإهليلج. أما التباعد بين مرتسمات خطوط العرض فيتحدد اعتماداً على نوع نظام الإسقاط من حيث التشوهات (مطابق، مكافئ، متساوي المسافات)، أو على طريقة الإسقاط على سطح الأسطوانة.

يمثل الشكل رقم (٣١) مبدأ هذا النظام. إن نظام الإسقاط الأسطوانية يمكن اعتباره حالة خاصة من نظام الإسقاط المخروطي؛ وذلك عندما يقع رأس المخروط في اللانهاية على امتداد المحور.



الشكل (٣١). مبدأ الإسقاط الأسطوانية [٢].



الشكل رقم (٣٢). الإسقاط على أسطوانة قاطعة.

يمكن أن تكون الأسطوانة ماسة لسطح الكرة (الشكل رقم ٣١) أو قاطعة لها (الشكل رقم ٣٢).

في الحالة الأولى تتم المحافظة على طول خط الاستواء بدون تشوه، أما في الثانية فتتم المحافظة على طول كل من خطي عرض متناظرين بالنسبة للاستواء.

(٤, ٢) العلاقات العامة لنظم الإسقاط الأسطوانية

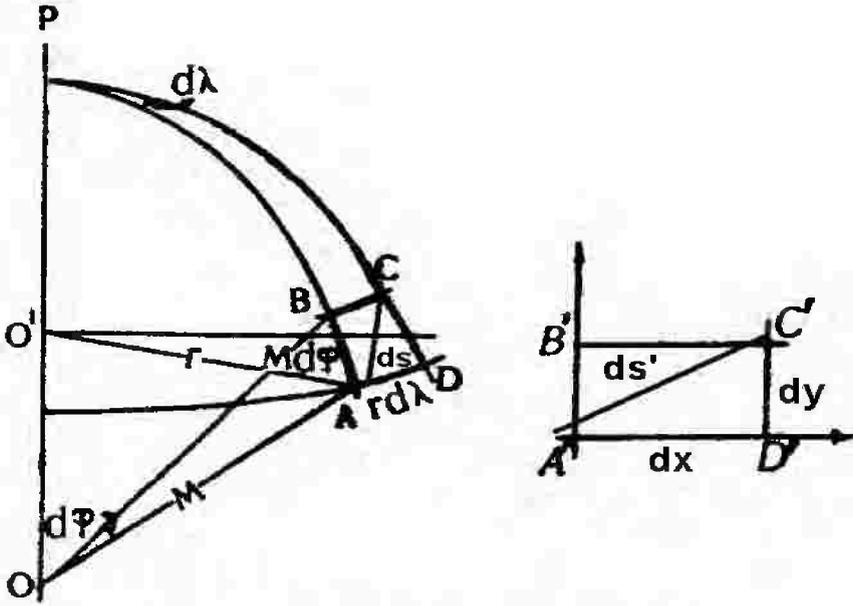
العلاقات العامة لهذه الإسقاطات هي :

$$(٤,١) \quad x = \beta \lambda \quad , \quad y = f(\varphi)$$

يمكن أن يتم إسقاط سطح الكرة (الإهليلج) على سطح الأسطوانة بعدة طرق. الطرق الأكثر استخداماً هي التحليلية التي تعتمد على فرض شروط معينة في المرسم. يمكن استنتاج معادلات المقياس والتشوه من عناصر شبه منحرف إهليلجي لامتناهٍ في الصغر ABCD (الشكل رقم ٣٣)، ومرتسمه في المستوي A'B'C'D'.

يُعطى قوس خط الطول بالعلاقة:

$$(٤,٢) \quad AB = M d\varphi$$



الشكل (٣٣). إسقاط عنصر صغير من سطح الأرض.

قوس خط العرض:

$$(٤,٣) \quad AD = r d\lambda$$

مساحة الشكل باعتباره لامتناه في الصغر على سطح الإهليلج

$$(٤,٤) \quad F = M d\varphi r d\lambda$$

في المرسوم، أي في المستوي:

$$(٤,٥) \quad \begin{cases} A'B' = dy \\ A'D' = dx \\ F' = dx \, dy \end{cases}$$

نعوض هذه القيم في العلاقات (١,٢٣) و(١,٢٤) نحصل على:

$$(٤,٦) \quad m = \frac{dy}{Md\varphi}$$

$$n = \frac{dx}{rd\lambda} = \frac{\beta d\lambda}{rd\lambda}$$

$$(٤,٧) \quad n = \frac{\beta}{r}$$

أما المقياس المحلي المساحي فيعطى بالعلاقة (١,١٣).

توافق القيم الحدية للمقياس المحلي الخطي اتجاهات مرتسمات خطوط الطول وخطوط العرض في نظم الإسقاط الأسطوانية القائمة، واتجاهات خطوط الطول والعرض المائلة في نظم الإسقاط الأسطوانية المائلة. تتعلق التشوهات في نظم الإسقاط الأسطوانية القائمة بالعرض  $\varphi$  فقط، لذلك تعتبر خطوط تساوي التشوهات (الخطوط الإيزومترية) مستقيمات متوازية منطبقة مع مرتسمات خطوط العرض المائلة.

لتحديد الثابت  $\beta$  في (٤,١) أو (٤,٧) - وهو الذي يمثل ثابت التناسب بين التباعد بين مرتسمات خطوط الطول والتباعد على سطح الكرة (الإهليلج) - يفرض في نظام الإسقاط شرط المحافظة على الطول الحقيقي لخط العرض  $\pm\varphi_k$ ، أي حسب (٤,٧):

$$(٤,٨) \quad n_k = \frac{\beta}{r_k} = 1$$

ومن ثم:

$$(٤,٩) \quad \beta = r_k$$

أي أن المفهوم الهندسي للثابت  $\beta$  هو نصف قطر الموازي (خط العرض) المشترك مع الأسطوانة.  
إذاً

$$(٤.١٠) \quad x = r_k \lambda$$

$$(٤.١١) \quad n = \frac{r_k}{r}$$

من (٤.١٠) و (٤.١١) نستنتج أن الإحداثي  $x$  والمقياس المحلي  $n$  يتعلقان فقط بالمقدار  $\varphi_k$ ، نجد من العلاقة (٤.١١) أن المقياس المحلي حسب خطوط العرض يأخذ قيمة أصغرية عند الاستواء، ويزداد بزيادة  $|\varphi|$  ليصبح مساوياً للواحد عند الموازي  $\pm\varphi_k$ ، ويتابع تزايداً ليلعب قيمة اللانهاية عند القطبين.

الآن نأتي إلى تحديد  $\varphi_k$  التي نرغب بأن يكون المقياس المحلي التابع لها  $n_k$  مساوياً للواحد. نعتبر الكرة كسطح للمقارنة. فإذا كانت المنطقة المصورة لها امتداد حسب الموازيات، وكانت متناظرة تقريباً بالنسبة للاستواء، عندئذ يفضل اختيار  $\varphi_k = 0$  أي المحافظة على طول خط الاستواء بدون تشوه، كما في الشكل رقم (٣١). وباعتبار أن  $r_k = R$  في هذه الحالة فإنه وباعتبار الشكل رقم (٣٢):

$$(٤.١٢) \quad x = R \lambda$$

$$(٤.١٣) \quad n = \sec \varphi$$

أما إذا كانت المنطقة عريضة ومتناظرة بالنسبة للاستواء فعندئذ يتم اختيار الأسطوانة القاطعة حسب الموازي  $\varphi_k$ . بحيث تتوزع التشوهات بشكل متجانس بالنسبة لـ  $\varphi_k$ . بعبارة أخرى، أن يكون المقياس المحلي على أطراف المنطقة يزيد عن قيمة الواحد بنفس المقدار الذي ينقص عنه وذلك عند الاستواء. نعبّر عن هذا الشرط بالشكل التالي:

$$(٤,١٤) \quad n_N = n_s, \quad n_N = 1+v, \quad n_E = 1-v$$

حيث  $n_N$ ،  $n_s$  المقياس المحلي حسب الموازين الطرفين في المنطقة (الشمالي والجنوبي)،  $n_E$  المقياس المحلي حسب خط الاستواء،  $v$  التشوه. ولكن حسب (٤,١١) بالنسبة للكورة:

$$(٤,١٥) \quad n = \frac{\cos \varphi_k}{\cos \varphi} = \cos \varphi_k \sec \varphi$$

بالنسبة للموازي الشمالي:

$$(٤,١٦) \quad n_N = \cos \varphi_k \sec \varphi_N$$

وبالنسبة للاستواء:

$$(٤,١٧) \quad n_E = \cos \varphi_k$$

نعوض (٤,١٦) و (٤,١٧) في الشروط المذكورة فيما سبق:

$$(٤,١٨) \quad \begin{cases} 1+v = \cos \varphi_k \sec \varphi_n \\ 1-v = \cos \varphi_k \end{cases}$$

من هاتين العلاقتين نحصل على:

$$(٤,١٩) \quad \sec \varphi_k = \frac{1}{2} (1 + \sec \varphi_n)$$

ومنه نحصل على  $\varphi_k$ .

يمكن استخدام نظام الإسقاط الأسطواني القائم (أو المائل) القاطع للكورة أيضاً في حالة كون المنطقة المصورة تقع في جهة واحدة بالنسبة للاستواء، أي غير متناظرة. في هذه الحالة يتم اختيار  $\varphi_k$  بحيث يمر الموازي  $\varphi_k$  من وسط المنطقة.

