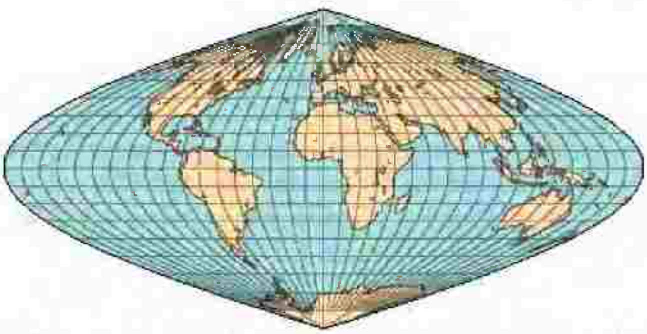
الفصل السابع

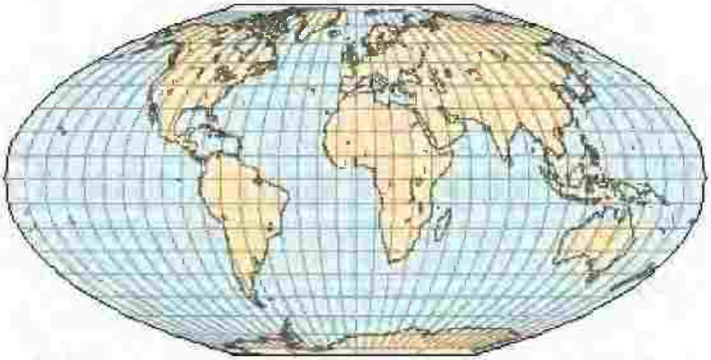
نظم الإسقاط شبه الأسطوانية

(٧,١) العلاقات العامة لنظم الإسقاط شبه الأسطوانية

في نظم الإسقاط شبه الأسطوانية، خطوط العرض ترتسم بشكل مستقيمات متوازية، وخطوط الطول بشكل منحنيات جيبية أو قطعية بأشكالها المختلفة، وقد تكون مستقيمات في حالات نادرة. التباعد بين مرتسمات خطوط الشبكة يتبع لعلاقات الإسقاط. يرتسم القطب بشكل نقطة أو خط قطبي طوله يتعلق بنوع نظام الإسقاط. إذاً في هذه النظم الشبكة غير متعامدة، ومن ثم لايمكن أن تكون هذه الإسقاطات مطابقة. الشكلان رقما (١٠٥) و(١٠٦) يبينان نموذجين من هذه الإسقاطات.



الشكل رقم (١٠٥). نموذج أول من الإسقاطات شبه الأسطوانية [٢].



الشكل رقم (١٠٦). نموذج ثان من الإسقاطات شبه الأسطوانية [٢].

يمكن اعتبار نظم الإسقاط الأسطوانية، حالة خاصة من نظم الإسقاط شبه الأسطوانية، وذلك عندما يكون مرتسم خطوط الطول مستقيمات متوازية.

بسبب عدم تعامد مرتسم الشبكة، فإن المقياسين المحليين الحديين لاينطبقان مع اتجاه مرتسمات خطوط الطول و العرض، ماعدا مرتسم خط الطول الأساسي.

تستخدم نظم الإسقاط شبه الأسطوانية لتصوير سطح الأرض بالكامل أو لجزء كبير منه، أي لخرائط المقياس الصغير. لذلك يعتمد سطح الكرة كسطح مقارنة. في هذه الإسقاطات هناك محوري تناظر وهما مرتسم الاستواء ومرتسم خط الطول الأساسي. استخدام هذه النظم بوضعية مائلة أو معترضة نادر جداً، لذلك ستقتصر دراسة هذه الإسقاطات على القائمة فقط.

