

نظم الإسقاط السميتية

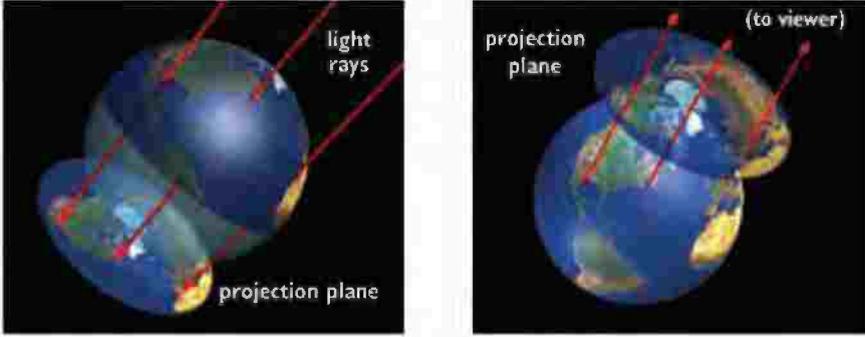
(٦, ١) العلاقات العامة لنظام الإسقاطات السميتية

تعتمد نظم الإسقاط السميتية على مبدأ إسقاط سطح الإهليلج (الكرة) على مستو مماس أو قاطع، بحيث تكون نقطة التماس أو دائرة التقاطع واقعة ضمن المنطقة المصورة.

نظم الإسقاط السميتية عرفت قديماً لتمثيل المنطقة القطبية أو لتمثيل القبة السماوية. واستخدمت فقط بالوضعية القائمة، أي عندما تكون نقطة التماس بين المستوي والكرة هي نقطة القطب (الشكلان رقما ٧٦ و٧٧).

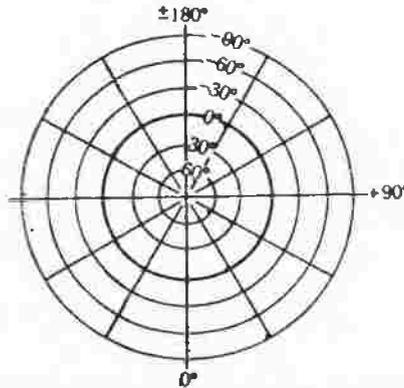


الشكل رقم (٧٦). مسقط القبة السماوية بالإسقاط السميتي.



الشكل رقم (٧٧). مبدأ الإسقاط السمتي [٢].

في هذه الإسقاطات تظهر شبكة خطوط الطول والعرض بالشكل التالي: خطوط العرض عبارة عن دوائر متمركزة في نقطة واحدة هي نقطة القطب. أما خطوط الطول فبشكل مستقيمت متلاقية في هذه النقطة. تساوي الزوايا بين هذه المستقيمت نظيراتها على سطح الكرة. يتبع التباعد بين الدوائر التي تمثل خطوط العرض، لنوع نظام الإسقاط من حيث التشوهات (مطابقة، مكافئة، ذات الشبكة المتساوية المسافات). إذاً الشبكة في هذه النظم متعامدة. الشكل رقم (٧٨) يبين مرسم الشبكة بشكل عام.



الشكل رقم (٧٨). شبكة الإسقاط السمتي.

إن هذه الاعتبارات تؤدي إلى تصور، بأن نظام الإسقاط السموي يمثل حالة خاصة من نظام الإسقاط المخروطي، وذلك عندما ينطبق رأس المخروط مع سطح الكرة. وفي هذه الحالة فإن الثابت α في نظام الإسقاط المخروطي يساوي الواحد. نظم الإسقاط السموية يمكن أن تستخدم بالوضعيات الثلاثة: القائمة والمائلة والمعتضة.

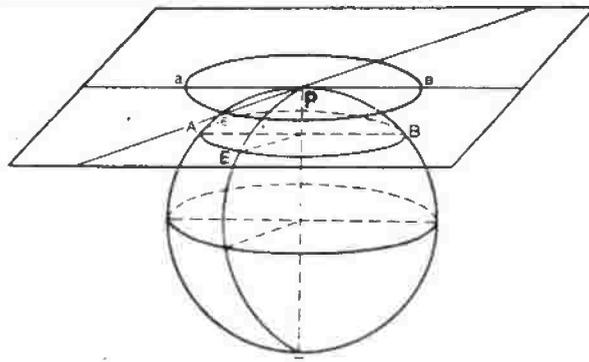
يبين الشكل رقم (٧٩) مرسوم الشبكة في الوضعيات المذكورة.



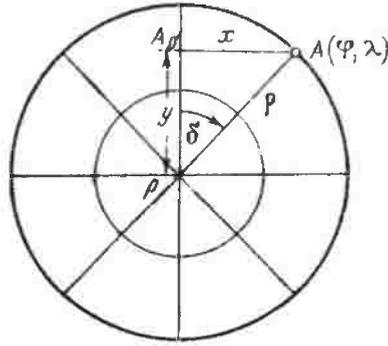
الشكل رقم (٧٩). شبكة الإسقاط السموي بعدة وضعيات [٢].

وكما ذكرنا يمكن أن تكون هذه الإسقاطات مطابقة أو مكافئة أو متساوية المسافات بالشبكة.

لنعتبر الآن نظام الإسقاط السموي القائم، بمستو مماس لسطح الإهليلج في القطب. إن مرسوم أي خط عرض سيكون بشكل دائرة، أما خط الطول فبشكل مستقيمت. في الشكل رقم (٨٠) الدائرة aeb تمثل مرسوم خط العرض AEB .



الشكل رقم (٨٠). التحليل الهندسي للإسقاط السمتي.



الشكل رقم (٨١). الإحداثيات القطبية في الإسقاط السمتي.

أما مرسم خط الطول PE فمرسمه PA في المستوي. فإذا نسبنا هذا المستوي إلى جملة محاور متعامدة Pxy (الشكل رقم ٨١)، فيمكن كتابة العلاقات العامة نظام الإسقاط لهذا بالشكل:

$$(٦.١) \quad \begin{cases} \delta = \lambda \\ \rho = f(\varphi) \end{cases}$$

حيث ρ نصف قطر مرسم خط العرض φ .

وباعتبار أن Py ينطبق مع مرتسم خط الطول الأساسي فإن:

$$(٦.٢) \quad \begin{cases} x = \rho \sin \delta \\ y = \rho \cos \delta \end{cases}$$

طبعاً هنا يمكن تطبيق انزياح للمحاور في المستوي حتى لا تظهر قيم سالبة في الإحداثيات. وهذا الانزياح في المستوي لا يؤثر على طبيعة توزيع التشوهات. وحتى يحصل التطابق بين اتجاه δ الموجب في الشكل رقم (٨١)، مع اتجاه λ الموجب، نفترض أن نقطة النظر تقع أسفل المستوي.

للحصول على علاقات المقياس المحلي نعتبر الشكل رقم (٨٢). ولنفترض أن النقطة A تحركت لمسافة صغيرة حسب خط الطول، وأصبحت في الموقع B. ثم تحركت لمسافة صغيرة أيضاً باتجاه الموازي وأصبحت في الموقع C. إن الإحداثيات الجغرافية للنقطة C ستكون $\varphi + d\varphi$ و $\lambda + d\lambda$. أي أن $AB = Md\varphi$ و $AD = BC = rd\lambda$. في المرتسم (المستوي) ستحصل التغيرات التالية المرافقة لنظيرها على الإهليلج:

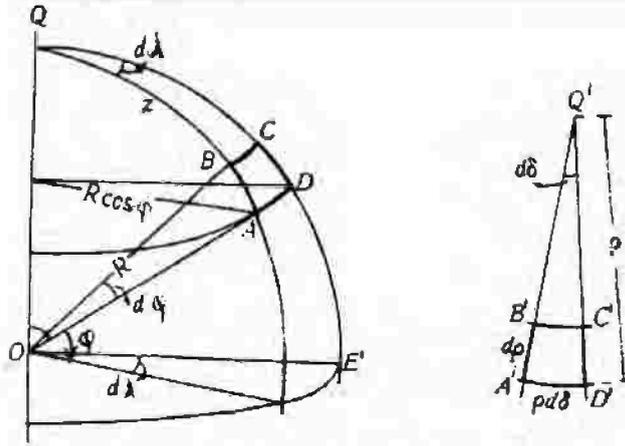
$$A'D' = \rho d\delta, \quad A'B' = d\rho$$