أما إذا كان المرغوب أن تتناظر قيم التشوهات بالقيمة المطلقة على أطراف

المنطقة، فيمكن تحديد  $\varphi_k$  من الشرطين التاليين:

$$(٤.٢٠) \quad \begin{cases} 1+v = n_N \\ 1-v = n_s \end{cases}$$

إذا:

$$(٤.٢١) \quad \begin{cases} 1+v = \cos \varphi_k \sec \varphi_n \\ 1-v = \cos \varphi_k \sec \varphi_s \end{cases}$$

من هنا نحصل على  $\varphi_k$ :

$$(٤.٢٢) \quad \sec \varphi_k = \frac{1}{2} (\sec \varphi_N + \sec \varphi_s)$$

(٤.٣) نظام الإسقاط الأسطوانية المطابق (ميركاتور)

إن شروط المطابقة مر ذكرها بالعلاقات (١.٦٥) و (١.٦٦)

ولكن الشرط (١.٦٥) هنا محقق تعريفاً، إذاً نطبق الشرط (١.٦٦)  $m=n$ 

واعتماداً على (٤.٦) و (٤.١١):

$$(٤.٢٣) \quad \frac{d y}{M d \varphi} = \frac{r_k}{r}$$

أو:

$$(٤.٢٤) \quad d y = r_k \frac{M d \varphi}{N \cos \varphi}$$

بإجراء التكامل نحصل على:

$$(٤.٢٥) \quad y = r_k \int \frac{M d \varphi}{N \cos \varphi} + c$$

فبفرض المحور  $ox$  ينطبق مع مرتسم الاستواء فإن

$$(٤.٢٦) \quad c=0$$

أما حساب التكامل فيتم كما يلي مع اعتبار أن قيم  $M, N$  تعطى بالعلاقات

التالية:

نصف قطر المنحنى خط الطول :

$$(٤,٢٧) \quad M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

نصف قطر المنحنى الناظم الأول :

$$(٤,٢٨) \quad N = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}$$

إذاً :

$$\begin{aligned} \int \frac{M d\varphi}{N \cos \varphi} &= \int \frac{(1-e^2) d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} \\ &= \int \frac{(1-e^2 \sin^2 \varphi - e^2 \cos^2 \varphi) d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} \\ &= \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - e \int \frac{e \cos \varphi d\varphi}{1-e^2 \sin^2 \varphi} \end{aligned}$$

ولكن من المعروف أن :

$$(٤,٢٩) \quad \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \int \sec \varphi d\varphi = \ln \tan \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)$$

لحساب القسم الثاني من التكامل نفرض الوسيط :

$$(٤,٣٠) \quad \begin{cases} \sin \psi = e \sin \varphi \\ 1 - e^2 \sin^2 \varphi = \cos^2 \psi \\ \cos \psi d\psi = e \cos \varphi d\varphi \end{cases}$$

إذاً :

$$(٤,٣١) \quad \begin{cases} e \int \frac{e \cos \varphi d\varphi}{1-e^2 \sin^2 \varphi} = e \int \frac{\cos \psi d\psi}{\cos^2 \psi} \\ = e \int \frac{d\psi}{\cos \psi} = e \ln \tan \left(45^\circ + \frac{\psi}{2}\right) \end{cases}$$

ومن ثم:

$$(٤.٣٢) \quad \int \frac{M d\varphi}{N \cos \varphi} = \ln U$$

حيث:

$$(٤.٣٣) \quad U = \frac{\tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2})}{\tan^\epsilon(45^\circ + \frac{\psi}{2})}$$

أي:

$$(٤.٣٤) \quad y = r_k \ln U$$

وهو شكل التابع  $f$  في العلاقات (٤.١) للحصول على نظام إسقاط مطابق.  
وعندما تكون الأسطوانة ماسة للإهليلج عند الاستواء فإن  $\varphi_k = 0$  و  $r_k = a$ .

$$(٤.٣٥) \quad y = a \ln U$$

طبعاً الإحداثي  $x$  لا يتعلق بـ  $\varphi$  ومن ثم يعطى بنفس العلاقة (٤.١٢).  
المقياس المحلي الخطي:

$$(٤.٣٦) \quad m = n = \frac{r_k}{r}$$

المقياس المحلي المساحي:

$$(٤.٣٧) \quad \mu_s = m^2$$

نوجز الآن علاقات نظام الإسقاط الأسطواني المطابق كما يلي:  
• من أجل الإهليلج:

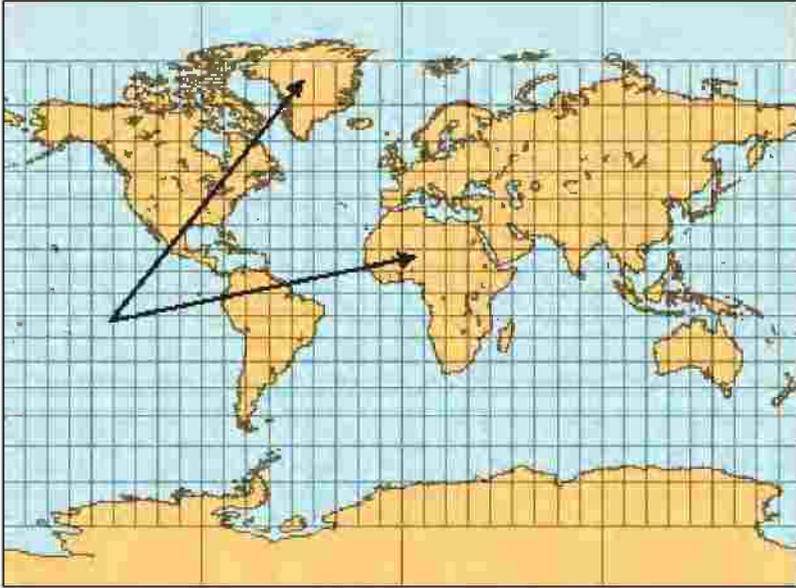
$$(٤,٣٨) \quad \left\{ \begin{array}{l} x=r_k \lambda \\ y=r_k \ln U \\ U=\frac{\tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2})}{\tan^e(45^\circ + \frac{\psi}{2})}, \psi=\arcsin(e \sin \varphi) \\ m=n=\frac{r_k}{r} \\ \mu_s=m^2 \end{array} \right.$$

• من أجل الكرة:

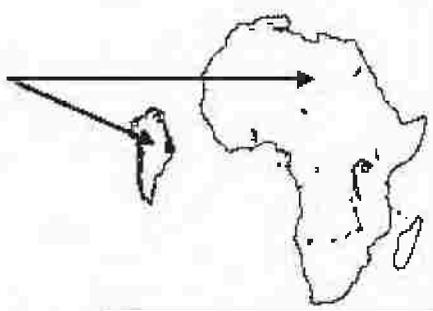
$$(٤,٣٩) \quad \left\{ \begin{array}{l} x=r_k \lambda \\ y=r_k \ln \tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2}) \\ m=n=\cos \varphi_k \sec \varphi \\ \mu_s=m^2 \end{array} \right.$$

وعندما تكون الأسطوانة ماسة فإن  $r_k$  تصبح  $a$  في الإهليلج، و  $R$  في الكرة. نستنتج من العلاقة (٤,٣٦) أنه في نظام الإسقاط الأسطواني المطابق القائم، التباعد بين مرسمات خطوط العرض يتزايد بالتناسب مع قيمة  $1/\sec \varphi$ . ومن ثم القطب يقع على بعد  $1/\infty$  من الاستواء. إن قطع التشوهات في نظام الإسقاط هذا عبارة عن دائرة بنصف قطر أصغري عند الاستواء، ومن ثم يبدأ بالتزايد إلى  $1/\infty$  عند القطب لأن  $r_{90}=0$ ، وهذا ما يفسر تقارب مساحتي كل من قارة إفريقيا وجزيرة

غرينلاند في الشكل رقم (٣٤)، بينما الشكل رقم (٣٥) يبين النسبة الحقيقية للمساحتين.



الشكل رقم (٣٤). شبكة إسقاط موكاتور (١٢).



الشكل رقم (٣٥). النسبة الحقيقية لمساحتي إفريقيا وجرينلاند.

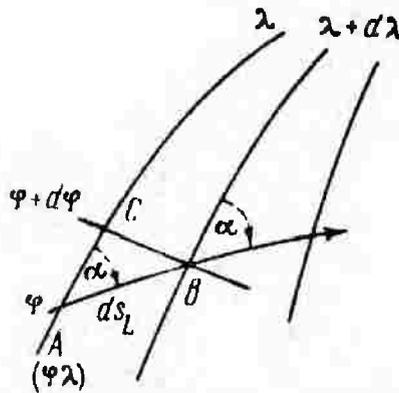
لقي نظام إسقاط ميركاتور استخداماً واسعاً في إصدار خرائط الملاحة البحرية، لأنه يتميز بخاصية هامة تسهل عملية انتقال السفن بين نقطتين مفروضتين أي حسب اتجاه محدد. فعلى سطح البحار يمكن الانتقال بين نقطتين بالمحافظة على سمت معين بأجهزة التوجيه، أي أن خط الانتقال يقطع خطوط الطول بزوايا ثابتة. في نظام إسقاط ميركاتور وباعتباره إسقاطاً مطابقاً، فإن الخط الذي يقطع مرتسمات خطوط الطول بنفس الزاوية يعتبر مستقيماً؛ لأن مرتسمات خطوط الطول متوازية. ومن ثم يكفي قياس سمت أي نقطة على الخريطة، ثم التحرك وفق هذا السمت مع المحافظة عليه للوصول للنقطة المقصودة. ولكن ماهي طبيعة هذا الخط على سطح الإهليلج؟

لنعتبر الشكلين رقم (٣٦) و (٣٧) حيث يشير السهم إلى اتجاه الانتقال حسب خط يصنع زاوية ثابتة مع خطوط الطول قدرها  $\alpha$ . من المثلث اللامتاهي في الصغر  $ACB$  لدينا:

$$\tan \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{N \cos \varphi}{M d\varphi} d\lambda$$

(٤.٣٩)

$$d\lambda = \tan \alpha \frac{M d\varphi}{N \cos \varphi}$$



الشكل رقم (٣٦). مسار جزء من اللكسودروم.



