

## النسبة الذهبية وأعداد فيبوناتشي

### النسبة الذهبية Golden Ratio

إن رحلتنا في عمار الهندسة الإقليدية كانت في أغلبها ذات طبيعة هندسية، ولكن تظل لدينا تلك الحلقات التي تربط بين الهندسة وبعض فروع الرياضيات الأخرى. ولقد رأينا أن تكون مناقشتنا الأخيرة في الفصل الأخير من خلال عرض بعض الأمثلة لتلك العلاقات التي تربط بين الهندسة الإقليدية وبين تلك الفروع. ففي هذا الفصل سوف نرى بعض العلاقات المذهلة بين النسبة الذهبية وأعداد فيبوناتشي Fibonacci numbers. والتي سنكشف عنها النقاب خلال دراستنا لهذه الموضوعات.

وسنبدأ بالطبع بتعريف المقصود بالنسبة الذهبية التي تساوي

.....1.61803398874987  $\approx \frac{a}{b}$  ، ولعلك للوهلة الأولى تظن أنه لا يوجد شيء غير

عادي في هذه النسبة، ولكنك بعد قليل ستكتشف لأي مدى تكون هذه النسبة مثيرة

للاهتمام، فستجد على سبيل المثال أن .....0.61803398874987  $\approx \frac{b}{a}$  ،

وستلاحظ حتماً أن  $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} + 1$  ، وهذا بغير شك شيء غير عادي، ولذا - عزيزي

القارئ - إن كنت تريد أن تستوعب الأمر جيداً فعليك أن تقرأ وتدع نفسك تستمع بسلسلة من أغرب العلاقات الرياضية.



شكل 11-1

وللتوضيح بشكل آخر لتكن لدينا النقطة  $P$  واقعة على  $\overline{AB}$  بحيث

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB}$$

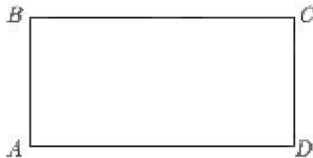
$AB$  بنسبة معينة هي النسبة الذهبية.

ولكن ربما يظل السؤال قائماً ، لماذا هذه النسبة المشار إليها تحمل شيئاً مميزاً يجعلها نسبة ذهبية؟

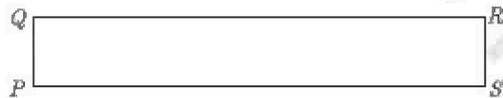
وللإجابة عن هذا السؤال دعونا ننشئ مستطيلاً بحيث طوله وعرضه هما القطعتان المستقيمتان  $AP = l, BP = w$ . يشار إلى أن شكل هذا المستطيل هو الأكثر إرضاء عند النظر إليه ، فعبّر العصور ارتباط هذا المستطيل بالجمال.

والآن- في رأيك- أي المستطيلين الموضحين في الشكلين 11-2, 11-3 يريح

النظر أكثر عند النظر إليه؟



شكل 11-2



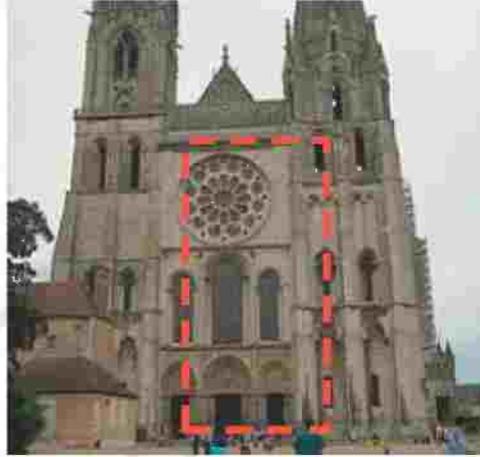
شكل 11-3

ووفقاً لعلماء النفس الذين لديهم تجارب مع هذه المسألة من أمثال جوستاف فيشر، إدوارد لي ثورندايك ( Gustav Fechner & Edward Lee Thorndike, 1917 ) فالمستطيل في الشكل 2 - 11 هو الأكثر إراحة عند النظر إليه ، كما أشاروا إلى أن الذي ينظر نحو المستطيلين سوف يلمح المستطيل  $ABCD$  دفعة واحدة ، بينما عند النظر نحو المستطيل  $PQRS$  (الشكل 3 - 11 ) فإن ذلك يتطلب حركة أفقية للعين من قبل معظم الناس .