إذاً المقياس المحلي m يعطى بالعلاقة التالية:

$$(٦.٣) \quad m = \frac{-d\rho}{Md\varphi}$$

والمقياس المحلي n باعتبار $\lambda = \delta$:

$$(٦.٤) \quad n = \frac{\rho}{r}$$

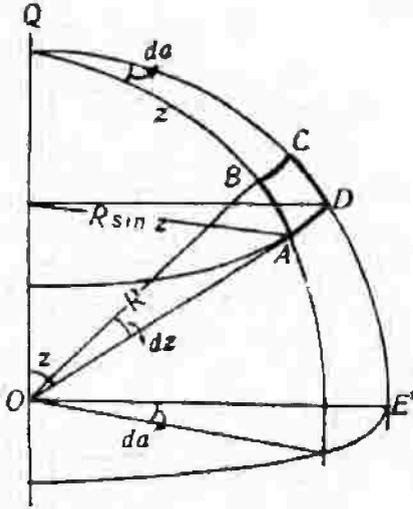


الشكل رقم (٨٢). مسقط جزء صغير من سطح الإهليلج.

والمقياس المحلي المساحي باعتبار الشبكة متعامدة:

$$(٦,٥) \quad \mu_s = mn = \frac{-\rho d\rho}{Mr d\phi}$$

لنتبر الآن الحالة العامة بالنسبة لنظم الإسقاط المائلة والمعرضة. في هذه الإسقاطات غالباً يعتمد سطح الكرة، لذلك يحدد أولاً نصف قطر الكرة R ، من أجل الخرائط ذات المقياس الصغير، أو يتم إسقاط سطح الإهليلج على الكرة بإحدى طرق الإسقاط المعروفة. بعد ذلك يحدد موقع القطب (ϕ_0, λ_0) ، بحيث يكون في منتصف المنطقة المصورة. وتحسب الإحداثيات الكروية المائلة ϕ' ، λ' أو غالباً z, a ، حيث z المسافة السميتية من مركز نظام الإسقاط، و a السميت بالنسبة للمحور oy في المستوي (اتجاه خط الطول الأوسط في المنطقة). الآن إذا عدنا للشكل رقم (٨٢) معتمدين سطح الكرة و الإحداثيات z, a بدلاً من ϕ, λ (الشكل رقم ٨٣)،
 لحصلنا على العلاقات العامة بشكل آخر [١]:



الشكل رقم (٨٣). مسقط جزء صغير من سطح الإهليلج في الحالة العامة.

(٦,٦)

$$\delta = a$$

(٦,٧)

$$\rho = f(z)$$

(٦,٨)

$$m' = \frac{d\rho}{R dz}$$

(٦,٩)

$$n' = \frac{\rho}{R \sin z}$$

$$\mu'_s = \frac{\rho d\rho}{R^2 \sin z dz}$$

(٦,٢) نظم الإسقاط السمتية المطابقة

في هذه النظم يجب أن يتحقق شرط المطابقة، وهو $m' = n'$ وباعتبار (٦,٧)

و(٦,٨) نجد:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dz}{\sin z}$$

$$\ln \rho = \ln \tan \frac{z}{2} + \ln C$$

$$(6.10) \quad \rho = C \tan \frac{z}{2}$$

C - ثابت التكامل.

نوجد علاقة المقياس المحلي اعتماداً على (6.8) و(6.10)

$$(6.11) \quad m' = n' = \frac{C \tan \frac{z}{2}}{R \sin z} = \frac{C}{2R} \sec^2 \frac{z}{2}$$

المقياس المحلي في نقطة مركز الإسقاط يساوي الواحد، أي أن $m'_{z=0} = 1$ من

هنا نستنتج أن:

$$(6.12) \quad C = 2R$$

ومن ثم:

$$(6.13) \quad \rho = 2R \tan \frac{z}{2}$$

$$(6.14) \quad m' = n' = \sec^2 \frac{z}{2}$$

$$(6.15) \quad \mu_s = \sec^4 \frac{z}{2}$$

فمن أجل نظام الإسقاط السمتي المطابق القائم، تصبح العلاقات (6.14) -

(6.13) بالشكل:

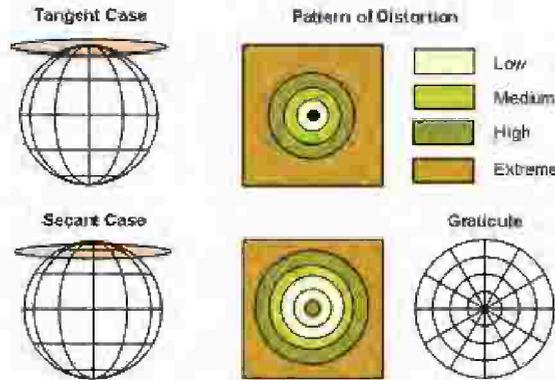
$$(٦.١٦) \quad \begin{cases} \rho = 2R \tan\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) \\ m' = \sec^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) \\ \mu_r = \sec^4\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) \end{cases}$$

أما إذا اعتبرنا أن المقياس المحلي يساوي الواحد حسب مرسم خط عرض، أو شبه خط عرض z_k ، أي أن المستوي قاطع لسطح الكرة (الشكل رقم ٨٤)، فإنه حسب (٦.١١):

$$(٦.١٧) \quad C = 2R \cos^2 \frac{z_k}{2}$$

نرمز للمقدار $\cos^2 \frac{z_k}{2}$ بالمقدار k . إذاً:

$$(٦.١٨) \quad \begin{cases} \rho = 2Rk \tan \frac{z}{2} \\ m' = k \sec^2 \frac{z}{2} \\ \mu_r = k^2 \sec^4 \frac{z}{2} \end{cases}$$



الشكل رقم (٨٤). المستوي المماس والمستوي القاطع.

(٦,٣) نظم الإسقاط السمعية المكافئة

في هذه الإسقاطات يتحقق شرط التكافؤ، أما باقي خصائص نظام الإسقاط، فهي مشتركة مع نظم الإسقاط السمعية بالحالة العامة. إذاً يجب أن يتعين التابع f في (٦,١) انطلاقاً من شرط التكافؤ $\mu_s = 1$. فباعتبار (٦,٩)، يكون:

$$\begin{aligned}\mu_s &= \frac{\rho d\rho}{R^2 \sin z dz} = 1 \\ \rho d\rho &= R^2 \sin z dz \\ \frac{\rho^2}{2} &= C - R^2 \cos z\end{aligned}\quad (٦,١٩)$$

ثابت التكامل C يتعين من اعتبار أن $\rho_{z=0} = 0$. إذاً:

$$C = R^2 \quad (٦,٢٠)$$

$$\rho^2 = 2R^2(1 - \cos z) = 4R^2 \sin^2 \frac{z}{2}$$

$$\rho = 2R \sin \frac{z}{2} \quad (٦,٢١)$$

نعوض قيمة ρ في (٦,٨) فنحصل على:

$$n' = \frac{2R \sin \frac{z}{2}}{R \sin z} = \sec \frac{z}{2} \quad (٦,٢٢)$$

وباعتبار نظام الإسقاط مكافئ. أي $m' n' = 1$ ، إذاً:

$$m' = \cos \frac{z}{2} \quad (٦,٢٣)$$

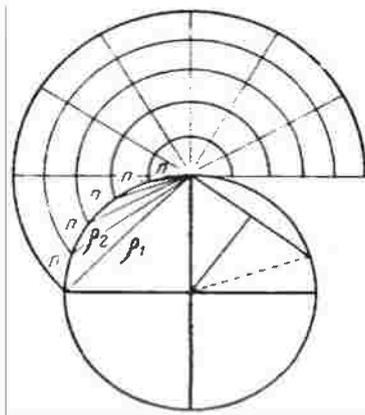
$$\tan \left(45^\circ + \frac{\omega}{4}\right) = \sec \frac{z}{2} \quad (٦,٢٤)$$