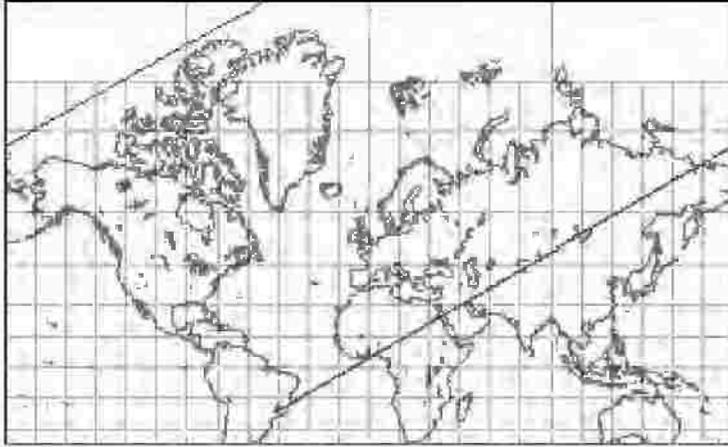
$$\lambda = \tan \alpha \ln \tan \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$\tan \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (٤.٤٢)$$

حيث  $\alpha$  العلة النيري (ه المستخدمة في حساب  $\alpha$  مثل اللامركزية في الإهليلج).  
 العلاقة (٤.٤٢) تمثل معادلة خط حلزوني ينتهي في القطب. يسمى جزء هذا  
 الخط أو المنحنى باللوكوندروم (Loxodrome). في الواقع يمكن الاستدلال على شكل  
 هذا المنحنى باستخدام نظام الإسقاط السيتوغرافي القطبي (سياتي تفصيله في الفصل  
 السادس). فالخط الذي يقطع خطوط الطول بزاوية ثابتة على الإهليلج، سيقطع  
 مرتسما بنفس الزاوية وحتى يتحقق ذلك، وباعتبار أن نظام الإسقاط مطابق، فإنه  
 يجب أن يكون هذا الخط عبارة عن منحن حلزوني ينتهي في القطب، الشكل رقم (٣٨)  
 يوضح هذا الخط بإسقاط متقوي.



الشكل (٣٨). منحنى اللوكسوندروم كمنحنى [٢٧]



الشكل (٣٩). مسقط منحنى اللوكسودروم كاملاً ١٢١.

الشكل رقم (٣٩) يمثل مرئسم خط اللوكسودروم مع مرئسم خطوط الطول. ولنجذ من الشكل رقم (٣٧) أن الخط يمر من التقطعين  $A'$ ،  $B'$  مشكلاً القطعة المستقيمة بينهما. وبذلك:

$$\tan \alpha = \frac{B'C'}{A'C'}$$

$$\tan \alpha = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \quad (٤,٤٣)$$

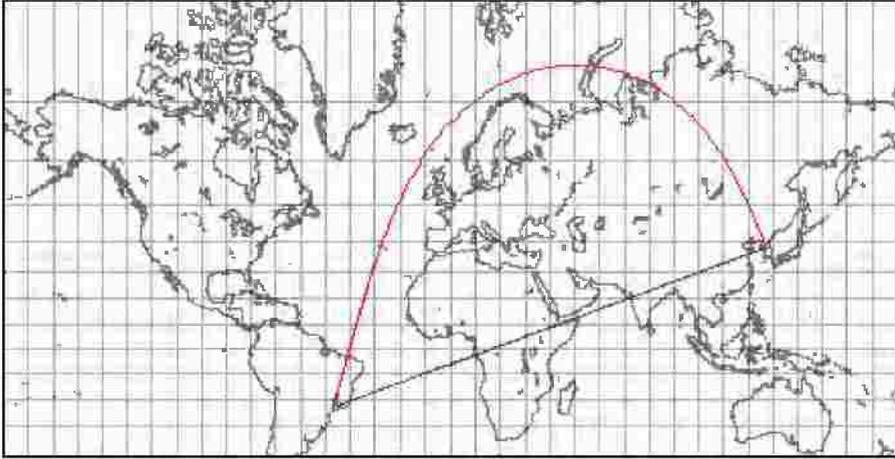
ولكن اللوكسودروم لا يعتبر أقصر مسافة بين نقطتين على سطح الإهليلج، لأنه كما هو معروف، أقصر مسافة هي الخط الجيوديزي، وهو ما يسمى بالنسبة لسطح الكرة بالأرتودروم (Orthodrome)، الذي يمثل جزء قوس الدائرة العظمى. وباعتبار أن الأرتودروم يختلف عن اللوكسودروم، وأن مرئسم اللوكسودروم مستقيم، فإن مرئسم الأرتودروم هو خط آخر غير المستقيم، أي منحنى. من هنا نجذ

أن من خصائص نظام إسقاط ميركاتور هي أن المستقيم لا يمثل أقصر مسافة بين نقطتين بخلاف ما عرفناه بالهندسة التقليدية. عموماً في مجال الملاحة البحرية يتم التنقل بين نقطتين بحسب مسارات لوكسودروم مجزأة تشكل مع بعضها خط أرثودروم بين هاتين النقطتين. الشكل رقم (٤٠) يبين الفرق بين المسارين لمدينتي لندن ونيويورك. أما عندما تكون النقطتان بعيدتين عن بعضهما فإن الفرق سيبدو كبيراً كما يظهر ذلك من الشكلين رقم (٤١) و(٤٢) اللذين يظهران المسارين بمسقطين مختلفين.

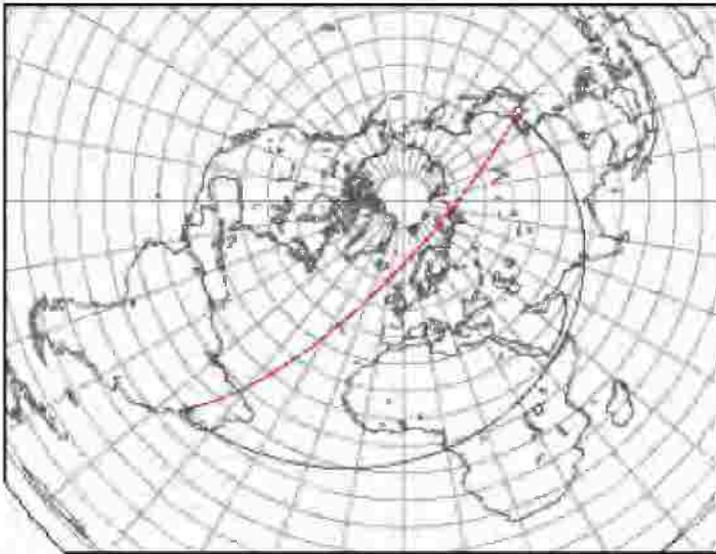


الشكل رقم (٤٠). الفرق بين اللوكسودروم ومنحني الدائرة العظمى لمسافة قصيرة [٢].

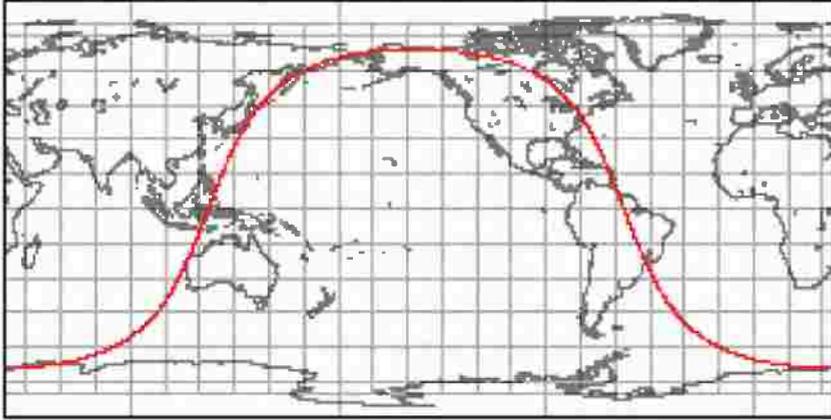
في الواقع إن مسقط خط الأرثودروم في نظام الإسقاط الأسطوانى عبارة عن منحني جيبي. وباعتبار أن خط الليل والنهار على سطح الكرة هو دائرة عظمى، فإن مسقطه هو منحني جيبي كما يظهر من الشكلين رقم (٤٣) و(٤٤).



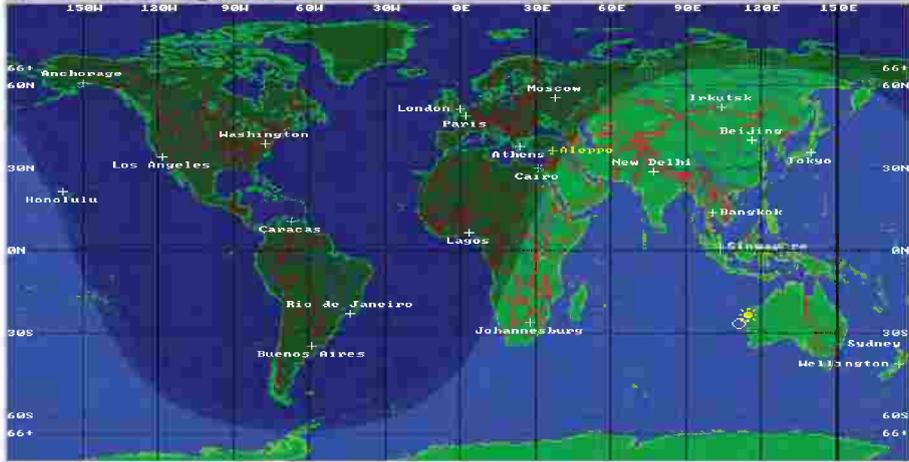
الشكل رقم (٤٦). الفرق بين اللوكسودروم ومنحنى الدائرة العظمى لمسافة طويلة [٤٦].



الشكل رقم (٤٧). مسقط منحنى للفرق بين اللوكسودروم ومنحنى الدائرة العظمى [٤٧].



الشكل رقم (٤٣). الدائرة العظمى ومسقطها [٢]



الشكل رقم (٤٤). حدود الليل والنهار في إسقاط أسطواني. [٧]

لحساب طول اللوكسودروم بين نقطتين نجزئه لأقسام صغيرة  
 $S_{L1}, S_{L2}, S_{L3}, \dots$ . إن طول كل جزء يعطى بالعلاقة  $S_{Li} = S_i \sec \alpha$  ومن ثم  
 طول الخط بين النقطتين ١ و ٢:

$$S_L = \sum S_{Li} = \sec \alpha \sum S_i$$

(٤, ٤٤)

$$S_L = S_1^2 \sec \alpha$$

حيث  $S_1^2$  يمثل طول قوس خط الطول بين خطي العرض المارين بالنقطتين  
 ٢ و ١.