ولجمال هذا المستطيل ، يطلق عليه اسم المستطيل الذهبي Golden rectangle ، وهذا المستطيل لم يتم اكتشافه حديثاً فقد كانت الحضارات القديمة على دراية تامة به . فعلى سبيل المثال ، في الفنون المعمارية القديمة سنجد هذا المستطيل حاضراً بقوة في المنشآت والمباني الشهيرة ، فنراه في معبد البراثينون في أثينا باليونان (الشكل 4 - 11 ) وأبواب كاتدرائية شارترز في فرنسا (الشكل 5 - 11 ) . كما يوجد الكثير من الأمثلة لمثل هذه المستطيلات من حولنا - حاول أن تجد بعضها .



شكل 4 - 11



شكل 5-11

المستطيل الذهبي طوله وعرضه يحققان النسبة الذهبية أي أن:  $\frac{w}{l} = \frac{l}{w+l}$ .

والآن كيف لنا أن ننشئ المستطيل الذهبي؟ ربما يكون من أسهل الطرق لهذا الإنشاء أن نبدأ بالمربع  $ABEF$  (انظر الشكل 6-11)، حيث  $M$  منتصف  $AF$ ، ثم نرسم الدائرة التي فيها مركزها  $M$  ونصف قطرها  $ME$  وتقطع  $AF$  في النقطة  $D$ ، ثم نقيم عموداً من  $D$  ليقطع  $BE$  في  $C$ ، وعليه يكون لدينا المستطيل  $ABCD$  الذي هو في واقع الأمر المستطيل الذهبي.

والآن دعونا دون أن نفقد العمومية نعتبر المربع طول ضلعه الوحدة، أي أن  $EF = AF = 1$  وكذلك  $MF = \frac{1}{2}$ ، وباستخدام نظرية فيثاغورس نحصل على

$ME = \frac{\sqrt{5}}{2}$  ومن ذلك نستنتج أيضاً أن  $AD = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ، وللتحقق من أن

المستطيل  $ABCD$  مستطيلاً ذهبياً علينا أن نثبت أن:

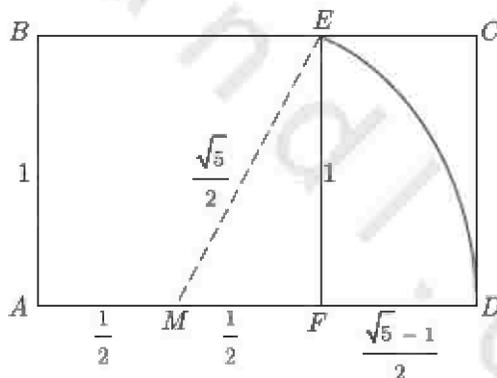
$$\frac{w}{l} = \frac{l}{w+l} \quad \text{أو} \quad \frac{CD}{AD} = \frac{AD}{CD+AD}$$

بالتعويض بالقيم التي أوجدناها نحصل على المساوية الصحيحة التالية :

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{1 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}}$$

عادة ما نستخدم الحرف الأبجدي اللاتيني  $\phi$  للتعبير عن النسبة الذهبية. ونستطيع الحصول على القيمة التقريبية لها عن طريق العلاقة :

$$\phi = \frac{AD}{CD} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.61803398874987483\dots$$



شكل 6 - 11

ولعلك قبل ذلك اتفقت معنا على أن هذا العدد ( $\phi$ ) مميز جداً، فمقلوبة  $\frac{1}{\phi}$  :

$$\frac{1}{\phi} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = 0.61803398874987483\dots$$

ولذا ليس فقط  $\phi \cdot \frac{1}{\phi} = 1$  ، ولكن أيضاً  $\phi - \frac{1}{\phi} = 1$  ، كما أن  $\phi, \frac{1}{\phi}$  جذرا المعادلة التربيعية  $x^2 - x - 1 = 0$  ، وسوف تناقش هذه الميزة لاحقاً.  
ولعل من الشيق أيضاً أن ندرس قوى  $\phi$  ، وبالطبع أولاً سنبدأ بإيجاد قيمة  $\phi^2$  بدلالة  $\phi$  كما يلي :

$$\phi^2 = \left( \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^2 = \frac{\sqrt{5} + 3}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} + 1 = \phi + 1$$

أما باقي القوى فيمكن استنتاجها كالتالي :

$$\phi^3 = \phi \cdot \phi^2 = \phi(\phi + 1) = \phi^2 + \phi = (\phi + 1) + \phi = 2\phi + 1$$

$$\phi^4 = \phi^2 \cdot \phi^2 = (\phi + 1)(\phi + 1) = \phi^2 + 2\phi + 1 = (\phi + 1) + 2\phi + 1 = 3\phi + 2$$

$$\phi^5 = \phi^3 \cdot \phi^2 = (2\phi + 1)(\phi + 1) = 2\phi^2 + 3\phi + 1 = 2(\phi + 1) + 3\phi + 1 = 5\phi + 3$$

$$\phi^6 = \phi^3 \cdot \phi^3 = (2\phi + 1)(2\phi + 1) = 4\phi^2 + 4\phi + 1 = 4(\phi + 1) + 4\phi + 1 = 8\phi + 5$$

$$\phi^7 = \phi^4 \cdot \phi^3 = (3\phi + 2)(2\phi + 1) = 6\phi^2 + 7\phi + 2 = 6(\phi + 1) + 7\phi + 2 = 13\phi + 8$$