اعتماداً على تعريف هذه النظم، تأخذ المعادلات العامة لها الشكل التالي:

$$\begin{cases} x=f_1(\varphi,\lambda) \\ y=f_2(\varphi) \end{cases} \qquad (٧،١)$$

فباعتبار هذه العلاقات، وتطبيق علاقات النظرية العامة لنظم الإسقاط، يمكن كتابة العلاقات العامة للمقياس المحلي وتشوه الزوايا الأعظمي في هذه الإسقاطات وذلك بالنسبة لسطح الإهليلج:

$$\left\{\begin{aligned}
&f=\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda}\\
&h=\frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{dy}{d\varphi}\\
&\tan\varepsilon=-\frac{f}{h}=-\frac{\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}}{\dfrac{dy}{d\varphi}}\\
&m=\frac{\sqrt{e}}{M}=\frac{dy/d\varphi}{M}\sec\varepsilon\\
&n=\frac{\sqrt{g}}{r}=\frac{\partial x/\partial \lambda}{r}\\
&\mu_s=mn\cos\varepsilon=\frac{\dfrac{\partial x}{\partial \lambda}\dfrac{dy}{d\varphi}}{Mr}\\
&\tan\frac{\omega}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m^2+n^2-2\mu_s}{\mu_s}}
\end{aligned}\right. \qquad (٧,٢)$$

أما إذا اعتبرنا سطح الكرة فنحصل على:

$$\left\{\begin{aligned} m&=\frac{dy/d\varphi}{R}\sec\varepsilon \\ n&=\frac{\partial x/\partial\lambda}{R}\sec\varphi \\ \mu_s&=\frac{\dfrac{\partial x}{\partial\lambda}\dfrac{dy}{d\varphi}}{R^2}\sec\varphi \end{aligned}\right. \qquad (٧,٣)$$

من المجموعتين (٧,٢) و (٧,٣) نلاحظ أن $m = m_0 \sec\varepsilon$. أي أن المقياس المحلي حسب خط الطول في نقطة ما m ، يساوي المقياس المحلي حسب خط الطول الأوسط m_0 ، وعلى نفس الموازي، مضروباً بالمقدار $\sec\varepsilon$ في هذه النقطة. وكذلك $n = n_0 \sec\varphi$ ، أي أن المقياس المحلي حسب خط العرض في نقطة ما، يساوي المقياس حسب خط الاستواء، وعلى خط الطول المار بالنقطة نفسها، مضروباً بالمقدار $\sec\varphi$ للنقطة المذكورة.

من أجل نظم الإسقاط شبه الأسطوانية المكافئة يجب أن يتحقق شرط التكافؤ. من العلاقات (٧,٢) لدينا:

$$\mu_s = \frac{\dfrac{\partial x}{\partial\lambda}\dfrac{dy}{d\varphi}}{M\,r} = 1$$

$$\frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{dy}{d\varphi} = M\,r$$

نكامل بالنسبة لـ λ :

$$x=\frac{Mr}{dy/d\varphi}\lambda+F(\varphi) \qquad (٧,٣)$$

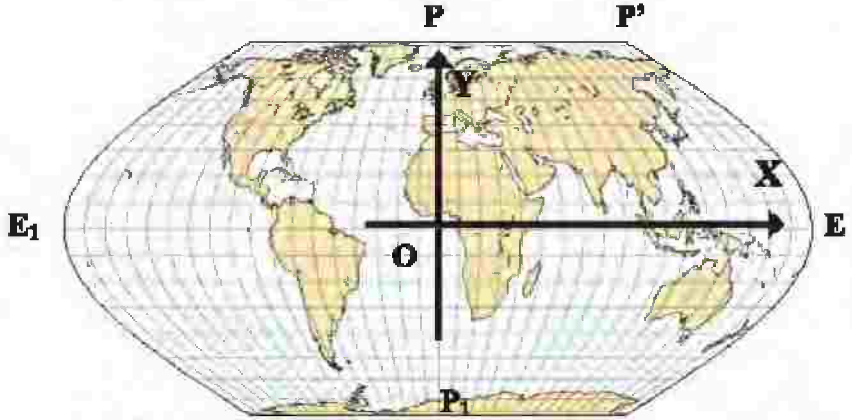
$F(\varphi)$ − ثابت التكامل وهو تابع لـ φ. فاذا فرضنا أن محور oy ينطبق مع $\lambda = 0$ إذاً $F(\varphi)=0$.