#### (٤, ٤) نظم الإسقاط الأسطوانية المكافئة

يقوم مبدأ هذه النظم على فرضية (أرخميدس) بأن مساحة الحلقة الكروية  
 تساوي مساحة سطح حلقة إسطوانية لها نفس الارتفاع وينصف قطر مساوٍ لنصف

قطر الكرة، أما تحليلياً فنقول حسب نظرية نظم الإسقاط العامة، بأنه يجب أن يتحقق شرط التكافؤ، أي ثبات قيمة المقياس المحلي المساحي، وغالباً يعتبر مساوياً للواحد. حسب العلاقات (٤,٦) و (٤,١١)

$$\mu_s = m.n = \frac{dy}{Md\varphi} \cdot \frac{r_k}{r} = 1$$

$$(٤,٤٥) \quad dy = \frac{Mr}{r_k} d\varphi$$

$$(٤,٤٦) \quad y = \int \frac{Mr}{r_k} d\varphi + c$$

$$(٤,٤٧) \quad y = \frac{1}{r_k} S + c$$

حيث  $c$  ثابت التكامل ويساوي الصفر لأنه عندما  $\varphi = 0$  فإن  $S = 0$  و  $y = 0$ . أما  $S$  قيمة التكامل فتمثل مساحة سطح شبه منحرف إهليلجي من الاستواء حتى خط العرض  $\varphi$ ، محصور بزواوية قدرها  $1/$  راديان. فيما يلي علاقة لحساب

$S$  [٥]:

$$(٤,٤٨) \quad S = b^2 \left( \sin\varphi + \frac{2}{3} e^2 \sin^3 \varphi + \frac{3}{5} e^4 \sin^5 \varphi + \frac{4}{7} e^6 \sin^7 \varphi + \dots \right)$$

ولكن هذا الإسقاط غالباً يستخدم من أجل الخرائط ذات المقياس الصغير. لذلك يمكن اعتماد سطح الكرة كسطح مقارنة بدلاً من الإهليلج. ومن ثم تأخذ العلاقة (٤,٤٥) الشكل التالي:

$$(٤,٤٩) \quad dy = \frac{R^2 \cos \varphi}{r_k} d\varphi$$

بإجراء التكامل وتبديل قيمة  $r_k = R \cos \varphi_k$  نحصل على:

$$(٤,٥٠) \quad y = R \sec \varphi_k \sin \varphi$$

قيمة  $x$  تعطى بالعلاقة (٤,١٠) نفسها:

$$x = r_k \lambda = R \cos \varphi_k \lambda$$

والمقياس المحلي  $n$  حسب خطوط العرض يعطى بالعلاقة (٤,١١):

$$n = \frac{r_k}{r}$$

ومن شرط التكافؤ يجب أن تكون  $m$  مساوية لمقلوب  $n$  أي:

$$(٤,٥١) \quad m = \frac{1}{n} = \frac{r}{r_k}$$

التشوه الأعظمي بالزوايا و باعتبار أن قيم المقياس المحلي الخطي الحدية تنطبق مع اتجاه مرتسمات خطوط الطول والعرض أي أنه بالنسبة لقطع التشوهات  $a = \frac{1}{b}$  ، إذاً

حسب (١,٦٢):

$$(٤,٥٢) \quad \tan(45^\circ + \frac{\omega}{4}) = a$$

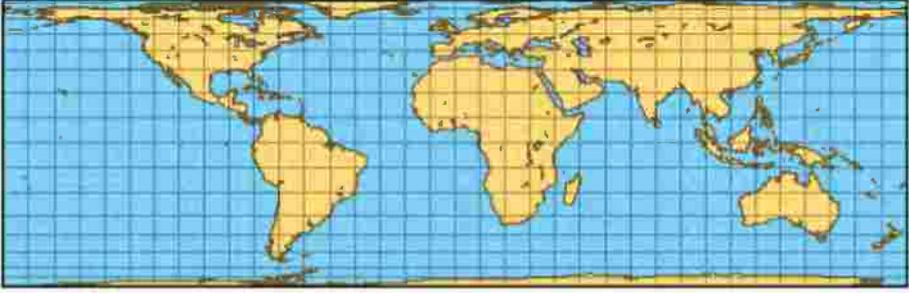
نوجز الآن علاقات نظام الإسقاط الأسطواني المكافئ كما يلي:

$$(٤,٥٣) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = R \cos \varphi_k \cdot \lambda \\ y = R \sec \varphi_k \cdot \sin \varphi \\ \mu_s = m \cdot n = 1 \\ n = \frac{r_k}{r}, m = \frac{1}{n} \\ \tan(45^\circ + \frac{\omega}{4}) = a \end{array} \right.$$

أما عندما تكون الأسطوانة ماسة للكرة حسب خط الاستواء فتصبح المجموعة (٤,٥٣) كما يلي :

$$(٤,٥٤) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = R \cdot \lambda \\ y = R \cdot \sin \varphi \\ \mu_s = 1 \\ n = \sec \varphi, m = \cos \varphi \\ \tan(45^\circ + \frac{\omega}{4}) = \sec \varphi \end{array} \right.$$

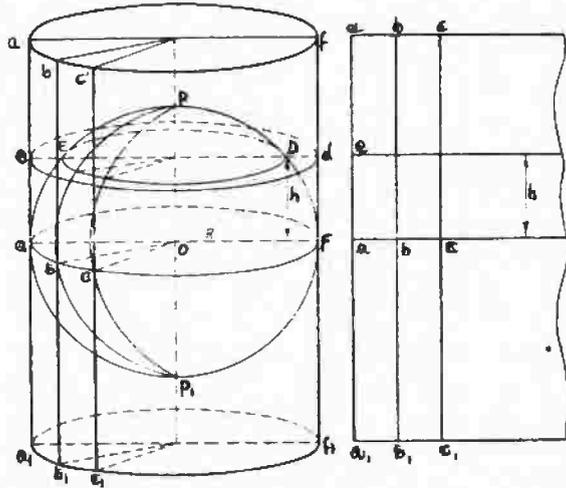
تدل هذه العلاقات وبسبب كون مرسمات خطوط الطول متوازية، على أن قيمة  $n$  تزداد كلما اتجهنا نحو القطب، ومن ثم  $m$  تتناقص ليتحقق شرط التكافؤ. لذلك تبدو الشبكة كما يبين الشكل رقم (٤٥) وكأنها مسقط أسطوانة معترضة بسبب تناقص التباعد بين مرسمات خطوط العرض.



الشكل رقم (٤٥). شبكة الإسقاط الأسطوانية المكافئ [٢].

أما قيمة  $\gamma$  في العلاقات (٤,٥٤) فتدل على أن نظام الإسقاط يمكن فهمه هندسياً بأنه مسقط جانبي لسطح الكرة على سطح أسطوانة ماسة. الشكل (٤٦) يوضح ذلك وهو يطابق مبدأ أرخميدس.

بالنسبة لاستخدام نظم الإسقاط الأسطوانية المكافئة بوضعيات أخرى، أي المائلة والمعتزلة فهذا نادر في مجال الجيوديزيا والكارتوغرافيا؛ وذلك لعدم ضرورة مثل نظم الإسقاط هذه.



الشكل رقم (٤٦). التحليل الهندسي للإسقاط الأسطوانية المكافئ.

## (٤,٥) نظم الإسقاط الأسطوانية المتساوية المسافات

في نظم الإسقاط الأسطوانية عموماً تتحقق خاصية تساوي المسافات بين مرتسمات خطوط الطول. في هذا النوع من نظم الإسقاط يفرض شرط تساوي التباعد بين مرتسمات خطوط العرض أيضاً. ومن ثم يصبح هنا التابع  $f$  في العلاقات (١,١) خطياً. إذا حسب العلاقة (٤,٦):

$$m = \frac{dy}{M d\varphi} = 1$$

بإجراء التكامل واعتبار أن ثابت التكامل يساوي الصفر، على اعتبار أن  $ox$  ينطبق مع الاستواء:

$$(٤,٥٥) \quad y = \int M \cdot d\varphi = s$$

حيث  $s$  طول قوس من خط الطول يبدأ من الاستواء إلى خط العرض  $\varphi$ .  
قيمة  $x$  تبقى نفسها من نظم الإسقاط السابقة:

$$x = r_k \lambda$$

إذا تصبح علاقات نظام الإسقاط الأسطواني المتساوي المسافات بالشكل التالي:

$$(٤,٥٦) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = r_k \lambda \\ y = s \\ m = 1 \\ n = \frac{r_k}{r} = \mu_s \\ \tan\left(45^\circ + \frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{a} \end{array} \right.$$

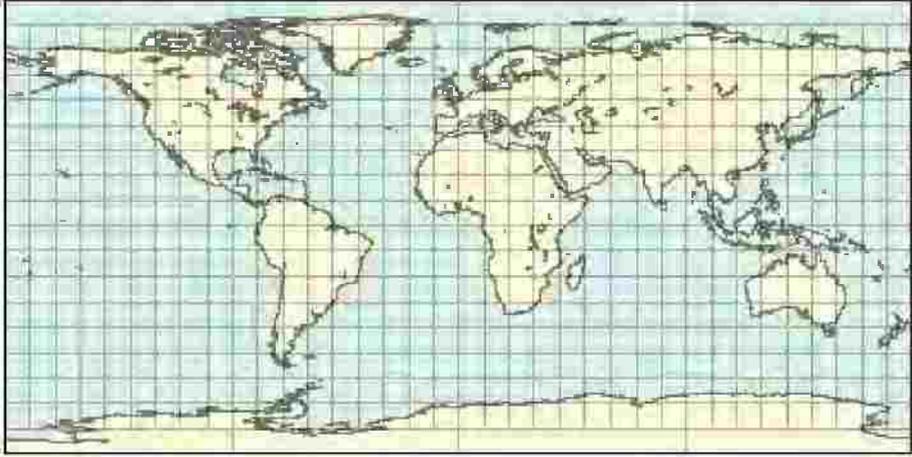
أما عند اعتبار سطح الكرة بدلاً من سطح الإهليلج فتصبح المجموعة (٤.٥٦) بالشكل التالي :

$$(٤.٥٧) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = r_k \lambda \\ y = R\varphi \\ m = 1 \\ n = \mu_s = \cos \varphi_k \sec \varphi \\ \tan(45^\circ + \frac{\omega}{4}) = \sqrt{\cos \varphi_k \sec \varphi} \end{array} \right.$$

وعندما تكون  $\varphi_k = 0$  ، أي الأسطوانة ماسة ، فإن نظام الإسقاط حينئذ يسمى نظام الإسقاط الأسطواني المربع ؛ وذلك لأن التباعد يصبح متساوياً بين خطوط الطول وبين خطوط العرض. وهذا واضح من العلاقات (٤.٥٧) حيث تصبح كما يلي :

$$(٤.٥٨) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = R\lambda \\ y = R\varphi \\ m = 1 \\ n = \mu_s = \sec \varphi \\ \tan(45^\circ + \frac{\omega}{4}) = \sqrt{\sec \varphi} \end{array} \right.$$

الشكل رقم (٤٧) يبين شكل الشبكة في هذا الإسقاط. أيضاً بالنسبة لهذه الإسقاطات لم يتشر استخدامها بوضعيات المائلة والمعتزلة.