ويمكننا تلخيص ذلك في الشكل (الشكل 7 - 11) ، التالي :

$$\phi = 1\phi + 0$$

$$\phi^2 = 1\phi + 1$$

$$\phi^3 = 2\phi + 1$$

$$\phi^4 = 3\phi + 2$$

$$\phi^5 = 5\phi + 3$$

$$\phi^6 = 8\phi + 5$$

$$\phi^7 = 13\phi + 8$$

$$\phi^8 = 21\phi + 13$$

$$\phi^9 = 34\phi + 21$$

$$\phi^{10} = 55\phi + 34$$

لاحظ أنه يبدو أن هناك صلة بين المعاملات والثوابت. وفي واقع الأمر فهي تشكل خطأً سيصبح مألوفاً لك قريباً. وربما تكون هذه الأرقام أساساً لحلقة الوصل بين العديد من فروع الرياضيات (بما فيها الهندسة). وقبل أن نكمل دراسة النسبة الذهبية في الهندسة سوف نستطرد قليلاً في دراسة هذه الأعداد ولكن بعناية أكثر.

### أعداد فيوناتشي Fibonacci numbers

إن منشأ هذه السلسلة من الأعداد أمر مثير للاهتمام. فقد ظهرت لأول مرة كحل لمسألة مطروحة في إحدى كتب الجبر، والذي نشر في العام 1202 وكان يحمل عنوان "Liber abaci" والذي كتبه ليوناردو بيزا Leonardo of Pisa الذي عرف بعد ذلك باسم فيوناتشي (1180 – 1250) \*.

ولتوضيح هذه المسألة دعونا نضرب مثال سنسميه توالد الأرانب وهو كالتالي:

\* فيوناتشي لم يكن رجل دين كما كان يعتقد بعض العلماء سابقاً بل كان يعمل في التجارة ويسافر كثيراً لجميع أنحاء العالم الإسلامي، وقد استغل ذلك في قراءة كل ما يستطيع مما كتبه الرياضيين العرب. وكان أول من قدم لأوروبا الأرقام العربية والهندية في كتابه الشهير Liber abaci عام 1202 والمنقح في عام 1228، والذي تم توزيعه أول مرة على نطاق واسع في شكل مخطوطة نشرت لأول مرة في عام 1857 في كتابات ليوناردو بيسانو Seritti di leonardo pisano.

والكتاب هو عبارة عن مجموعة من الأعمال الرياضية بما في ذلك المعادلات الخطية والتربيعية والجذور التربيعية والتكعيبية وكثيراً من الموضوعات الجديدة (من وجهة النظر الأوربية). وقد بدأ الكتاب بالعبارة "هذه هي الأشكال التسعة للأرقام الهندية 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9. وبهذه الأشكال التسعة مع الرمز 0 والذي يدعوه العرب صفر، يمكن كتابة أي عدد، كما سيوضح لاحقاً" ومع هذه الملحظة تم إدخال النظام العشري لأوروبا. (ملاحظة: الكلمة العربية "صفر" هي كلمة من أصل سنسكريتي وقد استخدمت في القرن الخامس الميلادي في الهند لتشير للفراغ).

كم عدد أزواج الأرناب التي يتم إنتاجها في عام واحد وذلك من خلال زوج واحد فقط ، إذا كان كل زوج ينتج زوجاً ثانياً في كل شهر ، وعليه كم من الأرناب المنتجة عند الشهر الثاني ؟

من هذه المسألة ظهرت متسلسلة فيبوناتشي الشهيرة. فإذا فرضنا أن زوج الأرناب الصغيرة (الحديثة الولادة) ( $B$ ) تكبر وتصبح زوجاً منتجاً ( $A$ ) خلال شهر واحد، وبعد ذلك يمكننا إعداد مخطط كما بالشكل 8 - 11. وفيه عدد الأزواج الكبيرة التي تعيش كل شهر هي التي تعين متسلسلة فيبوناتشي (العمود الثالث) :

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, .....

فإذا فرضنا أن  $f_n$  الحد النوني لمتسلسلة فيبوناتشي ؛ إذن :

$$f_1 = 1$$

$$f_2 = 1$$

$$f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2$$

$$f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3$$

$$f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5$$

.