من أجل الكرة:

$$x=\frac{R^2\cos\varphi}{dy/d\varphi}\lambda \qquad (٧,٤)$$

(٧,٢) نظم الإسقاط شبه الأسطوانية الجيبية المكافئة [٥]

هنا في هذه الإسقاطات، عدا عن شرط التكافؤ، يجب أن تكون مرتسمات خطوط الطول بشكل منحنيات جيبية متناظرة بالنسبة لمرتسم خط الطول الأوسط. ولنفرض الآن أن مرتسم القطب هو مستقيم موازٍ للاستواء، وأن محور oy ينطبق مع مرتسم خط الطول الأوسط، و ox ينطبق مع الاستواء (الشكل رقم ١٠٧).



الشكل رقم (١٠٧). شبكة الإسقاط شبه الأسطواني الجيبي المكافئ [٢].

المعادلات العامة لهذه الإسقاطات تعطى بالشكل:

$$\begin{cases} x=(A\cos\alpha+B)\lambda \\ y=C\alpha \end{cases} \qquad (٧,٥)$$

حيث: $\alpha = f(\varphi)$

C , B , A ثوابت.

لتحديد التابع f والثوابت C , B , A لدينا ثلاثة شروط يمكن تطبيقها على (٧,٥):

١- شروط مجال تغير العلاقة بين φ , α .

٢- شروط أبعاد الشبكة.

٣- شرط التكافؤ.

الشرط الأول غالباً يعتبر كالتالي: عندما $\varphi = 0$ فإن $\alpha = 0$ ، وعندما $\varphi = \frac{\pi}{2}$ فإن $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

الشرط الثاني: هو تحديد العلاقة بين $p\,p_1$, EE_1 , $p\,p'$. هذه العلاقة يمكن أن تكون بالشكل التالي:

$$op = pp' = \frac{1}{2} o\,E$$

الشرط الثالث: هو العلاقة (٧,٤) أي:

$$x = \frac{R^2 cos\varphi}{dy / d\varphi}\lambda$$

فإذا عدنا إلى (٧,٥) فمن الشرط الأول والثالث:

$$C\frac{\pi}{2} = B\pi = \frac{1}{2}(A + B)\pi$$

إذاً

$$A = B = \frac{1}{2} C \qquad (٧,٦)$$

ومن ثم:

$$\begin{cases} x=\frac{C}{2}(cos\alpha+1)\lambda \\ y=C\alpha \end{cases} \quad (٧،٧)$$

والآن من شرط التكافؤ:

$$xdy=\lambda R^2 cos\varphi d\varphi$$

وباعتبار:

$$\frac{C^2}{2}(cos\,\alpha+1)d\alpha=R^2\,cos\varphi\,d\varphi$$

$$\frac{C^2}{2}(\alpha+sin\alpha)=R^2\,sin\varphi \quad (7-8)$$

وحسب الشرط الأول فإن:

$$\frac{C^2}{2}(\frac{\pi}{2}+1)=R^2$$

$$\begin{cases} C=\frac{2R}{\sqrt{\pi+2}} \\ A=B=\frac{2R}{\sqrt{\pi+2}} \end{cases} \quad (٧،٩)$$

إذاً العلاقات العامة (٧،٧) تصبح بالشكل:

$$\begin{cases} x=\frac{2R}{\sqrt{\pi+2}}\lambda cos^2\frac{\alpha}{2} \\ y=\frac{2R}{\sqrt{\pi+2}}\alpha \end{cases} \quad (٧،١٠)$$

ومن (٧,٨) مع اعتبار قيمة C من (٧,٩) نجد أن:

$$\alpha + sin\alpha = \frac{\pi+2}{2} sin\varphi \qquad (٧,١١)$$

وهو شكل التابع f في العلاقات العامة.

طبعاً لتطبيق العلاقات (٧,١٠) ذات المضمون α فيجب حساب α من (٧,١١) بدلالة الزاوية φ. المعادلة (٧,١١) تحل بطرق عددية.