الشكل رقم (٤٧). شبكة الإسقاط الأسطوانى المربع [١٢].

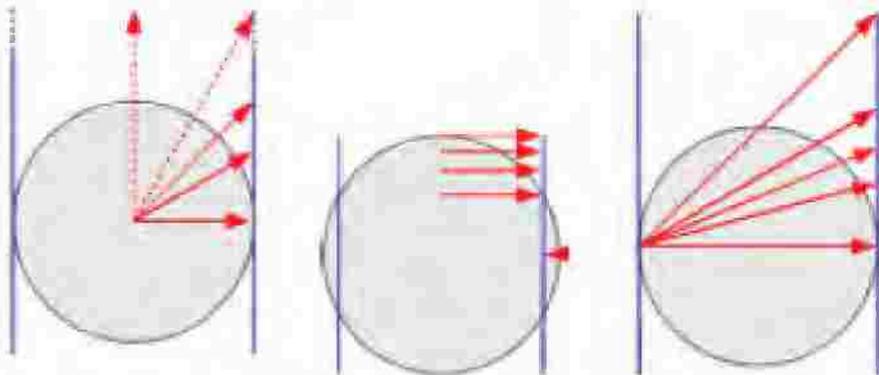
#### (٤,٦) نظم الإسقاط الأسطوانية النظرية القائمة

تعتبر أسطوانة ماسة للكرة (أو قاطعة) بحيث ينطبق محورها مع المحور المار بالقطبين. لنسقط الآن شبكة الإحداثيات الجغرافية بأشعة إسقاط مستقيمة (إسقاط نقاط تقاطع الشبكة) على السطح الجانبي للأسطوانة (الشكلان رقم ٤٨ و ٤٩). ثم نصل بين النقاط الناتجة على سطح الأسطوانة، فنحصل على مسقط الشبكة، أي المرسم الذي نسميه نظام الإسقاط الأسطوانى النظرى.

عملية الإسقاط تتم بالشكل التالى :



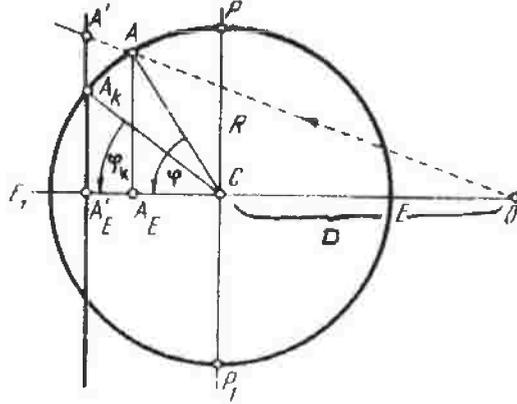
الشكل رقم (٤٨). مبدأ الإسقاط الأسطواني للمشهورى [٤٦].



الشكل رقم (٤٩). الأتواع المختلفة لمبدأ الإسقاط الأسطواني المشهورى [٤٦].

عطوط الطول يتم إسقاطها كل على حده ، بحيث تقع نقطة الإسقاط (نقطة النظر) دوماً في مستوي خط الطول الذي يتم إسقاطه. ومن كم إذا اعتبرنا أن نقطة

الإسقاط تقع أيضاً في مستوي الاستواء وعلى بعد  $D$  من مركز الكرة فإن نقطة الإسقاط ستتحرك على محيط دائرة نصف قطرها  $D$  كما هو مبين في الشكل رقم (٥٠).



الشكل رقم (٥٠). التحليل الهندسي للإسقاط المنظوري.

أما خطوط العرض فيتم إسقاطها بدوران نقطة الإسقاط حول مركز الكرة، ويميل ثابت لخط الاستواء بالنسبة لمستوي الاستواء. ففي هذه الحالة ستكون مرسمات خطوط الطول والعرض عبارة عن مستقيمات متعامدة، والتباعد بين مرسمات خطوط الطول سيكون ثابتاً، ومتناسباً مع الفرق بينها على سطح الإهليلج (الكرة). يتعلق التباعد بين مرسمات الموازيات (خطوط العرض) بميل خط الإسقاط على الاستواء، وهو الذي يرتبط بدوره بالزاوية  $\varphi$  ويبعد نقطة الإسقاط  $o$  عن المركز  $c$ . فإذا اعتبرنا محور  $oy$  واحداً من خطوط الطول في المرسم، ومحور  $ox$  مرسم الاستواء أو مرسم أحد خطوط العرض؛ فإن علاقات نظام الإسقاط العامة يمكن التعبير عنها بالشكل التالي:

$$(٤.٥٩) \quad \begin{cases} x=r_k \lambda \\ y=f(\varphi) \end{cases}$$

لنعتبر سطح الكرة كسطح للمقارنة. ولنعتبر النقطة  $A$  ذات العرض  $\varphi$  (الشكل رقم ٥٠).

إن مسقط النقطة  $A$  على سطح الأسطوانة والمشكل من مستقيم الإسقاط  $OA$  هو  $A'$ .

إذا طول القطعة المستقيمة  $A'_E A'$  تمثل قيمة  $y$  للنقطة  $A'$ . من تشابه المثلثين  $OA_E A$  و  $OA'_E A'$  نستنتج أن:

$$y = \frac{(D + R \cos \varphi_k)(R \sin \varphi)}{(D + R \cos \varphi)}$$

وإذا اعتبرنا أن  $D$  ثابتة من أجل نظام إسقاط ما، فإن النسبة  $\frac{D}{R} = F$  ثابتة،

ومن ثم:

$$y = \frac{R \sin \varphi (F + \cos \varphi_k)}{F + \cos \varphi}$$

(٤,٦٠)

$$y = CR \frac{\sin \varphi}{F + \cos \varphi}$$

وهو شكل التابع  $f$  في العلاقات (٤,٥٩) من أجل أسطوانة قاطعة، حيث

$$C = F + \cos \varphi_k$$

أما إن كانت الأسطوانة ماسة فإنه فقط قيمة الثابت  $C$  ستتغير لتصبح:

(٤,٦١)

$$C = F + 1$$

المقياس المحلي  $n$  حسب خطوط العرض يعطى بنفس العلاقة المعروفة:

(٤,٦٢)

$$n = \frac{\cos \varphi_k}{\cos \varphi} = \cos_k \sec \varphi$$

أما المقياس المحلي  $m$  حسب خطوط الطول فاستناداً للعلاقة (٤,٦) من أجل الكرة واعتبار (٤,٦٠) نحصل على:

$$(٤,٦٣) \quad m = \frac{\partial y / \partial \varphi}{R} = \frac{C(F \cos \varphi + 1)}{(F + \cos \varphi)^2}$$

الآن نوجز علاقات نظام الإسقاط الأسطواني المنطوري بالحالة العامة:

$$(٤,٦٤) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = r_k \lambda \\ y = CR \frac{\sin \varphi}{F + \cos \varphi} \\ F = \frac{D}{R}, C = F + \cos \varphi_k \\ n = \cos \varphi_k \sec \varphi \\ m = \frac{C(F \cos \varphi + 1)}{(F + \cos \varphi)^2} \\ \mu_s = m.n \\ \tan(45^\circ + \frac{\omega}{4}) = \sqrt{\frac{a}{b}} \end{array} \right.$$

(٤,٦,١) حالات خاصة من نظم الإسقاط المنطورية

لنعتبر الآن الحالات الخاصة التالية:  $F = \infty$ ,  $F = 1$ ,  $F = 0$

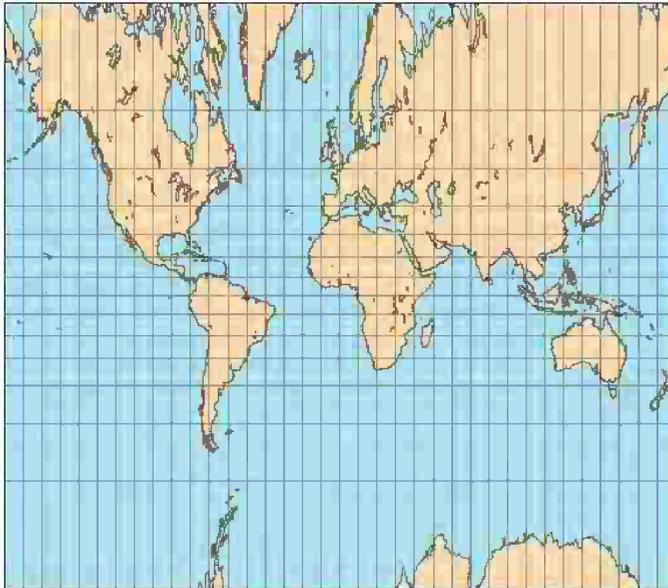
(٤, ٦, ١, ١) بالنسبة لأسطوانة ماسة للكرة

$$(F=0)$$

(٤, ٦٥)

$$\begin{cases} x=R\lambda, y=R\tan\varphi \\ n=\sec\varphi, m=\sec^2\varphi \\ \mu_s=\sec^3\varphi, \tan(45^\circ+\frac{\varphi}{4})=\sqrt{\sec\varphi} \end{cases}$$

الشكل رقم (٥١) يوضح شكل الشبكة بهذه الحالة.