.

.

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

حيث  $n$  عدد صحيح أكبر من أو يساوي 3.

ولعلك تلاحظ أن كل حد بعد الحدين الأوليين هو مجموع الحدين السابقين له.

الشهر	الأزواج	عدد		مجموع الأزواج
		عدد الأزواج البالغة A	الأزواج الصغيرة B	
يناير 1		1	0	1
فبراير 1		1	1	2
مارس 1		2	1	3
أبريل 1		3	2	5
مايو 1		5	3	8
يونيو 1		8	5	13
يوليو 1		13	8	21
أغسطس 1		21	13	34
سبتمبر 1		34	21	55
أكتوبر 1		55	34	89
نوفمبر 1		89	55	144
ديسمبر 1		144	89	233
يناير 1	233	144	377	

شكل 8 - 11

مثال

باستخدام قاعدة متسلسلة فيوناتشي، أوجد الأعداد العشرة التي تسبق العدد الأول 1 إذا سمحنا للأعداد غير الموجبة  $n$ .

الحل

لأن  $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ ؛ إذن:  $f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$  وعليه تكون الأعداد

العشرة هي:

$$f_0 = f_2 - f_1 = 1 - 1 = 0$$

$$f_{-1} = f_1 - f_0 = 1 - 0 = 1$$

$$f_{-2} = f_0 - f_{-1} = 0 - 1 = -1$$

$$f_{-3} = f_{-1} - f_{-2} = 1 - (-1) = 2$$

$$f_{-4} = f_{-2} - f_{-3} = -1 - 2 = -3$$

$$f_{-5} = f_{-3} - f_{-4} = 2 - (-3) = 5$$

$$f_{-6} = f_{-4} - f_{-5} = -3 - 5 = -8$$

$$f_{-7} = f_{-5} - f_{-6} = 5 - (-8) = 13$$

$$f_{-8} = f_{-6} - f_{-7} = -8 - 13 = -21$$

$$f_{-9} = f_{-7} + f_{-8} = 13 - (-21) = 34 \quad \bullet$$

في المثال السابق والذي تم استنتاج حله. يكون من المفيد في كثير من الأحيان أن يتم حله عن طريق الاستنتاج الاستقرائي من العلاقات وذلك كما في المثال التالي.

### مثال

أوجد مجموع أول حدين، ثلاثة حدود، أربعة حدود، خمسة حدود، ...، تسعة حدود، عشرة حدود، من متسلسلة فيبوناتشي. ثم عمم النمط لتحصل على مجموع أول  $n$  من الحدود.

### الحل

سنأخذ علاقة المجموع التالية  $\sum_{m=1}^n f_m$ ، وبسهولة يمكننا تكوين الأعمدة الثلاثة

الأولى من الجدول الموضح في الشكل 9-11. وبالتالي يكون لدينا مجموع أول عددين من أعداد فيبوناتشي

$$\text{ويأتي مجموع أول ثلاثة أعداد بطريقة مشابهة} \quad \sum_{m=1}^2 f_m = f_1 + f_2 = 1 + 1 = 2$$

$$\bullet \quad \text{وهكذا نستطيع أن نكمل.} \quad \sum_{m=1}^3 f_m = f_1 + f_2 + f_3 = 1 + 1 + 2 = 4$$

$m$	$f_m$	$\sum_{m=1}^n f_m$	$\sum_{m=1}^n f_{2m-1}$	$\sum_{m=1}^n f_{2m}$	$f_m^2$	$\sum_{m=1}^n f_m^2$
1	1	1	1		1	1
2	1	2		1	1	2
3	2	4	3		4	6
4	3	7		4	9	15
5	5	12	8		25	40
6	8	20		12	64	104
7	13	33	21		169	273
8	21	54		33	441	714
9	34	88	55		1,156	1,870
10	55	143		88	3,025	4,895
11	89	232	144		7,921	12,816
12	144	376		232	20,736	33,552
13	233	609	377		54,289	87,841
14	377	986		609	142,129	229,970
15	610	1,596	987		372,100	602,070
16	987	2,583		1,596	974,169	1,576,239
17	1,597	4,180	2,584		2,550,409	4,126,648
18	2,584	6,764		4,180	6,677,056	

واضح أن كل حد في العمود الخاص بالمجموع  $\sum_{m=1}^n f_m$  أقل بواحد من أعداد

فيوناتشي، وبشكل أكثر تحديداً،  $\sum_{m=1}^n f_m = f_{n+2} - 1$ ، وهو مجموع أول  $n$  حداً من أعداد فيوناتشي الذي يكون أقل بواحد من الحد رقم  $(n+2)$  من أعداد فيوناتشي، وسنقدم هذه الملاحظة في نظرية 11-1.