بالنسبة للعلاقة (٦،٢١)، يمكن تمثيلها هندسياً بأن ρ_z تساوي طول الوتر من القطب (مركز نظام الإسقاط)، إلى الموازي z (الشكلان رقما ٨٥ و ٨٦).
 أما عندما يكون المستوي قاطع حسب خط عرض مائل z_k ، فإن المقياس المحلي المساحي سيكون ثابتاً، ولكن لا يساوي الواحد، والعلاقات (٦،٢١) - (٦،٢٣) تأخذ الشكل التالي:

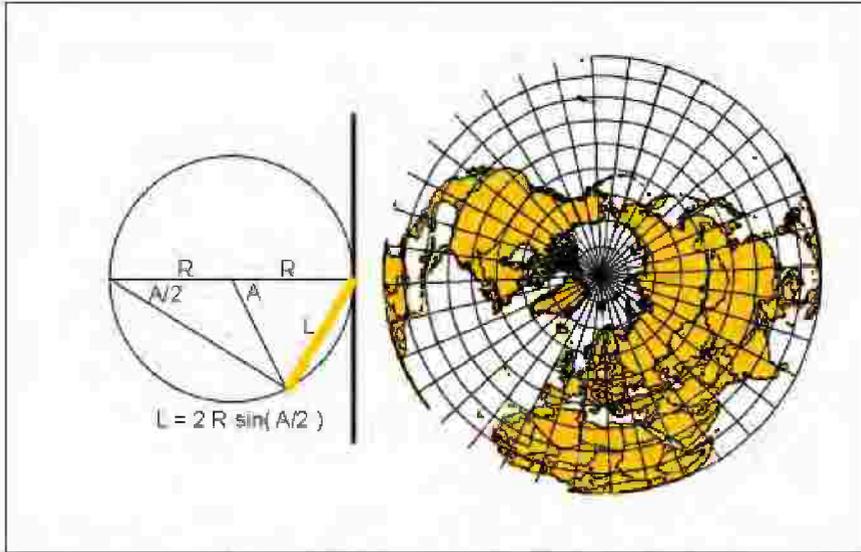
$$(٦،٢٥) \quad \begin{cases} \rho = 2Rk \sin \frac{z}{2} \\ n' = k \sec \frac{z}{2} \\ m' = k \cos \frac{z}{2} \end{cases}$$

$$\text{حيث } k = \cos \frac{z_k}{2}$$

إن قطوع التشوهات كما تبين العلاقات (٦،٢٢) و (٦،٢٣) يكون لها أنصاف أقطار متناسبة عكساً. تفلطح هذه القطوع يكون أكبر، كلما ابتعدنا عن مركز نظام الإسقاط.



الشكل رقم (٨٥). التمثيل الهندسي للإسقاط السمتي المكافئ ١.



الشكل رقم (٨٦). التمثيل الهندسي للإسقاط السمقي المكافئ ٢.

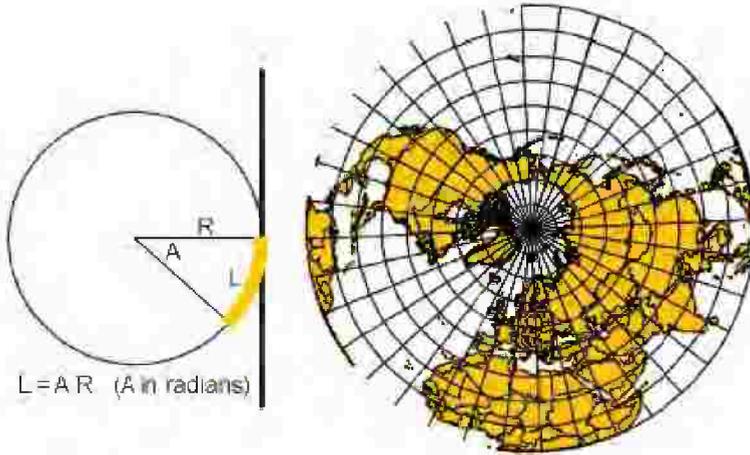
(٦,٤) نظم الإسقاط السمعية المتساوية المسافات

يقصد هنا بالشبكة المتساوية المسافات، الشبكة ذات التباعد الثابت والمساوي لنظيره على الإهليلج بين خطوط العرض (أو أشباه خطوط العرض)، لأن هذه الخاصة محققة بالنسبة لخطوط الطول (أو أشباه خطوط الطول) (الشكل رقم ٨٧).

إذاً الشرط الذي يجب أن يتحقق في هذه الإسقاطات هو $m' = 1$. وحسب

العلاقة (٦,٧):

$$(٦,٢٦) \quad \begin{cases} m' = \frac{d\rho}{Rdz} = 1 \\ \rho = Rz + C \end{cases}$$



الشكل رقم (٨٧). التمثيل الهندسي للإسقاط السمق المتساوي المسافات.

وياختيار أن $\rho=0$ عندما $z=0$ ، إذاً $c=0$. ومن ثم:

$$(٦,٢٧)$$

$$\rho = Rz$$

$$(٦,٢٨)$$

$$m' = \frac{Rz}{R \sin z} = \frac{z}{\sin z}$$

$$(٦,٢٩)$$

$$\mu_s = n'$$

$$(٦,٣٠)$$

$$\tan\left(45^\circ + \frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{\frac{z}{\sin z}}$$

من أجل نظم الإسقاط القائمة نستبدل المضمون z بـ $(90^\circ - \varphi)$ فنحصل

على:

$$(٦,٣١) \quad \rho = R \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$$

$$(٦,٣٢) \quad n = \frac{\frac{\pi}{2} - \varphi}{\cos \varphi}$$

ومن أجل المستوي القاطع حسب خط عرض مائل z_k ، فإن المقياس m' يصبح ثابت ولكن أقل من الواحد.

$$(٦,٣٣) \quad \left\{ \begin{array}{l} m' = k = \frac{\sin z_k}{z_k} \\ \rho = R k z \\ n' = \frac{\sin z_k z}{z_k \sin z} \end{array} \right.$$

ولتطبيق هذه العلاقات في نظم الإسقاط القائمة نستبدل z بـ $(90^\circ - \varphi)$ ،

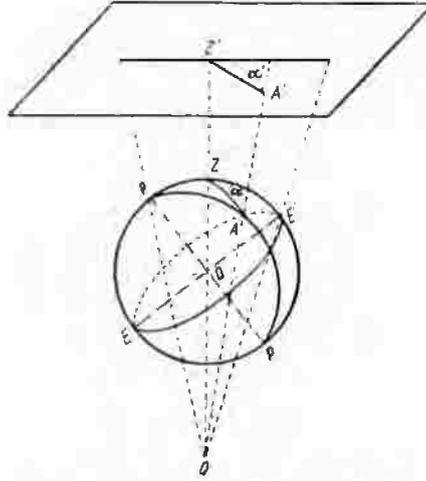
أي:

$$(٦,٣٤) \quad \rho = \frac{\cos \varphi_k}{\frac{\pi}{2} - \varphi_k} R \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$$

هذا الإسقاط يعرف باسم نظام إسقاط باستيل (Postel). وفي الواقع فقد اقترح البيروني هذا الإسقاط قبل باستيل بحوالي ٥٠٠ عام [٨]. فالبيروني اقترحه كنظام إسقاط هندسي يعتمد على مبدأ ميكانيكي (تدحرج كرة على مستو بجميع الجهات دون انزلاق). بينما باستيل قدمه كنظام إسقاط تحليلي عام ١٥٨١م.

(٦, ٥) نظم الإسقاط السمتية المنظورية

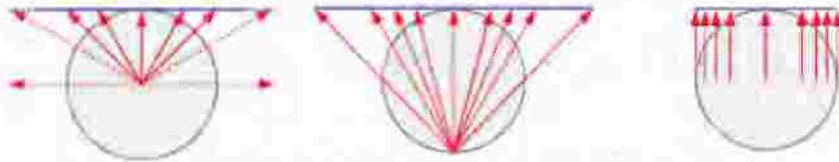
في هذه النظم يتم إسقاط شبكة خطوط الطول و العرض بشكل مباشر على مستوي التصوير، من نقطة نظر ثابتة Q (الشكل رقم ٨٨)، واقعة على قطر الكرة أو امتداده المعامد للمستوي.