من (٧,٢):

$$\tan \varepsilon = -\frac{\partial x / \partial \varphi}{d y / d \varphi} = -\frac{\partial x / \partial \alpha}{d y / d \alpha}$$

$$\tan \varepsilon = \frac{\lambda}{2} \sin \alpha \qquad (٧,١٢)$$

$$\begin{cases} m = \dfrac{\sqrt{\pi+2}}{2} \cos \varphi \ \sec^2 \dfrac{\alpha}{2} \sec \varepsilon \\ n = \dfrac{2}{\sqrt{\pi+2}} \cos^2 \dfrac{\alpha}{2} \sec \varphi \end{cases} \qquad (٧,١٣)$$

يمكن إيجاز معادلات هذا الإسقاط الذي يعرف بنظام إسقاط (ECKERT) كما يلي:

$$\left\{\begin{aligned}
&x=\frac{2R}{\sqrt{\pi+2}}\lambda\cos^2\frac{\alpha}{2}\\
&y=\frac{2R}{\sqrt{\pi+2}}\alpha\\
&\alpha+\sin\alpha=\frac{\pi+2}{2}\sin\varphi\\
&\tan\varepsilon=\frac{\lambda}{2}\sin\alpha\\
&\mu_s=1\\
&m=\frac{\sqrt{\pi+2}}{2}\cos\varphi\sec^2\frac{\alpha}{2}\sec\varepsilon\\
&n=\frac{2}{\sqrt{\pi+2}}\cos^2\frac{\alpha}{2}\sec\varphi\\
&\tan\frac{\omega}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2-2}\\
&a=\frac{1}{2}(A+B)\ ,\ b=\frac{1}{2}(A-B)\\
&A=\sqrt{m^2+n^2+2}\\
&B=\sqrt{m^2+n^2-2}
\end{aligned}\right. \qquad (٧,١٤)$$

نلاحظ أن المقياس المحلي الخطي n يتعلق فقط بـ φ. لذلك خطوط تساوي التشوهات هذه عبارة عن مستقيمات منطبقة مع مرتسمات خطوط العرض. بينما المقياس m يتعلق بـ φ , λ وخطوط تساوي التشوهات حسب خطوط الطول عبارة عن منحنيات.

يوصى باستخدام هذا الإسقاط لخرائط المقياس الصغير (خرائط العالم والقارات).

نأتي الآن لنظام إسقاط آخر ضمن هذه المجموعة، أي المكافئة، ولكن القطب يرتسم فيه بشكل نقطة.

في هذه الحالة المعادلات العامة (٧,٥) تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{cases} x=\lambda A\cos\alpha \\ y=C\alpha \end{cases} \quad (٧,١٥)$$

وذلك لأن $x = 0$ عندما $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

في هذا النموذج نفرض أن (الشكل رقم ١٠٨):

$$op = \frac{1}{2}\, oE$$

$$C\,\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\, A\,\pi$$

$$C = A \quad (٧,١٦)$$

إذاً:

$$\begin{cases} x=\lambda C\cos\alpha \\ y=C\alpha \end{cases} \quad (٧,١٧)$$

الآن من شرط التكافؤ (٧,٤) نجد:

$$C^2\cos\alpha\, d\alpha = R^2\cos\varphi\, d\varphi$$

بعد إجراء التكامل:

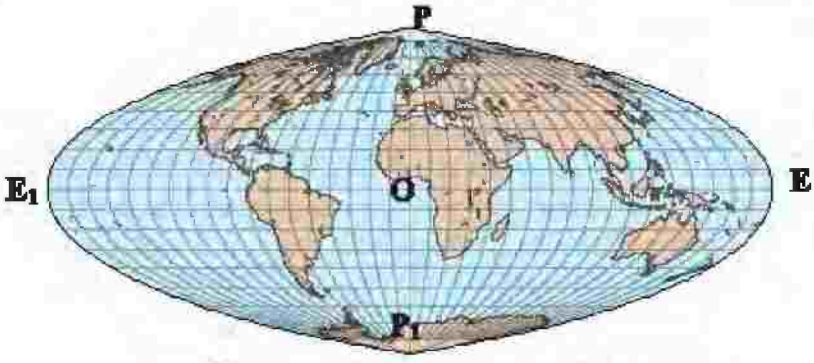
$$C^2\sin\alpha = R^2\sin\varphi \quad (٧,١٨)$$

عندما $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ وحسب الشرط الأول فإن $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. إذاً $C = R$ ومن ثم $\sin\alpha = \sin\varphi$ و $\alpha = \varphi$.