$$\sum_{m=1}^n f_m = f_{n+2} - 1$$

نظرية: 1-11

البرهان

من تعريف أعداد فيوناتشي لدينا  $f_1 + f_2 = f_3$ ، إذن،

$$f_1 = \cancel{f_3} - f_2$$

$$f_2 = \cancel{f_4} - \cancel{f_3}$$

$$f_3 = \cancel{f_5} - \cancel{f_4}$$

$$f_4 = \cancel{f_6} - \cancel{f_5}$$

$$\vdots$$

$$f_{n-1} = \cancel{f_{n+1}} - \cancel{f_n}$$

$$f_n = f_{n+2} - \cancel{f_{n+1}}$$

$$\text{بالجمع : } \sum_{m=1}^n f_m = f_{n+2} - f_2 = f_{n+2} - 1.$$

باعتبار الحدود الفردية من متتابعة فيوناتشي. الشكل 9-11 سيساعدنا في

إيجاد نمط مجموع هذه الحدود:

$$f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + \dots + f_{2m-1} = 1 + 2 + 3 + 5 + 13 + \dots + f_{2m-1}$$

والآن ربما تتوقع النظرية التالية.

$$\sum_{m=1}^n f_{2m-1} = f_{2n}$$

نظرية: 2-11

البرهان

$$f_1 = f_2$$

$$f_3 = f_2 - f_1$$

$$f_5 = f_4 - f_3$$

$$f_7 = f_6 - f_5$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$f_{2n-3} = f_{2n-2} - f_{2n-4}$$

$$f_{2n-1} = f_{2n} - f_{2n-2}$$

$$\bullet \sum_{m=1}^n f_{2m-1} = f_{2n} \text{ بالجمع}$$

علمنا توأ من النظرية 1-11 أن :

$$\sum_{m=1}^n f_m = f_{n+2} - 1 \quad (\text{I})$$

إذا ضاعفنا عدد الحدود في (I) سنحصل على :

$$\sum_{m=1}^{2n} f_m = f_{2n+2} - 1 \quad (\text{II})$$

والآن لنفرض أننا طرحنا جميع الحدود ذات الترتيب الفردي من (II) سوف يتبقى لنا

الحدود ذات الترتيب الزوجي والتي هي :

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^n f_{2m} &= \sum_{m=1}^{2n} f_m - \sum_{m=1}^n f_{2m-1} \\
&= f_{2n+2} - 1 - f_{2n} \\
&= f_{2n+1} - 1 \quad (f_{2n} = f_{2n+2} - f_{2n-1})
\end{aligned}$$

تلك النتيجة تثبت النظرية التالية.

$$\sum_{m=1}^n f_{2m} = f_{2n+1} - 1$$

نظرية: 3-11

بالبحث في عمود  $f_m^2$  في الجدول الموضح بالشكل 9 - 11 سنكتشف العلاقة بين أعداد فيوناتشي ومربعاتها، وهذه العلاقة هي محتوى نظريتنا التالية.

$$f_n^2 - f_{n-1} \cdot f_{n+1} = (-1)^{n-1}$$

نظرية: 4-11

قبل أن نقوم بإثبات هذه النظرية، سنناقش برهاناً من نوع مختلف، باستخدام الاستقراء الرياضي mathematical induction. ليكن لدينا مجموعة ذات عدد غير منته من قطع الدومينو تم وضعها كما بالشكل 10 - 11. والآن، إذا طلب منا أن نسقط جميع هذه القطع، فلدينا طريقتان لفعل ذلك: (1) أن نسقط كل قطعة على حدة بشكل منفصل. أو (2) أن نسقط فقط أول قطعة إذا كنا متأكدين أن كل قطعة عندما تسقط ستسقط القطعة التي تليها تلقائياً.

الطريقة الأولى ليست فقط غير فعالة، ولكنها أيضاً لا تجعلنا متأكدين من سقوط جميع القطع (لأن الحدود قد تكون غير منتهية). أما الطريقة الثانية فتضمن لنا سقوط جميع القطع. بعد أن تسقط القطعة الأولى، والتي بدورها ستسقط الثانية ثم الثالثة والرابعة وهكذا، وبالتالي حتماً ستسقط جميع القطع. والطريقة الثانية ماثلة تماماً لمسألة الاستقراء الرياضي:



شكل 10 - 11

العلاقة المتضمنة العدد الطبيعي  $n$  تكون صحيحة لكل الأعداد الطبيعية عندما

(a) تكون صحيحة عند  $n = 1$ .