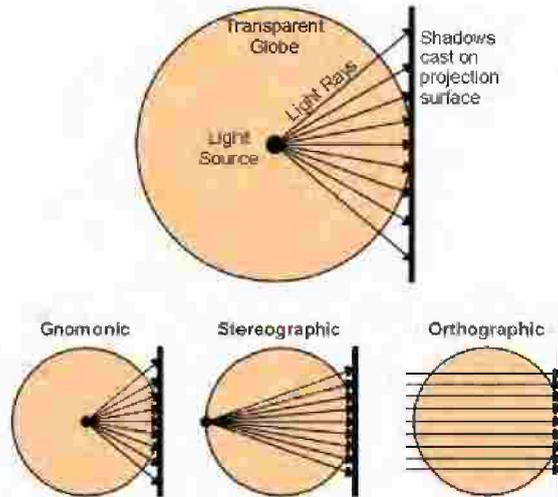
الشكل رقم (٨٨). الإسقاط المنظوري.

بحسب وضعية مستوي التصوير بالنسبة للكرة، تعرف ثلاثة أنواع من نظم الإسقاط المنظورية: القائمة أو القطبية والتي يكون المستوي فيها يوازي مستوي الاستواء، المعترضة أو الاستوائية والتي يكون فيها المستوي موازياً لمستوي أحد خطوط الطول، المائلة أو الأفقية والتي يكون المستوي فيها موازياً لأفق أي نقطة واقعة على سطح الكرة بين الاستواء والقطب (الشكلان رقما ٨٩ و ٩٠). وبحسب المسافة من النقطة Q إلى مستوي التصوير (نظام الإسقاط) تعرف أربعة أنواع من هذه نظم الإسقاط:

- الأرتوغرافية: التي تكون نقطة الإسقاط (النظر) فيها واقعة في اللانهاية، بحيث تعتبر خطوط الإسقاط متوازية.
- الخارجية: التي تكون نقطة الإسقاط فيها واقعة خارج الكرة على بعد معين.
- الستيروغرافية: وهي نفسها نظم الإسقاط السميتية المطابقة، ولكن أسلوب الإسقاط هنا هندسي، حيث يتم الإسقاط بأشعة صادرة من نقطة إسقاط واقعة على سطح الكرة.
- المركزية: وذلك عندما تقع نقطة الإسقاط في مركز الكرة.



الشكل رقم (٨٩). الحالات المختلفة للإسقاط المنظوري ١ [٢].



الشكل رقم (٩٠). الحالات المختلفة للإسقاط المنظوري ٢ [٣].

حساب هذه الإسقاطات يمر بالخطوات التالية :

- ١- تحديد إحداثيات القطب الجديد (مركز نظام الإسقاط).
 - ٢- الانتقال من الإحداثيات الجغرافية (φ, λ) إلى الإحداثيات الكروية (z, a) .
 - ٣- حساب الإحداثيات القطبية في المستوي (ρ, δ) .
 - ٤- حساب الإحداثيات التربيعية (x, y) .
 - ٥- حساب المقياس المحلي الطولي والمساحي.
- لإيجاد العلاقات العامة لنظم الإسقاطات المنظورية السمتية، نعتبر الشكل رقم

(٩١).

لنسقط النقطة A من سطح الكرة على مستوي نظام الإسقاط وذلك بمستقيم إسقاط g_0 . من النقطة A نزل العمود AC على القطر الرئيسي للكرة (القطر الرئيسي هو القطر المعامد لمستوي الإسقاط أو المرسم). إن طول AC عبارة عن نصف قطر خط عرض مائل ذي المسافة السمتية z ، ومرتسمه في المستوي هو $A'O'A'$. من المثلثين

$CAg, A'_0 A' g$

$$\frac{A'_0 A'}{CA} = \frac{g A'_0}{g C}$$

ولكن :

$$A'_0 A' = \rho$$

$$CA = R \sin z$$

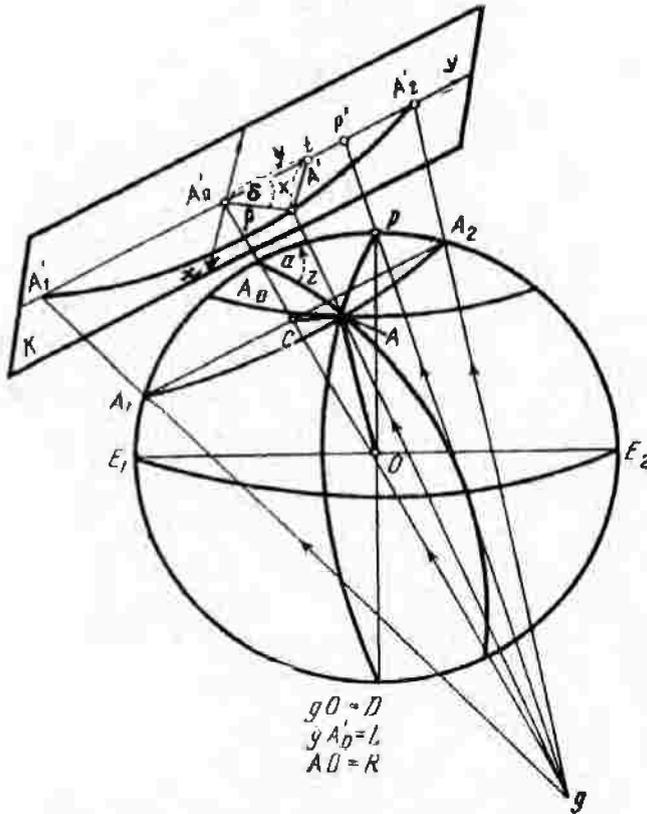
$$g A'_0 = L$$

$$g C = D + R \cos z$$

إذاً :

(٦,٣٥)

$$\rho = \frac{LR \sin z}{D + R \cos z}$$



الشكل رقم (٩١). التحليل الهندسي للإسقاط المنظوري.

أما الإحداثيات التربيعية فتعطى بالعلاقات :

(٦,٣٦)

$$\begin{cases} x = \rho \sin \delta = \frac{LR \sin z \sin a}{D + R \cos z} \\ y = \rho \cos \delta = \frac{LR \sin z \cos a}{D + R \cos z} \end{cases}$$

$$(٦,٣٧) \quad m' = \frac{d\rho}{Rdz} = \frac{L(D \cos z + R)}{(D + R \cos z)^2}$$

$$(٦,٣٨) \quad n' = \frac{\rho d\delta}{R \sin z da} = \frac{\rho}{R \sin z} = \frac{L}{D + R \cos z}$$

$$(٦,٣٩) \quad \mu_s = m' n' = \frac{L^2 (D \cos z + R)}{(D + R \cos z)^3}$$

$$(٦,٤٠) \quad \tan(45^\circ + \frac{\omega}{4}) = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

يمكن تعويض قيم a, z بدلالة الإحداثيات الجغرافية φ, λ باستخدام

العلاقات التالية من الهندسة الكروية [٥]:

$$\cos z = \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda_0 - \lambda)$$

$$\sin z \cos a = \sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos(\lambda_0 - \lambda)$$

$$\sin z \sin a = \cos \varphi \sin(\lambda_0 - \lambda)$$

حيث (φ_0, λ_0) إحداثيات القطب A_0 .

المقياس المحلي m', n', μ_s والتشوه الأعظمي للزوايا ω في نظم الإسقاط

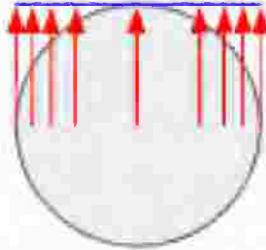
السمّية المنظورية تتعلق بالمسافة السمّية z فقط. لذلك خطوط تساوي التشوهات لها

شكل دوائر.

لندرس الآن أنواع نظم الإسقاط السمّية المنظورية بالتفصيل.

(٦, ٥, ١) نظام الإسقاط الأرتوغرافي

في هذه النظم، نقطة النظر تقع في اللانهاية، أي $D = \infty$. في هذه الحالة يتم الإسقاط بواسطة حزمة مستقيمات متوازية معامدة لمستوي نظام الإسقاط (الشكل رقم ٩٢).