معادلات هذا الإسقاط يمكن إيجازها بالشكل التالي:

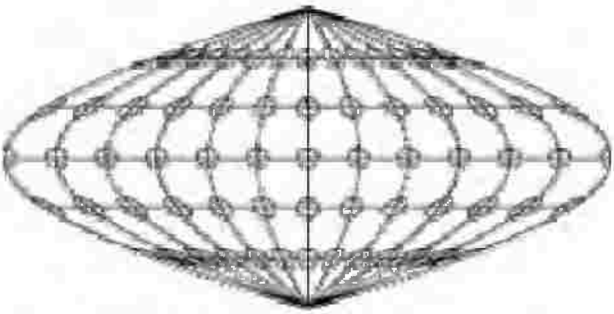
$$\begin{cases} x=R\lambda\cos\varphi \\ y=R\varphi \\ \tan\varepsilon=\lambda\sin\varphi \\ \mu_r=1 \\ n=1 \\ m=\sec\varepsilon \\ \tan(45^{\circ}+\dfrac{\omega}{4})=\sqrt{\cos\varepsilon} \end{cases} \qquad (٧,١٩)$$

ينسب هذا الإسقاط للجغرافي الفرنسي سانسون (SANSON /1600-1667). يبين الشكل رقم (١٠٨) شكل الشبكة في هذا الإسقاط.



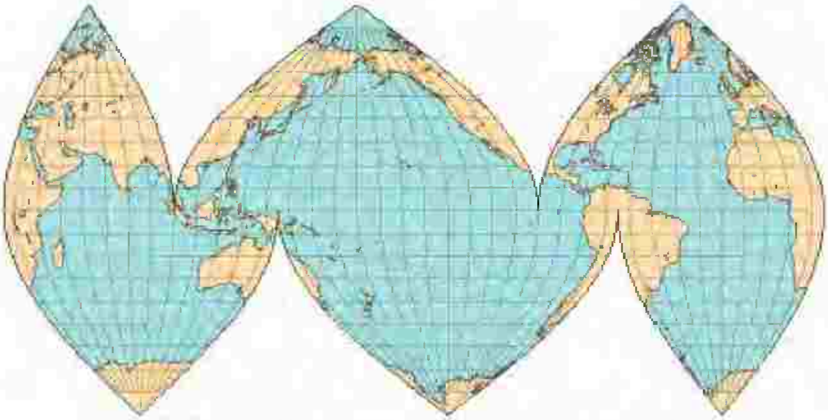
الشكل رقم (١٠٨). إسقاط سانسون [٢].

في نظام إسقاط (سانسون)، المقياس المحلي m حسب مرتسم خط الطول الأوسط يساوي الواحد، أي ($m_0 = 1$). أما حسب مرتسمات باقي خطوط الطول، فهو يتعلق بالعرض φ وبالطول λ. يرتبط تشوه الزوايا ω أيضاً بالعرض والطول. خطوط تساوي التشوهات عبارة عن منحنيات (قطوع زائدة)، متناظرة بالنسبة لخط الطول الأوسط والاستواء. الشكل رقم (١٠٩) يبين توزع التشوهات في هذا النظام.