(b) صحتها عند  $n = k$  تؤدي إلى صحتها عند  $n = k + 1$ .

الآن سنستخدم الاستقراء الرياضي لإثبات النظرية 4 - 11.

### البرهان

عندما  $n = 1$  ، يكون لدينا :

$$f_n^2 = f_{n-1} \cdot f_{n+1} = f_1^2 = f_0 \cdot f_2 = 1 - (0)(1) = 1 = (-1)^{1-1}$$

(  $f_0 = 0$  حسبما وضحناه في المثال الأول ).

نفرض أن العلاقة صحيحة عندما  $n = k$  ، أي نفرض أن

$$f_k^2 - f_{k-1} \cdot f_{k+1} = (-1)^{k-1}$$

والآن سنحاول إثبات صحة العلاقة عند  $n = k + 1$  :

$$f_{k+1}^2 - f_k \cdot f_{k+2} = (-1)^k$$

لأن  $f_{k+2} = f_k + f_{k+1}$ ، إذن؛

$$\begin{aligned} f_{k+1}^2 - f_k \cdot f_{k+2} &= f_{k+1}^2 - f_k (f_k + f_{k+1}) \\ &= f_{k+1}^2 - f_k^2 - f_k \cdot f_{k+1} \\ &= f_{k+1} (f_{k+1} - f_k) - f_k^2 \\ &= f_{k+1} \cdot f_{k-1} - f_k^2 \\ &= -(-1)^{k-1} \\ &= (-1)^k \end{aligned}$$

وهكذا يكون قد تم برهان النظرية. ●

من الشكل 9-11 يمكننا توقع أن النتيجة التالية.

$$f_n \cdot f_{n+1} - f_{n-1} \cdot f_n = f_n^2$$

نظرية 5-11

البرهان

باستخدام الاستقراء الرياضي، عندما  $n = 1$  لدينا

$$f_1 \cdot f_2 - f_0 \cdot f_1 = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 1^2 = f_1^2$$

إذن العبارة صحيحة من أجل  $n = 1$ . لنفرض صحة العبارة من أجل  $n = k$

أي أن

$$f_{k+1} \cdot f_{k+2} - f_k \cdot f_{k+1} = f_{k+1}^2 \text{ الآن نريد إثبات صحة } f_k \cdot f_{k+1} - f_{k-1} \cdot f_k = f_k^2$$

$$f_{k+1} \cdot f_{k+2} - f_k \cdot f_{k+1} = f_{k+1} (f_{k+2} - f_k) = f_{k+1} \cdot f_{k+1} = f_{k+1}^2$$

وهذا يبرهن النظرية. ●\*

\* لا داعي للاستقراء في هذا البرهان، بل مباشرة من التعريف يمكن الإثبات كما يلي:

$$f_n \cdot f_{n+1} - f_{n-1} \cdot f_n = f_n (f_{n+1} - f_{n-1}) = f_n \cdot f_n = f_n^2 \text{ (المترجم).}$$

المقدار  $\sum_{m=1}^n f_m^2$  في الشكل 9-11 يوحى بعلاقة شيقة وهي أن كل مجموع يساوي حاصل ضرب عدد فيوناتشي المناظر لعدد حدود المجموع في عدد فيوناتشي الذي يليه. وهذا ما تصوغه النظرية التالية.

$$\sum_{m=1}^n f_m^2 = f_n \cdot f_{n+1}$$

نظرية: 6-11

البرهان

من النظرية 5-11 لدينا:

$$f_m^2 = f_m \cdot f_{m+1} - f_{m-1} \cdot f_m$$

$$f_1^2 = f_1 \cdot f_2 - f_0 \cdot f_1 = f_1 \cdot f_2 \quad (f_0 = 0)$$

$$f_2^2 = f_2 \cdot f_3 - f_1 \cdot f_2$$

$$f_3^2 = f_3 \cdot f_4 - f_2 \cdot f_3$$

.

.

$$f_{n-1}^2 = f_{n-1} \cdot f_n - f_{n-2} \cdot f_{n-1}$$

$$f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1} - f_{n-1} \cdot f_n$$

إذن:

$$\bullet \sum_{m=1}^n f_m^2 = f_n \cdot f_{n+1} \text{ بالجمع}$$

هناك العديد من العلاقات الرائعة التي تحوي أعداد فيوناتشي، نأمل بأن تتمكن من برهان بعضها ضمن التدريبات الموجودة في نهاية الفصل.