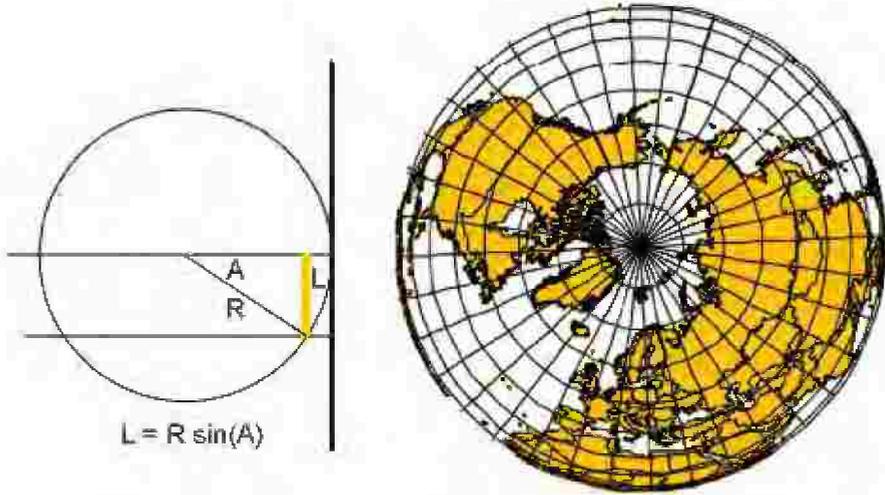


الشكل رقم (٩٢). الإسقاط الأرتوغرافي.



الشكل رقم (٩٣). حالات الإسقاط الأرتوغرافي [٢].

إن العلاقات العامة (٦,٣٦) - (٦,٤٠) التي ذكرناها، تنطبق على نظم الإسقاط المائلة (الأفقية) وذلك بتبديل قيمة D بـ ∞ . مستوي نظام الإسقاط يعتبر مماس للكورة في النقطة A_0 التي هي مركز المنطقة المصورة ذات الإحداثيات (φ_0, λ_0) (الشكل رقم ٩٤).



الشكل رقم (٩٤). التحويل الهندسي للإسقاط الأرتوغرافي.

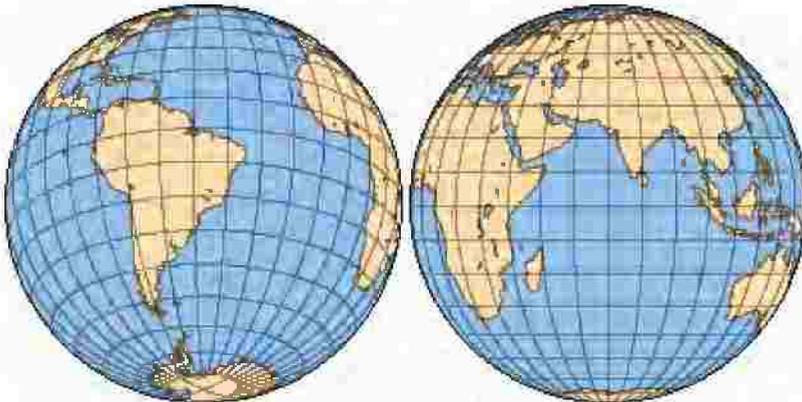
في هذه الحالة $L = D + R$. وباعتبار علاقات الهندسة الكروية:

$$(٤.٤١) \quad \begin{cases} \rho = \frac{(D+R)\sin z}{D+R\cos z} \\ \rho_{D=0} = R \sin z \end{cases}$$

معادلات نظم الإسقاط الأرتوغرافية تعطى بالشكل التالي:

$$(٦.٤٢) \left\{ \begin{array}{l} \delta = a \\ \rho = R \sin z \\ x = \rho \sin \delta = R \sin z \sin a = R \cos \varphi \sin (\lambda_0 - \lambda) \\ y = \rho \cos \delta = R \sin z \cos a \\ \quad = R [\cos \varphi_0 \sin \varphi - \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos (\lambda_0 - \lambda)] \\ \\ m' = \frac{d\rho}{R dz} = \cos z \\ n' = \frac{\rho}{R \sin z} = 1 \\ \mu_z = m' n' = \cos z \\ \tan (45' + \frac{\omega}{4}) = \sqrt{\sec z} \end{array} \right.$$

يبين الشكل رقم (٩٥) نموذجين لهذا الإسقاط : المعترض والمائل .



الشكل رقم (٩٥). لغارات العالم بالإسقاط الارتموغرافي [٢].

في نظم الإسقاط السمتية المنظورية كما ذكرنا تعرف ثلاثة أنواع: القائمة والمائلة والمعرضة، وذلك حسب وضعية مستوي الإسقاط. ففي حالة القائمة حيث $\varphi_0 = 90^\circ$ لدينا $a = \lambda$ و $z = 90^\circ - \varphi$ ، فإذا عوضنا ذلك في المجموعة (٦,٤٢) حصلنا على:

$$(٦,٤٣) \quad \begin{cases} \delta = \lambda, \rho = R \cos \varphi \\ x = R \cos \varphi \sin(\lambda_0 - \lambda) \\ y = -R \cos \varphi \cos(\lambda_0 - \lambda) \\ m' = \sin \varphi, n' = 1, \mu_s = \sin \varphi \end{cases}$$

من هذه العلاقات ولإيجاد معادلة مرتسم خط الطول، نحذف φ من علاقتي x, y فنجد أن:

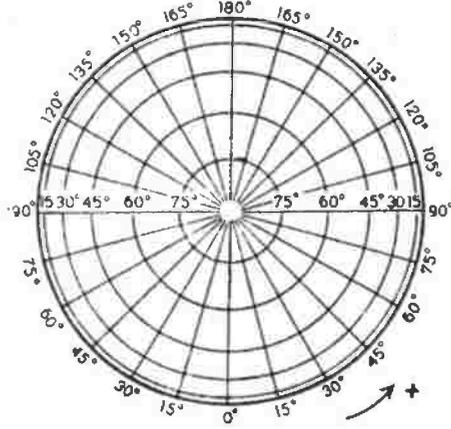
$$\frac{y}{x} = -\tan \lambda$$

وهي معادلة مجموعة مستقيمات.

أما بحذف λ فنحصل على معادلة مرتسم خط العرض:

$$x^2 + y^2 = (R \cos \varphi)^2$$

وهي مجموعة دوائر متمركزة في مبدأ الإحداثيات، و يتناقص التباعد فيما بينها عند الابتعاد عن المركز. هذه الدوائر ترسم بدون تشوه، لأن $n = 1$ (الشكل رقم



الشكل رقم (٩٦). شبكة الإسقاط الأرتوغرافي.

أما معادلات نظام الإسقاط الأرتوغرافي المعترض. فيمكن الحصول عليها باعتبار $\varphi_0 = 0$ من (٦,٤٢):

$$(٦,٤٤) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta = a \\ \rho = R \sin z \\ x = R \cos \varphi \sin(\lambda_0 - \lambda) \\ y = R \cos \varphi \\ m' = \cos z \\ n' = 1 \\ \mu_s = \cos z \\ \tan(45^\circ + \frac{\omega}{4}) = \sqrt{\sec z} \end{array} \right.$$

من علاقات x, y يمكن كتابة معادلات خطوط الطول:

$$(٦,٤٥) \quad \left(\frac{x}{R \sin(\lambda_0 - \lambda)} \right)^2 + \left(\frac{y}{R} \right)^2 = 1$$

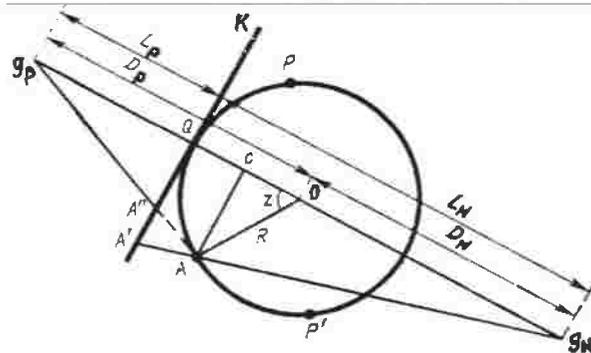
وهي معادلة مجموعة قطع ناقصه بنصف قطر كبير R وصغير $R \sin(\lambda_0 - \lambda)$.