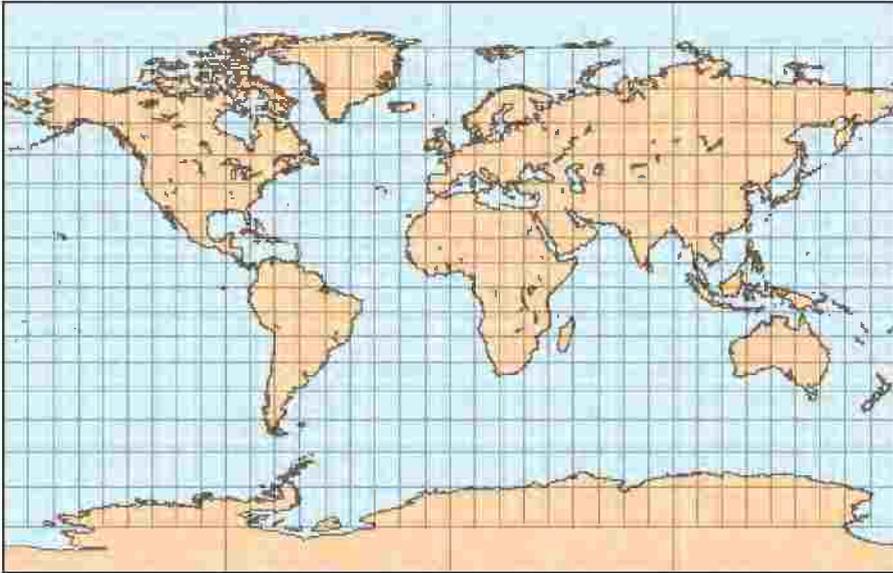


الشكل رقم (٥١). شبكة الإسقاط الأسطوانية المركزي (٣-٥) [٢١].

$$(F=1)$$

$$(٤,٦٦) \left\{ \begin{array}{l} x=R\lambda, y=2R\tan\frac{\varphi}{2} \\ n=\sec\varphi, m=\sec^2\frac{\varphi}{2} \\ \mu_2=\sec\varphi \sec^2\frac{\varphi}{2}, \tan(45^\circ+\frac{\varphi}{4})=\sqrt{\frac{a}{b}} \end{array} \right.$$

الشكل رقم (٥٢) يوضح شكل الشبكة بهذه الحالة.



الشكل رقم (٥٢). الإسقاط الأسطواني المستويوغرافي (F=1) [٢٦].

$$(F=\infty)$$

$$(٤,٦٧) \quad \begin{cases} x=R\lambda, y=R \sin\varphi \\ n=\sec\varphi, m=\cos\varphi \\ \mu_s=1, \tan(45^\circ + \frac{\omega}{4})=\sec\varphi \end{cases}$$

تمثل المجموعة (٤,٦٧) معادلات نظام الإسقاط الأسطواني المكافئ الذي مر معنا في الفقرة (٤,٤). والشكل رقم (٤٥) يمثل شكل الشبكة.

(٤,٦,١,٢) بالنسبة لأسطوانة قاطعة للكرة

$$(F=0)$$

$$(٤,٦٨) \quad \begin{cases} x=R \cos\varphi_k \lambda, y=R \cos\varphi_k \tan\varphi \\ n=\cos\varphi_k \sec\varphi, m=\cos\varphi_k \sec^2\varphi \\ \mu_s=\cos^2\varphi_k \sec^3\varphi, \tan(45^\circ + \frac{\omega}{4})=\sqrt{\frac{a}{b}} \end{cases}$$

$$(F=1)$$

$$(٤,٦٩) \quad \begin{cases} x=R \cos\varphi_k \lambda, y=(1+\cos\varphi_k)R \tan\frac{\varphi}{2} \\ n=\cos\varphi_k \sec\varphi, m=\frac{1}{2}(1+\cos\varphi_k) \sec^2\frac{\varphi}{2} \\ \mu_s=m.n, \tan(45^\circ + \frac{\omega}{4})=\sqrt{\frac{a}{b}} \end{cases}$$

$$(F=\infty)$$

$$(٤.٧٠) \quad \left\{ \begin{array}{l} x=R \cos \varphi_k \lambda, \quad y=R \sin \varphi \\ n=\cos \varphi_k \sec \varphi, \quad m=\cos \varphi \\ \mu_s=\cos \varphi_k, \quad \tan(45^\circ + \frac{\omega}{4}) = \sqrt{\frac{a}{b}} \end{array} \right.$$

قيم  $a, b$  في علاقة حساب التشوه الأعظمي للزوايا تتطابق مع قيم المقياس المحلي الأعظمي والأصغري  $m, n$  بالاتجاه والقيمة. العلاقات (٤.٧٠) أيضاً تعبر عن نظام الإسقاط الأسطواني المكافئ.

في كل نظم الإسقاط الأسطوانية المنظورية السابقة الذكر، تنطبق خطوط تساوي التشوهات مع مرسمات خطوط العرض. لأن المقياس المحلي تابع للعرض  $\varphi$  فقط.

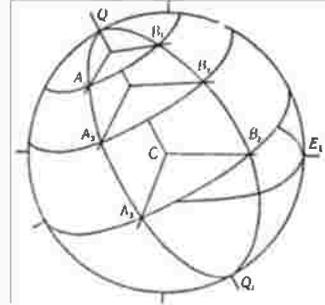
نظم الإسقاط الأسطوانية المنظورية تتمتع بخاصية المرونة في تحديد طبيعة توزيع التشوهات وذلك من خلال اختيار  $F, \varphi_k$ .

(٤,٧) نظم الإسقاط الأسطوانية المائلة

(٤,٧,١) تمهيد [٥]

بالنسبة للكرة الأرضية يمكن اعتبار أي نقطتين متناظرتين بالنسبة للمركز عبارة عن قطبين، بمعنى أنه ليس من الضروري أن يكون القطب هو نقطة تقاطع محور الدوران مع السطح. انطلاقاً من هذا يمكننا أن نتصور منظومة إحداثيات كروية  $(\phi', \lambda')$  منسوبة للقطب  $Q$  بدل القطب الجغرافي  $P$  (الشكل رقم ٥٣). نسمي  $A_3 B_3$  الاستواء المائل أو شبه الاستواء. أما الدوائر  $A_1 B_1, A_2 B_2$  فتسمى خطوط

العرض المائلة أو أشباه الموازيات. الأقواس  $B_1B_2B_3, A_1A_2A_3$  تسمى خطوط الطول المائلة أو أشباه خطوط الطول. النقطة  $Q$  تسمى القطب المائل.



الشكل رقم (٥٣). أشباه خطوط الطول والعرض.

إذا افترضنا أن إحداثيات القطب  $Q$  هي  $(\phi_0, \lambda_0)$  ، يمكن ربط الإحداثيات الجغرافية  $(\phi, \lambda)$  بالمنظومة المائلة  $(\phi', \lambda')$  بالعلاقات التالية :

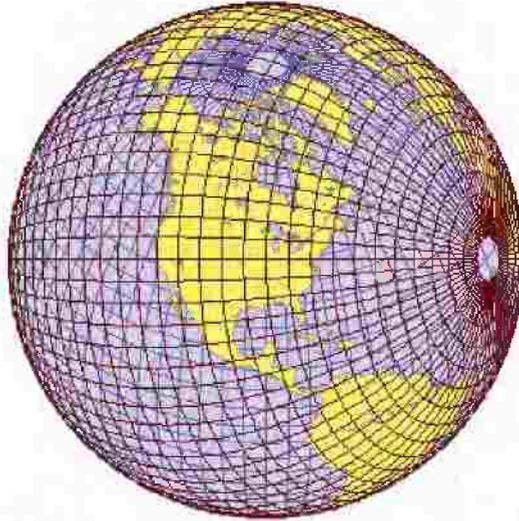
$$(٤,٧١) \quad \cos z = \sin \phi_0 \sin \phi + \cos \phi_0 \cos \phi \cos(\lambda - \lambda_0)$$

$$(٤,٧٢) \quad \tan a = \tan \lambda' = \frac{\cos \phi \sin(\lambda_0 - \lambda)}{\sin \phi \cos \phi_0 - \cos \phi \sin \phi_0 \cos(\lambda_0 - \lambda)}$$

$$\text{حيث } a = \lambda' \text{ و } z = \frac{\pi}{2} - \phi'$$

والشكل رقم (٥٤) يمثل كرة عليها شبكتي خطوط الطول والعرض القائمة

والمائلة.



الشكل رقم (٥٤). شبكة خطوط الطول والعرض القائمة والمائلة [٨].

#### (٢, ٧, ٤) تحديد إحداثيات القطب المائل [١١]

في حساب نظم الإسقاط تمر حالات تتطلب حساب نظام الإسقاط منسوباً لقطب مائل. وهناك ثلاث حالات لتعيين هذا القطب:

الحالة الأولى: عندما يكون القطب في مركز المنطقة المراد إنشاء خارطة لها، وهي حالة نظام الإسقاط السمتي المائل. هنا يتم اختيار موقع القطب وتحديد إحداثياته بشكل مباشر من أي خارطة للمنطقة.