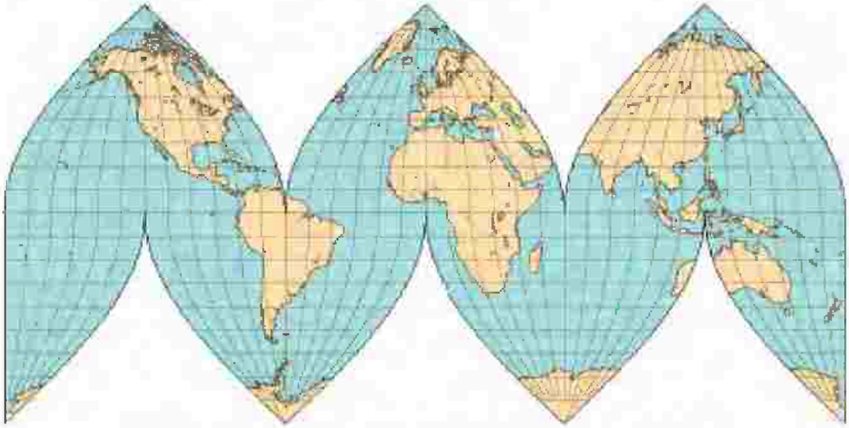


الشكل رقم (١٠٩). توزع التشوهات في إسقاط سانسون.

نظام إسقاط سانسون استخدم في الأطالس الجغرافية لخرائط المقياس الصغير (خرائط العالم). وهناك نماذج أخرى من هذا النظام كما تبين الأشكال رقم (١١٠)–(١١٣):

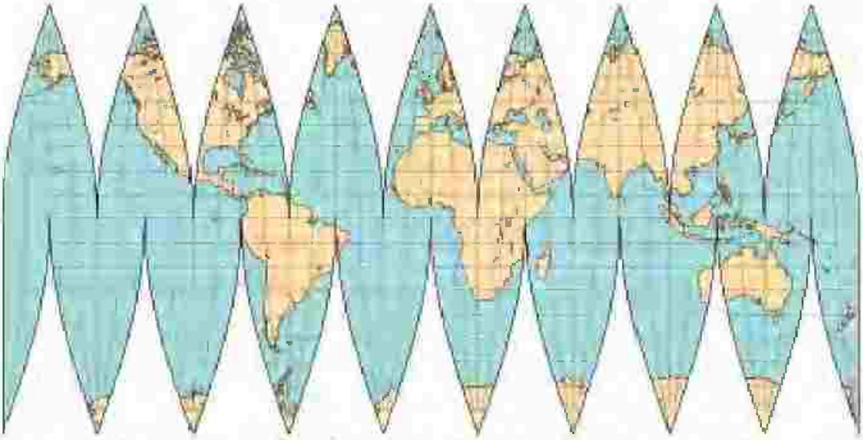


الشكل رقم (١١٠). إسقاط سانسون المجزأ الثلاثي [٢].



الشكل رقم (١١١). إسقاط سالسون الجزأ الرباعي [٢].

الشكل رقم (١١٢). إسقاط سالسون الجزأ الثلاثي المتعدد (١) [٢].



الشكل رقم (١١٣). إسقاط سانسون الجزأ الفلاني المتعدد (٢) [٢].

(٧,٣) نظم الإسقاط شبه الأسطوانية القطعية المكافئة

سنستعرض هنا نموذج من هذه النظم، مرتسم القطب فيها بشكل نقطة. يعرف هذا نظام الإسقاط بنظام إسقاط (ملفيد) (١٧٧٤- ١٨٢٥ / Mollweide).

المعادلات العامة لهذه الإسقاطات هي:

$$\begin{cases} x = (A\cos\alpha + B)\lambda \\ y = C\sin\alpha \end{cases} \qquad (٧,٢٠)$$

حيث $\alpha = f(\varphi)$ ، C, B, A ثوابت.

هنا أيضاً سنستخدم نفس الشروط المذكورة في نظم الإسقاط الجيبية من أجل تحديد الثوابت والتابع f. بالنسبة لمجال تغير α سنعتبره كما في الحالة السابقة، أي عندما $\varphi = 0$ فإن $\alpha = 0$. وعندما $\varphi = \frac{\pi}{2}$ فإن $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

وبالنسبة لشرط أبعاد الشبكة سنعتبر أن:

$$y_{(0,\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{2} x_{(\pi,0)} \qquad (٧,٢١)$$

حيث تدل الأرقام ضمن الأقواس للترتيب التالي (φ , λ).