التباعد بين هذه القطوع يتناقص بالابتعاد عن مرتسم خط الطول الأوسط λ_0 .
أما مرتسمات خطوط العرض فهي مجموعة مستقيمات متوازية كما تبين
العلاقة:

$$y = R \cos \varphi$$

(٦، ٥، ٢) نظم الإسقاط الخارجية

تعتبر نظم الإسقاط الخارجية أحد أنواع نظم الإسقاط المنظورية، حيث تكون نقطة النظر فيها واقعة على امتداد القطر الرئيسي للكرة، وعلى مسافة معينة خارج الكرة. وبحسب الوضعية النسبية لنقطة الإسقاط ومستوي التصوير (المرتسم) والسطح المصور، يعرف نوعان لنظم الإسقاطات الخارجية. الأول يسمى نظام الإسقاط الخارجي بصورة خلفية (negative)، وذلك عندما يكون مستوي نظام الإسقاط ماساً للسطح المصور، بحيث يكون السطح المصور واقعاً بين نقطة النظر ومستوي التصوير. الثاني يسمى نظام الإسقاط الخارجي بصورة أمامية (positive) كما يبين (الشكل رقم ٩٧)، وذلك عندما تكون نقطة النظر في g_p .



الشكل رقم (٩٧). الإسقاط الخارجي.

يمثل هذا الإسقاط حالة تصوير سطح الأرض من كاميرا محمولة على طائرة أو قمر صناعي. تمثل A'' في الشكل ٩٧ مرتسم النقطة A في حالة الصورة الأمامية. أما في حالة الصورة الخلفية فإن A' تمثل مرتسم A . Q تمثل نقطة مركز نظام الإسقاط، وهي منطبقة مع مركز المنطقة المصورة. حسب الشكل ومن تشابه المثلثات نجد أن:

$$\frac{QA''}{CA} = \frac{g_p Q}{g_p C}$$

$$g_p Q = L_p, g_p O = D, g_p C = D' - R \cos z, QA'' = \rho$$

$$(6,46) \quad \rho_p = \frac{L_p R \sin z}{D - R \cos z} = \frac{(D - R) R \sin z}{D - R \cos z}$$

معادلات هذه النظم يمكن صياغتها بالشكل التالي، مع مراعاة الربط مع الإحداثيات الجغرافية (φ, λ) :

$$(6,47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta = a \\ \rho = \frac{(D - R) R \sin z}{D - R \cos z} \\ x = \frac{(D - R) R \cos \varphi \sin(\lambda_0 - \lambda)}{D - R [\sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos(\lambda_0 - \lambda)]} \\ y = \frac{(D - R) R [\cos \varphi_0 \sin \varphi - \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos(\lambda_0 - \lambda)]}{D - R [\sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos(\lambda_0 - \lambda)]} \\ m' = \frac{(D - R)(D \cos z - R)}{(D - R \cos z)^2} \\ n' = \frac{D - R}{D - R \cos z} \end{array} \right.$$

حيث:

$$\cos z = \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda_0 - \lambda)$$

إن تصوير جزء من سطح الأرض محدود بخط العرض المائل ذي المسافة السميتية z_0 ، الذي يمكن تحديده من العلاقة:

$$\cos z_0 = \frac{R}{D}$$

حيث يكون خط الإسقاط في هذه الحالة ماس للكرة، ويشكل بدوره عامد المخروط الماس.

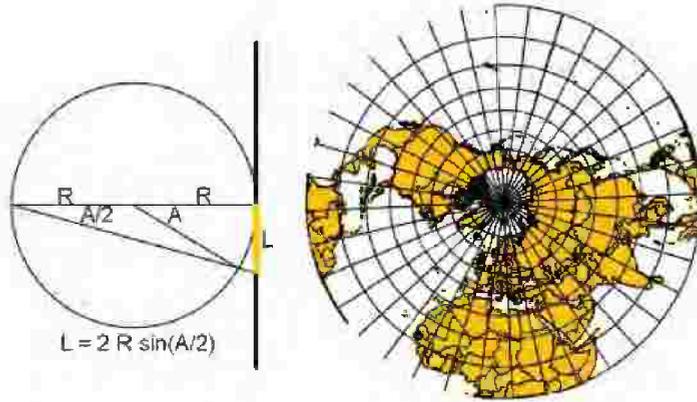
المقياسان المحليان m' ، n' في مركز الإسقاط يساويان الواحد. وعند أطراف الصورة:

$$m'_{z_0} = 0$$

إن التبدل السريع لقيمة المقياس المحلي m' من مركز الصورة إلى الأطراف يؤمن خاصة نقل انطباع الكروية لسطح الأرض. لذلك نظام الإسقاط الخارجي بصورة أمامية (positive) يوصى باستخدامه لخرائط المقياس الصغير.

(٦, ٥, ٣) نظام الإسقاط الستيريوغرافي

في هذا الإسقاط تقع نقطة النظر g على بعد R من مركز الكرة، ويشكل مناظر لمركز مستوي الإسقاط. إذاً هي واقعة على سطح الكرة (الشكل رقم ٩٨). يتميز هذا نظام الإسقاط بخاصة هامة وهي أنه نظام إسقاط مطابق وينقل الأشكال إلى مستوي نظام الإسقاط بدون تشوه (تشابه هندسي).



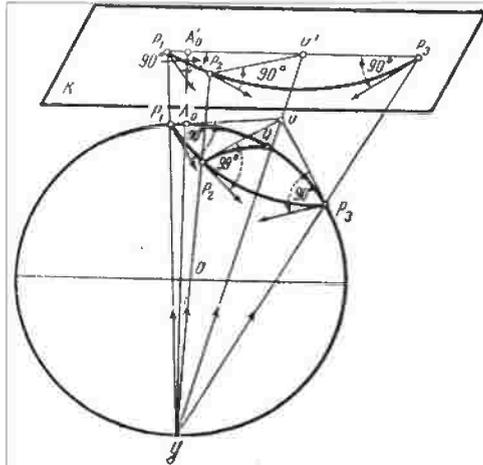
الشكل رقم (٩٨). التمثيل الهندسي للإسقاط الستيروغرافي.

نعود للعلاقات (٦.٣٥) - (٦.٤٠) ونعوض قيمة L بـ $2R$ فنحصل على:

$$(٦.٤٨) \left\{ \begin{array}{l} \delta = a \\ \rho = \frac{2R^2 \sin z}{R + R \cos z} = 2R \tan \frac{z}{2} \\ x = \rho \sin \delta = \frac{2R \cos \varphi \sin(\lambda_0 - \lambda)}{1 + [\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda_0 - \lambda)]} \\ y = \rho \cos \delta = \frac{2R [\cos \varphi_0 \sin \varphi - \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos(\lambda_0 - \lambda)]}{1 + [\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda_0 - \lambda)]} \\ m' = \frac{d\rho}{R dz} = \sec^2 \frac{z}{2} \\ n' = \frac{\rho}{R \sin z} = \sec^2 \frac{z}{2} \\ \mu_s = \sec^4 \frac{z}{2} \\ \omega = 0 \end{array} \right.$$

إذا المقياس المحلي مستقل عن الاتجاه، و نظام الإسقاط مطابق. الخطوط الإيزومترية تنطبق مع مرسمات خطوط العرض المائلة.
 نأتي الآن إلى خاصة التشابه في هذا الإسقاط. نعتبر دائرة ما من سطح الكرة $P_1 P_2 P_3$ (الشكل رقم ٩٩).