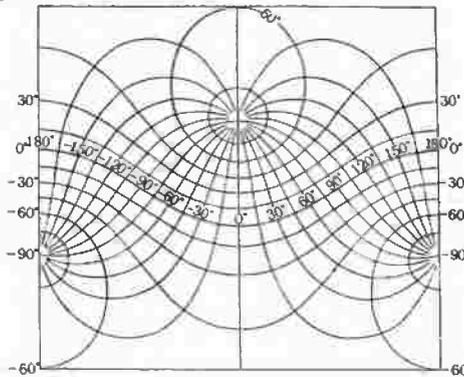
الحالة الثانية: عندما يكون القطب واقعاً على مسافة سمتية متساوية من نقطتين مفروضتين، وتساوي هذه المسافة  $\pi/2$ . هذه الحالة هي حالة نظام الإسقاط الأسطواني المائل، ويعتبر الاستواء المائل هو الدائرة العظمى المارة بنقطتين مفروضتين. في هذه الحالة نطبق العلاقات التالية (الشكل رقم ٥٥):



الشكلان رقم (٥٦) و(٥٧) يمثلان الوضعيتين الأفقية والمائلة للأسطوانة. خطوط الطول وخطوط العرض على سطح الكرة المنسوبة للقطب الجغرافي، تقابلها أشباه خطوط الطول وأشباه خطوط العرض على سطح الكرة المنسوبة للقطب المائل، وتسمى أيضاً بخطوط الطول المائلة وخطوط العرض المائلة. في نظم الإسقاط الأسطوانية هذه سترتسم الشبكة بالطبع كمجموعة مستقيمات متعامدة، لأنها تلعب دور خطوط الطول وخطوط العرض المنسوبة للقطب المائل.



الشكل رقم (٥٦). شبكة الإسقاط الأسطواني المعترض [٢].



الشكل رقم (٥٧). شبكة الإسقاط الأسطواني المائل.

إن علاقات نظم الإسقاط الأسطوانية المائلة هي نفس العلاقات الأساسية للنظام إسقاطات الأسطوانية مع تعويض قيم  $\varphi'$  و  $\lambda'$  بدل  $\varphi$  ,  $\lambda$  فيها من أجل نظم الإسقاط المائلة، بعد أن تكون  $\varphi'$  و  $\lambda'$  قد حسبنا بدلالة  $\varphi$  ,  $\lambda$  .

$$x = \alpha \lambda'$$

$$y = f(z) [y = f(\varphi')]$$

(٤,٧٥)

حيث  $\varphi'$  و  $\lambda'$  - الإحداثيات الكروية المنسوبة لقطب مائل.

الإحداثي  $\varphi'$  : يقاس على طول المعامد  $QAQ'$  من مستوي الاستواء المائل (أو شبه الاستواء)  $E'E_1'$  إلى النقطة  $A$  ، وباعتبار القياس من وحدات نصف القطر  $R$  ، أي بالراديان.

الإحداثي  $\lambda'$  : هو قياس الثنائية  $E'QA'$  المتشكلة من مستوي خطي الطول المائلين، الأول المار بـ  $A$  ، والثاني المار بالقطب الجغرافي  $P$  والقطب المائل  $Q$  معاً (الشكل رقم ٥٥).

$\alpha$  - ثابت التناسب.

محور  $oy$  يعتمد مرتسم خط الطول  $\lambda_0$  أو  $(\lambda_0 + 180^\circ)$  ، أي هو خط الطول المار بالقطب المائل. محور  $ox$  مماس لمرتسم خط الاستواء أو أي مواز آخر. التابع  $f$  الذي يحدد قيمة  $y$  يمكن تعيينه بنفس أسلوب الإسقاط في نظم الإسقاط القائمة. أما بالنسبة لنظم الإسقاط الأسطوانية المنظورية المائلة، فإنها تحسب وفق مراحل يمكن إيجازها كما يلي :

١ - تحديد نصف قطر الكرة  $R$  إما مباشرة أو بعملية إسقاط الإهليلج على سطح الكرة، وفق إحدى الطرق المذكورة في الفصل الثاني.

٢ - تحديد إحداثيات القطب المائل  $(\varphi_0, \lambda_0)$  انطلاقاً من الموقع الجغرافي للمنطقة وشكل حدودها.

- ٣- الانتقال من الإحداثيات الجغرافية  $(\varphi, \lambda)$  لأي نقطة إلى الإحداثيات الكروية المائلة  $(\varphi', \lambda')$  المنسوبة للقطب المائل.
- ٤- حساب عناصر نظام الإسقاط بتطبيق العلاقات (٤,٦٤)، ولكن بمضمون جديد، أي:

$$(٤,٧٦) \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \lambda' \\ y = CR \frac{\sin \varphi'}{F + \cos \varphi'} \\ F = \frac{D}{R}, C = F + \cos \varphi'_k \\ n = \cos \varphi'_k \sec \varphi' \\ m = \frac{C(F \cos \varphi' + 1)}{(F + \cos \varphi')^2} \\ \mu_s = m.n \\ \tan(45^\circ + \frac{\omega}{4}) = \sqrt{\frac{a}{b}} \end{array} \right.$$

تتعلق التشوهات في هذا النظام فقط بـ  $\varphi'$  ومن ثم خطوط تساوي التشوهات ستنتطبق مع مرتسمات المقنطرات، وهي في حالتنا هذه بشكل مستقيمات موازية لـ  $ox$ . إن نظم الإسقاط المنظورية المائلة تتمتع بمرونة أكثر من القائمة بسبب إمكانية اختيار مكان القطب، مما يؤدي إلى نظام إسقاط ذي شبكة أكثر ملائمة من غيرها بالنسبة لشكل منطقة ما مفروضة.

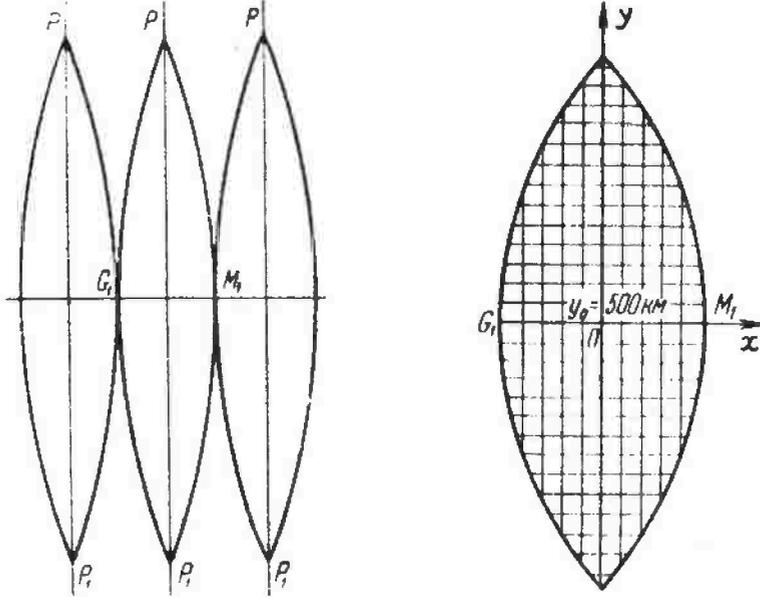
(٤,٨) نظام إسقاط غوص - كريوغر (Gauss-Kruger)

(٤,٨,١) مقدمة

يمكن فهم نظام إسقاط (غوص - كريوغر) هندسياً بأنه إسقاط سطح الإهليلج على أسطوانة معترضة بشكل قطاعات متماثلة، عرض كل منها  $6^\circ$  من أجل الخرائط

ذات المقياس (1/500 000 - 1/10 000) و بقطاعات عرضها  $3^\circ$  للخرائط ذات المقياس (1/5000 - 1/2000). وبالواقع نظام الإسقاط تحليلي. أما التشبيه الهندسي فقد جاء من كون المقياس المحلي ثابتاً حسب خط الطول الأوسط لكل قطاع، وهذا ما يوحي بوجود أسطوانة معترضة تمس (أو تقطع) الإهليلج حسب الخط الأوسط فيه. مرتسم خطوط الطول والعرض بهذا الإسقاط عبارة عن منحنيات متناظرة بالنسبة لخط الطول الأوسط وللستواء في كل قطاع. المنحني مرتسمات خطوط الطول ضعيف لدرجة أنه في أي لوحة من لوحات القطاع تنطبق مرتسمات خطوط الطول مع الإطار المستقيم. أما مرتسم خطوط العرض فيبدو بالمنحنى أكبر، بحيث أن إطار لوحة الخريطة العلوي (أو السفلي) لا ينطبق مع مرتسمات خطوط العرض. في الخرائط ذات المقياس الكبير (1/50 000 - 1/2000). مبدأ الإحداثيات التربيعية في كل قطاع، ينطبق مع نقطة تقاطع مرتسم خط الطول الأوسط مع مرتسم الاستواء. ومحور  $oy$  ينطبق مع مرتسم خط الطول الأوسط (الشكل رقم ٥٨).

عرف هذا الإسقاط أولاً من قبل (Gauss)، حيث قدم لأول مرة نظرية إسقاط سطح على آخر مع المحافظة على التشابه في الأشكال اللامتناهية بالصغر. وكحالة خاصة في هذه النظرية كان إسقاط سطح الإهليلج على مستو. وقد طبق نظريته هذه من أجل تعديل القياسات في عمليات التمثيل في (هانوفر) عام (١٨٢٥م). في عام (١٩١٢م) قدم (Kruger) معادلات عملية لحساب نظام إسقاط (غوص). بعدها عرف نظام الإسقاط باسم نظام إسقاط (Gauss-Kruger)، واستخدم بشكل واسع للخرائط الطبوغرافية.



الشكل رقم (٥٨). تقسيم سطح الأرض في إسقاط (غوص - كريوغر).

#### (٢, ٨, ٤) معادلات نظام إسقاط (Gauss-Kruger) [٥]

نأتي الآن لدراسة علاقات نظام إسقاط (غوص - كريوغر). ننوه هنا إلى أنه هناك العديد من الطرق لتحديد هذه العلاقات، وكلها بالنتيجة تؤدي إلى تحقيق شروط نظام الإسقاط. لتوجد معادلات هذا الإسقاط عن طريق التحويل في الساحة العقديّة. فمن المعروف أن أي تحويل عقدي يحافظ على التشابه، ومن ثم يمكن اعتباره عملية إسقاط مطابق.