## أعداد لوكاس Lucas numbers

في العام ١٨٧٧ سميت أعداد فيوناتشي بهذا الاسم بواسطة الرياضي الفرنسي فرانسوا - إدوارد - أناتول لوكاس (١٨٤٢ - ١٨٩١) Francois-Edouard-Anatole Lucas. وفي نفس الوقت قدم متسلسلة جديدة من الأعداد تعتمد بشكل كبير على متسلسلة فيوناتشي إلا أنها تبدأ بالعددین 1,3 بدلاً من 1,1، أي أن المتسلسلة الجديدة هي: 1,3,4,7,11,... وهذه المتسلسلة الآن تحمل اسم متسلسلة لوكاس. وهي بالتفصيل تظهر في الشكل 11 - 11.

$m$	$l_m$	$\sum_{m=1}^n l_m$	$\sum_{m=1}^n l_{2m-1}$	$\sum_{m=1}^n l_{2m}$	$l_m^2$	$\sum_{m=1}^n l_m^2$
1	1	1	1		1	1
2	3	4		3	9	10
3	4	8	5		16	26
4	7	15		10	49	75
5	11	26	16		121	196
6	18	44		28	324	520
7	29	73	45		841	1,361
8	47	120		75	2,209	3,570
9	76	196	121		5,776	9,346
10	123	319		198	15,129	24,475
11	199	518	320		39,601	64,076
12	322	840		520	103,634	167,760

13	521	1,361	841		271,441	439,201
14	843	2,204		1,363	710,649	1,149,850
15	1,364	3,568	2,205		1,860,496	3,010,346
16	2,207	5,775		3,570	4,870,849	7,881,195
17	3,571	9,346	5,776		12,752,041	20,633,236
..	5,778	15,124		3,348	33,385,284	54,018,520

شكل 11 - 11

وكما في حالة أعداد فيوناتشي، يوجد العديد من العلاقات الشيقة التي يمكن اكتشافها من الجدول السابق، وسوف نقدم في الصفحات التالية بعضاً من تلك العلاقات في صورة نظريات.

$$\sum_{m=1}^n l_m = l_{n+2} - 3$$

نظرية: 7-11

البرهان

سوف نستخدم الاستقراء الرياضي كبديل للطريقة التي استخدمناها في برهان

نظرية 1-11.

عند  $n = 1$  :

$$\sum_{m=1}^1 l_m = l_{1+2} - 3 = l_3 - 3 = 4 - 3 = 1$$

نفرض صحة العلاقة عند  $n = k$  :

$$\sum_{m=1}^k l_m = l_{k+2} - 3$$

والآن سنحاول إثبات صحة العلاقة عند  $n = k + 1$  :

$$\sum_{m=1}^{k+1} l_m = l_{(k+1)+2} - 3 = l_{k+3} - 3$$

ومن الفرض يمكننا كتابة العلاقة :

$$\sum_{m=1}^k l_m + l_{k+1} = l_{k+2} - 3 + l_{k+1}$$

ولكن :

$$l_{k+1} + l_{k+2} = l_{k+3}$$

إذن :

$$\sum_{m=1}^{k+1} l_m = l_{k+3} - 3$$

وهكذا نكون قد أثبتنا النظرية. ●

النظرية التالية لأعداد لوكاس تماثل النظرية 2 - 11.

$$\sum_{m=1}^n l_{2m-1} = l_{2n} - 2$$

نظرية : 8-11

البرهان

باستخدام الاستقراء الرياضي.

عند  $n = 1$  :

$$\sum_{m=1}^1 l_{2m-1} = l_{2(1)} - 2 = 3 - 2 = 1$$

نفرض صحة العلاقة عند  $n = k$  :

$$\sum_{m=1}^k l_{2m-1} = l_{2k} - 2$$

والآن سنحاول إثبات صحة العلاقة عند  $n = k + 1$  :

$$\sum_{m=1}^{k+1} l_{2m-1} = l_{2(k+1)} - 2 = l_{2k+2} - 2$$

ومن الفرض يمكننا كتابة العلاقة :

$$\sum_{m=1}^k l_{2m-1} + l_{2(k+1)-1} = l_{2k} - 2 + l_{2(k+1)-1}$$

إذن :

$$\sum_{m=1}^k l_{2m-1} = l_{2k} + l_{2k+1} - 2 = l_{2k+2} - 2$$

● وهكذا نكون قد أثبتنا النظرية.

لأننا قد حصلنا على مجموع أول  $n$  حداً من أعداد لوكاس في نظرية 7-11 ،  
ومجموع أول  $n$  حداً فردياً من أعداد لوكاس في نظرية 8-11 ، فإنه سيكون من  
السهولة الحصول على مجموع أول  $n$  حداً زوجياً من أعداد لوكاس ، وللوصول إلى  
ذلك ، سوف نستخدم نفس الطريقة التي استخدمناها مع أعداد فيوناتشي .