إن مسقط هذه الدائرة حسب نظام الإسقاط الستيروجرافي هو منحنى $P'_1 P'_2 P'_3$. ولنبرهن أنه دائرة أيضاً. لنفرض لدينا مخروط يمس الكرة حسب الدائرة $P_1 P_2 P_3$ ، v تمثل رأس المخروط، وبالطبع العاقد vP_1 يعامد المماس للدائرة في P_1 وكذلك المولد vP_2 مع المماس في P_2 والمولد vP_3 مع المماس في P_3 . لنفرض الآن حسب الشكل أن v' تمثل مسقط رأس المخروط v . المماسات للدائرة مسقطها مماسات للمنحنى في P'_1, P'_2, P'_3 . $v'P_1$ مسقط vP_1 ، $v'P'_2$ مسقط vP_2 ، $v'P'_3$ مسقط vP_3 .



الشكل رقم (٩٩). مسقط دائرة في الإسقاط الستيروجرافي.

ولكن بما أن نظام الإسقاط مطابق فإن الزوايا بين مرتسم المولد ومرتسم المعاس أيضاً قائمة وبالتالي المنحني يتحقق فيه تعامد أنصاف أقطاره مع مماساته فهو دائرة. إذا بدلنا بالعلاقات (٦,٤٨) a بـ λ و z بـ $90^\circ - \varphi$ ، نحصل على نظام الإسقاط السمتي المطابق القائم :

$$(٦,٤٩) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta = \lambda \\ \rho = 2R \tan\left(\frac{\pi}{4} \frac{\varphi}{2}\right) \\ x = \frac{-2R \cos \varphi \sin \lambda}{1 + \sin \varphi} \\ y = \frac{2R \cos \varphi \cos \lambda}{1 + \sin \varphi} \\ m = n = \sec^2\left(\frac{\pi}{4} \frac{\varphi}{2}\right) \\ \mu_s = \sec^4\left(\frac{\pi}{4} \frac{\varphi}{2}\right) \end{array} \right.$$

وبحذف φ ثم λ من علاقات x, y نحصل على معادلات مرتسم خطوط الطول والعرض :

$$(٦,٥٠) \quad \frac{y}{x} = -c \tan \lambda$$

وهي مجموعة مستقيمات تلتقي في نقطة واحدة.

$$(٦,٥١) \quad x^2 + y^2 = 4R \left(\frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \right)^2$$

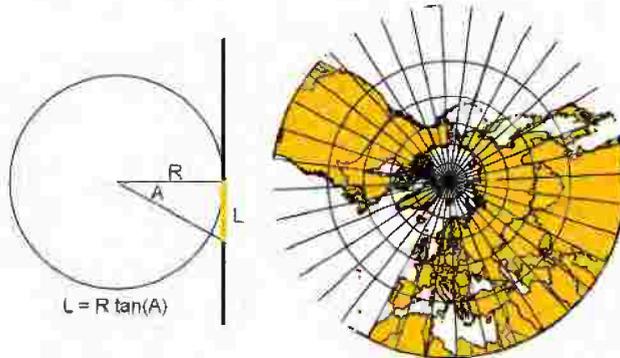
وهي مجموعة دوائر متمركزة في نفس النقطة.

إذا اعتبرنا أن $\varphi_0 = 0$ في العلاقات (٦,٤٨)، فسنحصل على علاقات نظام الإسقاط الستيريوغرافي المعترض:

$$(٦,٥٢) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta = a \\ \rho = 2R \tan\left(\frac{z}{2}\right) \\ x = \frac{2R \cos \varphi \sin(\lambda_0 - \lambda)}{1 + \cos \varphi \cos(\lambda_0 - \lambda)} \\ Y = \frac{2R \sin \varphi}{1 + \cos \varphi \cos(\lambda_0 - \lambda)} \\ m' = n' = \sec^2\left(\frac{z}{2}\right) \\ \mu_s = \sec^4\left(\frac{z}{2}\right) \end{array} \right.$$

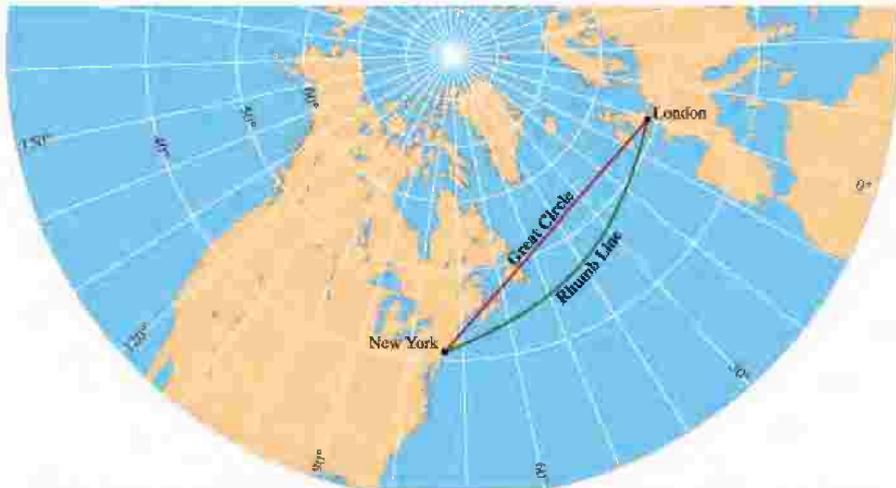
(٦,٥,٤) نظام الإسقاط المركزي

في هذا الإسقاط تقع نقطة النظر في مركز الكرة (الشكل رقم (١٠٠)).



الشكل رقم (١٠٠). التحليل الهندسي للإسقاط المركزي.

هذا الإسقاط يتميز بخاصية هامة مشابهة لتلك التي في نظام إسقاط ميركاتور. ففي هذا الإسقاط مرسم أي دائرة عظمى (أرتودروم) عبارة عن مستقيم (باللون الأحمر في الشكل رقم ١٠١). فهنا إذا يتحقق المنطق الهندسي. فالأرتودروم هو أقصر مسافة على سطح الكرة بين نقطتين، ومرتمسه مستقيم وهو أيضاً أقصر مسافة بين نقطتين في المستوي. بينما في نظام إسقاط ميركاتور اللوكسودروم مرتمسه مستقيم، ولكنه ليس أقصر مسافة بين نقطتين على سطح الكرة.



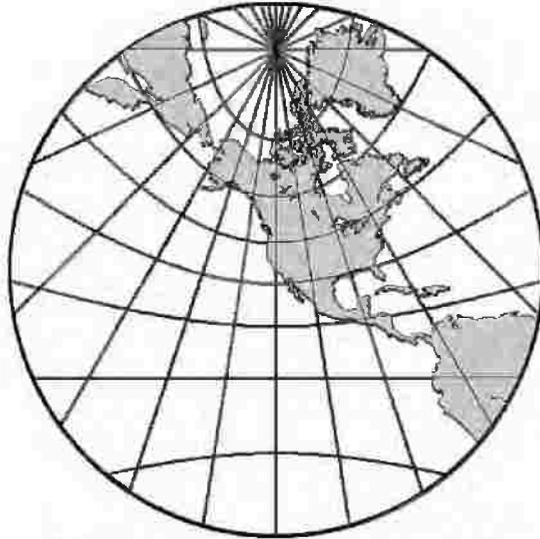
الشكل رقم (١٠١). الفرق بين اللوكسودروم والدائرة العظمى بالإسقاط المركزي [٢].

إن برهان خاصية نظام الإسقاط المركزي المذكورة ليس صعباً، فمرتمس أي دائرة عظمى عند إسقاطها من المركز يقع في مستوي هذه الدائرة. وباعتبار أن هذا المرتمس ينتمي أيضاً إلى مستوي النظر (نظام الإسقاط)، إذا المرتمس ينتمي إلى تقاطع هذين المستويين، فهو إذاً مستقيم.

معادلات هذا الإسقاط يمكن استنتاجها من (٦.٣٥) - (٦.٤٠) وذلك بتعويض قيمة $D = 0$ و $L = R$. (الشكل رقم ١٠٢).