لنعتبر التحويل العقدي التالي:

$$y+ix=F(q+i\lambda)$$

حيث  $q, \lambda$  - الإحداثيات الإيزومترية، التابع  $F$  يمكن أن يكون خطياً أو أسياً أو غير ذلك. يمكن نشر التابع  $F$  حسب سلسلة تايلور بالشكل:

$$(٤.٧٧) \quad F(q+i\lambda)=F(q)+i\lambda \frac{dF(q)}{dq} + \frac{(i\lambda)^2}{2!} \frac{d^2 F(q)}{dq^2} + \frac{(i\lambda)^3}{3!} \frac{d^3 F}{dq^3} + \dots$$

ولكن باعتبار قيم  $i^3, i^2, i$  ،

$$y+ix=F(q)+i\lambda \frac{dF(q)}{dq} - \frac{\lambda^2}{2} \frac{d^2 F(q)}{dq^2} + i \frac{\lambda^3}{6} \frac{d^3 F(q)}{dq^3} + \frac{\lambda^4}{24} \frac{d^4 F(q)}{dq^4} - i \frac{\lambda^5}{120} \frac{d^5 F(q)}{dq^5} + \dots$$

بمطابقة الحدود الحقيقية والتخيلية في طرفي العلاقة نحصل على :

$$(٤.٧٨) \quad \begin{cases} x=\lambda \frac{dF(q)}{dq} - \frac{\lambda^3}{6} \frac{d^3 F(q)}{dq^3} + \frac{\lambda^5}{120} \frac{d^5 F(q)}{dq^5} \\ y=F(q) - \frac{\lambda^2}{2} \frac{d^2 F(q)}{dq^2} + \frac{\lambda^4}{24} \frac{d^4 F(q)}{dq^4} + \dots \end{cases}$$

للحصول على نظام إسقاط (Gauss-Kruger) نفرض الشروط التالية :

- نظام الإسقاط مطابق (نعتبره محققاً لأن التحويل عقدي).
- الشبكة متناظرة بالنسبة لمرتسم خط الطول الأوسط ومرتسم الاستواء.
- مرتسم خط الطول الأوسط مستقيم وينطبق مع المحور  $oy$  (يتحقق باعتبار أنه من أجل خط الطول الأوسط في كل قطاع  $\lambda=0$ ).
- خط الطول الأوسط يرتسم بدون تشوه، أي  $m_0 = 1$ .

الشرط الأخير وباعتبار العلاقة الثانية من (٤.٧٨) يعطي :

$$(٤.٧٩) \quad F(q)=S_m$$

حيث  $S_m$  - طول قوس خط الطول من الاستواء إلى الموازي  $q$ .

نعوض (٤.٧٩) في (٤.٧٨) :

$$(٤,٨٠) \quad \begin{cases} x = \lambda \frac{dS_m}{dq} - \frac{\lambda^3 d^3 S_m}{6 dq^3} + \frac{\lambda^5 d^5 S_m}{120 dq^5}, \\ y = S_m - \frac{\lambda^2 d^2 S_m}{2 dq^2} + \frac{\lambda^4 d^4 S_m}{24 dq^4} \dots \end{cases}$$

لنوجد الآن التفاضلات :  $\dots \left| \frac{d^3 S_m}{dq^3} \right| \left| \frac{d^2 S_m}{dq^2} \right| \left| \frac{dS_m}{dq} \right|$

$$(٤,٨١) \quad \begin{aligned} \frac{dS_m}{dq} &= \frac{dS_m}{dq} \frac{d\varphi}{dq} \\ \frac{d\varphi}{dq} &= \frac{r}{M}, \quad \frac{dS_m}{d\varphi} = M \\ \frac{dS_m}{dq} &= r = N \cos \varphi \end{aligned}$$

وهو المشتق الأول لـ  $S_m$  بالنسبة للإحداثي الإيزومثري  $q$ .  
المشتق الثاني يمكن إيجاده انطلاقاً من العلاقة (٤,٨١) :

$$(٤,٨٢) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 S_m}{dq^2} &= \frac{dr}{dq} \frac{d\varphi}{dq} \\ \frac{dr}{d\varphi} &= -M \sin \varphi, \quad \frac{d\varphi}{dq} = \frac{r}{M} \\ \frac{d^2 S_m}{dq^2} &= -r \sin \varphi = -N \cos \varphi \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\frac{d^3 S_m}{dq^3} = -\frac{d(N \cos \varphi \sin \varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dq}$$

$$\frac{d(N \cos \varphi \sin \varphi)}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \sin \varphi + N \cos^2 \varphi = -M \sin^2 \varphi + N \cos^2 \varphi$$

$$(٤,٨٣) \quad \frac{d^3 S_m}{dq^3} = -N \cos^3 \varphi \left( \frac{N}{M} - \tan^2 \varphi \right)$$

نرمز لـ  $\tan^2 \varphi$  بـ  $t^2$  ونوجد النسبة  $N/M$  فنجد بعد تبديل  $\sin^2 \varphi$  بالمقدار  $1 - \cos^2 \varphi$  وتبديل  $e^2 / (1 - e^2)$  بالمقدار  $e'^2$  :

$$(٤,٨٤) \quad \frac{N}{M} = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi = 1 + \eta^2$$

$$e'^2 \cos^2 \varphi = \eta^2 \quad \text{حيث}$$

إذا العلاقة (٤,٨٣) تأخذ الشكل التالي :

$$(٤,٨٥) \quad \frac{d^3 S_m}{dq^3} = -N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2)$$

نوجد المشتقات من المرتبة الرابعة والخامسة بنفس الأسلوب فنحصل على :

$$(٤,٨٦) \quad \frac{d^4 S_m}{dq^4} = N \cos^3 \varphi \sin \varphi (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4)$$

$$(٤,٨٧) \quad \frac{d^5 S_m}{dq^5} = N \cos^5 \varphi (5 - 18t^2 + t^4 - 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2)$$

نبدل المشتقات المحسوبة بالعلاقات (٤,٨٥) فنحصل على :

$$(٤,٨٨) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda N \cos \varphi + \frac{\lambda^3}{6} N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) + \\ \frac{\lambda^5}{120} N \cos^5 \varphi (5 - 18t^2 + t^4 - 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2) + \\ y = S_m + \frac{\lambda^2}{2} N \cos \varphi \sin \varphi + \frac{\lambda^4}{24} N \cos^4 \varphi \sin \varphi (5 - t^2 \\ + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \dots \end{array} \right.$$

عند إصدار خرائط بمقياس (1:50 000) أو أصغر، يمكن إهمال الحدود الحاوية

على  $\lambda^4, \lambda^5$ .

في الواقع إن نظام إسقاط (Gauss-Kruger) لا يعتبر مطابقاً تماماً، لأن معادلاته

(٤,٨٨) لا تحقق شرطي (كوشي-ريمان) بل أحدهما. فإذا ما أضفنا حداً آخر في

(٤.٨٨) نجد أن الشرط الثاني من شروط (كوشي-ريمان) يتحقق، بينما لا يعود الأول محققاً. ولكن الاختلاف سيكون أقل مما هو عليه في الحالة الأولى. بإضافة حد آخر نعود لمثل الحالة الأولى، ولكن يقترب نظام الإسقاط أكثر لصفة المطابقة. الحسابات تبين أن اعتبار  $\lambda = 7/8$  حدود في (٤.٨٨) كاف ليكون نظام الإسقاط عملياً مطابقاً، وأن الشبكة متعامدة، والمقياس المحلي الخطي متساو في جميع الاتجاهات في أي نقطة. لإيجاد معادلة المقياس المحلي الخطي نستخدم العلاقة (١,٢٤):

$$m=n = \frac{\sqrt{g}}{r} = \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right]^{1/2}$$

ولنوجد التفاضلات الجزئية  $\frac{\partial y}{\partial \lambda}$ ،  $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$  من (٤.٨٨) مع إهمال الحدود الحاوية

على  $\lambda$  بالمرتبة الأعلى من  $\lambda^2$  في المشتق فنجد:

$$g = N^2 \cos^2 \varphi [\lambda^2 \sin^2 + 1 + \lambda^2 \cos^2 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) \dots]$$

$$g = N^2 \cos^2 \varphi [1 + \lambda^2 \cos^2 \varphi \left( \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} + 1 - t^2 + \eta^2 \right) \dots]$$

$$(٤,٨٩) \quad g = N^2 \cos^2 \varphi [1 + \lambda^2 \cos^2 \varphi (1 + \eta^2) \dots]$$

$$m = n = [1 + \lambda^2 \cos^2 \varphi (1 + \eta^2)]^{1/2}$$

$$m = n = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 + \eta^2) =$$

$$(٤,٩٠) \quad = 1 + 0.000152 (\lambda^0)^2 \cos^2 \varphi (1 + \eta^2)$$

في معظم المسائل الكارتوغرافية وبعض المسائل الجيوديزية يمكن اعتبار أن:

$$(٤,٩١) \quad m = n = 1 + 0.000152 (\lambda^0)^2 \cos^2 \varphi$$

هذه العلاقة تبين أن خطوطاً تساوي التشوهات في نظام إسقاط (غوص-

كريوغر) لها شكل قطع ناقص ينطبق محوره الكبير مع خط الطول الأوسط. التشوهات

الأعظمية تكون عند النقاط ( $\varphi = 0$ ,  $\lambda = \pm 3^0$ ) حيث تبلغ قيمة  $v_m = 0.14\%$ .

نظام إسقاط (Gauss-Kruger) يشترك في كثير من الصفات مع نظام الإسقاط الأسطوانية المطابق المعترض (غوص - لامبير) [٥]. الفرق بينهما هو أن نظام إسقاط (Gauss-Kruger) عبارة عن إسقاط مباشر لسطح الإهليلج على سطح مستو. بينما في الثاني إسقاط سطح الكرة على سطح أسطوانة معترضة، أي أنه نظام إسقاط هندسي.

في كثير من دول العالم يعرف نظام إسقاط U.T.M (Universal Transverse Marcator)، وهو مشابه كثيراً لنظام إسقاط (Gauss-Kruger)، إلا أن المقياس  $m_0$  حسب خط الطول الأوسط فيه لا يساوي الواحد، بل القيمة  $0.9996 /$ . وعلى بعد  $2000 / \text{km}$  من طرفي خط الطول الأوسط (حسب الاستواء)، يكون المقياس مساوياً للواحد. ومن ثم التشوه يكون سالباً أو موجباً حسب موقع النقطة، ويبلغ قيمته الأعظمية عند مرسم خط الطول الطرفي  $v_m = +0.05\%$ .