من شرط مرتسم القطب نستنتج أن $B = 0$ إذاً من (٧,٢٠):

$$C = \frac{1}{2}\pi A$$

والمعادلات العامة تأخذ الشكل:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2C}{\pi}\lambda cos\alpha \\ y = Csin\alpha \end{cases} \tag{٧,٢٢}$$

الآن نطبق شرط التكافؤ:

$$\frac{C^2}{\pi}(1 + cos2\alpha)d\alpha = R^2 cos\varphi d\varphi$$

بعد التكامل نحصل على العلاقة التالية:

$$\frac{C^2}{2\pi}(2\alpha + sin2\alpha) = R^2 sin\varphi \tag{٧,٢٣}$$

وهو شكل التابع f الذي يربط φ بـ α.

لتحديد الثابت C نعوض في (٧,٢٣)، φ بـ $\frac{\pi}{2}$ و α بـ $\frac{\pi}{2}$ فنستنتج:

$$C = \sqrt{2}R \tag{٧,٢٤}$$

إذاً العلاقة (٧,٢٣) تأخذ شكلها النهائي بعد تعويض C كما يلي:

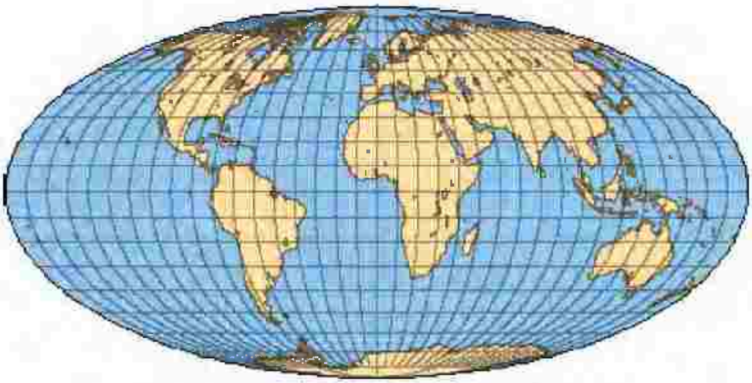
$$2\alpha + sin2\alpha = \pi sin\varphi \tag{٧,٢٥}$$

الآن نوجز معادلات نظام إسقاط (ملفيد) كما يلي:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2\sqrt{2}R}{\pi}\lambda cos\alpha \\ y = \sqrt{2}Rsin\alpha \\ 2\alpha + sin2\alpha = \pi sin\varphi \\ tan\varepsilon = \dfrac{2\lambda}{\pi}tan\alpha \\ \mu_s = 1 \\ n = \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}cos\alpha\ sec\varphi \\ m = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}cos\varphi\ sec\alpha\ sec\varepsilon \\ tan\dfrac{\omega}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2-2} \end{cases} \qquad (٧,٢٦)$$

العلاقات (٧,٢٦) تعتمد على حساب قيمة α أولاً، والتي تحل بطرق عددية.

إن خطوط الطول في مرتسم (ملفيد) عبارة عن منحنيات قطع ناقص مختلفة التفلطح حسب قيمة λ. يرتسم أحد خطوط الطول $\lambda = \pm 90°$ ، بشكل دائرة. يبين الشكل رقم (١١٤) شكل الشبكة. إن أي نظام إسقاط شبه أسطواني، يمكن استخدامه حسب أسلوب (Goode) لتمثيل مناطق واسعة من العالم مثل القارات أو المحيطات. ففي هذا الأسلوب يتم استخدام نظام الإسقاط مجزأً لأقسام، يظهر في كل منها أجزاء من سطح الأرض بتشوهات قليلة. وكل هذه الأجزاء تتصل مع بعضها بخط الاستواء. وبالنتيجة نحصل على خريطة كاملة تظهر فيها المحيطات أو القارات بتشوه أقل مما هو عليه في نظام إسقاط (ملفيد)، ولكن مقابل ذلك وجود تمزقات (انفصالات) في المرتسم.



الشكل رقم (١١٤). إسقاط ملفيد [٢].