(٦.٥٣)

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta = a \\ \rho = 2R \tan z \\ x = \rho \sin \delta = R \tan z \sin a \\ Y = \rho \cos \delta = R \tan z \cos a \\ m' = \sec^2 z \\ n' = \sec z \\ \mu_s = \sec^3 z \\ \tan\left(45^\circ + \frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{\sec z} \end{array} \right.$$



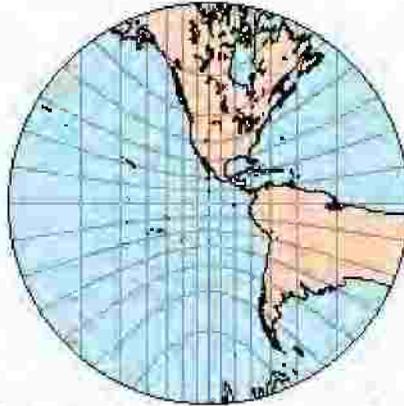
الشكل رقم (١٠٢). الإسقاط المركزي المائل [٢].

إذا اعتبرنا في (٦,٤٨) أن $\varphi_0 = 0$ و $a = \lambda$ و $z = 90^\circ - \varphi$ نحصل على علاقات نظام الإسقاط المركزي القائم:

$$(٦,٥٤) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta = \lambda \\ \rho = R c \tan \varphi \\ x = R c \tan \varphi \cos \lambda \\ y = R c \tan \varphi \sin \lambda \\ m = \cos ec^2 \varphi \\ n = \cos ec \varphi \\ \mu_s = \cos ec^3 \varphi \\ \tan(45^\circ + \frac{\omega}{4}) = \sqrt{\cos ec \varphi} \end{array} \right.$$

أما إذا اعتبرنا $\varphi_0 = 0$ فنحصل على علاقات نظام الإسقاط المركزي المعترض (الشكل رقم ١٠٣):

$$(٦,٥٥) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta = a \\ \rho = R \tan z \\ x = R \tan z \\ y = R \tan \varphi \operatorname{ses} \lambda \\ m' = \sec^2 z \\ n' = \sec z \\ \mu_s = \sec^3 z \\ \tan(45^\circ + \frac{\omega}{4}) = \sqrt{\sec z} \end{array} \right.$$



الشكل رقم (١٠٣). الإسقاط المركزي المعترض [٧].

بالنسبة لمرتسم الشبكة، ففي نظام الإسقاط المركزي القائم، مرتمس خطوط الطول عبارة عن مستقيمتات متلاقية بنقطة واحدة، هي القطب الجغرافي. أما خطوط العرض، فمرتمسها عبارة عن دوائر، متمركزة في نفس النقطة. في نظام الإسقاط المركزي المائل، مرتمس خطوط الطول أيضاً مستقيمتات (حسب خاصية هذا الإسقاط)، متلاقية في نقطة القطب الجغرافي. خط الاستواء مرتمسه مستقيم، يعامد مرتمس خط الطول الأساسي. خطوط العرض مرتمسها منحنيات قطعية، فالثني تتحقق فيها العلاقة $\varphi - 90^\circ < \varphi$ يكون مرتمسها قطعاً زائداً. أما عندما $\varphi - 90^\circ > \varphi$ ، فالمرتمس بشكل قطع ناقص، محوره الكبير يتطبق مع اتجاه خط الطول الأوسط. في نظام الإسقاط المعترض، مرتمس خطوط الطول عبارة عن مستقيمتات متوازية، موازية لمحور OX . خطوط العرض مرتمسها قطوع زائدة، تقعرها باتجاه القطبين. خط الاستواء مرتمسه مستقيم، ينطبق مع محور OY . التباعد بين مرتمسات خطوط الطول يتزايد بالابتعاد عن خط الطول الأوسط حسب التابع $\tan \lambda$ ، ومن ثم مرتمس خطي الطول $\lambda = \pm 90^\circ$ في اللانهاية.

(٦,٥,٥) نظم الإسقاط السميتية المنظورية لسطح الإهليلج [٥]

هذه الحالة تمثل صورة فضائية أو جوية حقيقية لمنطقة من سطح الأرض. وهذه الحالة يجب اعتمادها (أي عدم إهمال تفلطح الأرض)، من أجل إصدار الخرائط ذات المقياس المتوسط والكبير. نعتبر مستويًا ماساً لسطح الإهليلج في نقطة $Q_0(\varphi_0, \lambda_0)$ منه. ولنعتبر الناظم Q_0O' وجملة إحداثيات متعامدة متمركزة في Q_0 ، وموجهة بحيث OY ينطبق مع مماس خط الطول Q_0P ، ويتجه باتجاه الشمال، OZ ينطبق مع الناظم (الشكل رقم ١٠٤). ولندرس حالة الصورة الأمامية (positive).

$$O'M = N'_0, Q_0g_p = H, O'Q_0 = N_0, g_pO' = D_p \quad \text{لنعتبر أن:}$$

حيث تمثل g_p نقطة التصوير (الإسقاط) من ارتفاع H عن سطح الأرض، N_0 نصف قطر المناء الناظم الأول (المستوي الناظمي الأساسي) وذلك في النقطة Q_0 . نستخدم في هذا الإسقاط الإحداثيات القطبية z, a . العلاقة بين الإحداثيات القطبية z, a والإحداثيات الجغرافية φ, λ تعطى بالعلاقات التالية:

$$(٦,٥٦) \quad \begin{cases} \sin z \cos a = t_1 + e^2 \tau \left[(t_1 \sin \varphi - \cos \varphi_0) + \frac{e^2}{2} (t_1 t_2 - 2t_3 \cos \varphi_0) \right] \\ \sin z \sin a = t_4 \left[1 + e^2 \tau \left(\sin \varphi + \frac{e^2}{2} t_2 \right) \right] \end{cases}$$

حيث:

$$(٦,٥٨) \quad \rho_p = \frac{HN'_0 \sin z}{D - N'_0 \cos z}$$

$$(٦,٥٩) \quad N'_0 = \left[1 - \frac{e^2}{2} (\sin \varphi - \sin \varphi_0)^2 \right]$$

إذا الإحداثيات :

$$(٦,٦٠) \quad \begin{cases} x_p = \frac{HN_0}{D_p - N_0 t_5} \left\{ t_4 \left[1 + \frac{e^2}{2} \tau (2 \sin \varphi - \frac{\tau D_p - t_6}{D_p - N_0 t_5}) \right] \right\} \\ y_p = \frac{HN_0}{D_p - N_0 t_5} \left\{ t_1 + \frac{e^2}{2} \tau [2(t_1 \sin \varphi - \cos \varphi_0) - (\tau D_p - t_6)] \frac{t_1}{D_p - N_0 t_5} \right\} \end{cases}$$

حيث :

$$t_6 = 2N_0 (t_5 \sin \varphi - \sin \varphi_0)$$

$$D = N_0 + H$$

قيم المقياس المحلي نحصل عليها بتطبيق نظرية نظم الإسقاط العامة :

$$m' = \frac{1}{p} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$n' = \frac{1}{p \sin z} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial a} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

حيث :

$$p = N_0 \left(1 - \frac{e^2}{2} \tau^2 \right)$$

ومن ثم :

$$(٦,٦١) \quad \left\{ m'_p = \frac{H(D \cos z - N_0)}{(D - N_0 \cos z)^2} \left[1 - \frac{e^2}{2} \left[p_s \frac{\sin z (D - N_0 \cos z)}{D \cos z - N_0} + \tau^2 \frac{N_0 \cos z}{D - N_0 \cos z} \right] \right] \right.$$

$$(٦,٦٢) \quad n'_p = \frac{H}{D - N_0 \cos z} \left(1 - \frac{e^2}{2} \tau^2 \frac{N_0 \cos z}{D - N_0 \cos z} \right)$$

حيث:

$$P_z = \frac{2\tau}{D - N_0 \cos z} \left[D(\cos z \cos \alpha \cos \varphi_0 - \sin z \sin \varphi_0) - \frac{\tau D N_0 \sin z}{2(D - N_0 \cos z)} \right]$$

المقياس المحلي المساحي:

$$\mu_s = m'_p n'_p$$

إن العلاقات (٦,٦٠) - (٦,٦٢) هي بدلالة D . ومن ثم يمكن الحصول على الحالات الخاصة بتبديل قيمة D ، فمثلاً $D=0$ تعطي نموذج نظام الإسقاط المركزي، $D=\infty$ تعطي نموذج نظام الإسقاط الأرتوغرافي، $D=N_0$ نحصل على نظام الإسقاط السيتريوغرافي للإهليلج.