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n l_{2m} &= \sum_{m=1}^{2n} l_m - \sum_{m=1}^n l_{2m-1} \\ &= l_{2n+2} - 3 - (l_{2n} - 2) \\ &= l_{2n+2} - l_{2n} - 3 + 2 \\ &= l_{2n+1} - 1 \end{aligned}$$

وهذا يعطينا النظرية التالية والتي يمكن برهانها باستخدام الاستقراء وسنتركها لتحل ضمن التدريبات.

$$\sum_{m=1}^n l_{2m} = l_{2n+1} - 1$$

نظرية 9-11

إن مجموع مربعات حدود متسلسلة لوكاس تقدم لنا نمطاً شيقاً، فكما يتضح من الشكل 11-11، فالعمود الخاص بالمجاميع  $\sum_{m=1}^n l_m^2$  يقل باثنين عن حاصل ضرب عدد لوكاس الموجود في نفس الصف بالذي يليه من عمود  $l_m$ ، وهذا يصل بنا إلى النظرية التالية التي نترك برهانها أيضاً للتدريبات.

$$\sum_{m=1}^n l_m^2 = l_n \cdot l_{n+1} - 2$$

نظرية 10-11

حتى هذه النقطة، نلاحظ أن متسلسلة لوكاس ظهرت كمتسلسلة مناظرة لمتسلسلة فيبوناتشي، ولكن توجد ميزة رائعة لمتسلسلة لوكاس هي أن لها علاقة تبادلية مع متسلسلة فيبوناتشي. فبدراسة الجدولين الواردين في الشكلين 11-9, 11-11 معاً سنكتشف على سبيل المثال:

$$f_4 \cdot l_4 = 3 \cdot 7 = 21 = f_8$$

$$f_5 \cdot l_5 = 5 \cdot 11 = 55 = f_{10}$$

$$f_6 \cdot l_6 = 8 \cdot 18 = 144 = f_{12}$$

كما يمكننا أن نستنتج أيضاً أن

$$f_n \cdot l_n = f_{2n} \quad (n \geq 1) \quad (I)$$

علاقات أخرى شيقة بين أعداد لوكاس فيبوناتشي يمكن الوصول إليها، مثل:

$$l_n = f_{n-1} + f_{n+1} \quad (n \geq 1) \quad \text{(II)}$$

$$5f_n = l_{n-1} + l_{n+1} \quad (n \geq 1) \quad \text{(III)}$$

$$l_n = f_{n+2} - f_{n-2} \quad \text{(IV)}$$

$$5f_n = l_{n+2} - l_{n-2} \quad \text{(V)}$$

يمكن لاحقاً إثبات هذه العلاقات بشكل أسهل ، ومع ذلك لو سلمنا بأن العلاقة (II)

صحيحة فيصبح من السهل جدا إثبات العلاقتين (III), (IV).

برهان العلاقة (III) :

$$l_{n-1} = f_{n-2} + f_n, l_{n+1} = f_n + f_{n+2}$$

وعلى ذلك

$$\begin{aligned} l_{n-1} + l_{n+1} &= f_{n-2} + 2f_n + f_{n+2} \\ &= f_n - f_{n-1} + 2f_n + f_n + f_{n+1} \\ &= 4f_n + f_n \\ &= 5f_n \end{aligned}$$

برهان العلاقة (IV) :

لأن :  $l_n = f_{n-1} + f_{n+1}$  ، إذن :

$$f_{n+2} = f_n + f_{n+1}, f_{n-2} = f_n - f_{n-1}$$

وعلى ذلك :

$$f_{n+2} - f_{n-2} = f_n + f_{n+1} - (f_n - f_{n-1}) = f_{n+1} + f_{n-1}$$

ولأن  $l_n = f_{n+1} - f_{n-1}$  ، إذن ،  $l_n = f_{n+2} - f_{n-2}$ .

والآن عليك عزيزي القارئ أن تحاول إثبات باقي هذه العلاقات بمثل هذه الطريقة.

## أعداد فيوناتشي وأعداد لوكاس في الهندسة

الرباط الأساسي بين متسلسلي فيوناتشي ولوكاس في الهندسة يأتي من خلال النسبة الذهبية. فعند النظر في النسب المتتالية لأعداد فيوناتشي ولوكاس. من خلال جدول النسب الموجود في الشكل 12-11، فإنه يبدو أن النسبة بين كل حد والذي قبله تقترب من النسبة الذهبية  $\phi$ .

والآن دعونا نتحقق من هذه الفكرة. وكمراجعة للنسبة الذهبية، اعتبر  $\overline{APB}$

حيث النقطة  $P$  تقسم  $\overline{AB}$  بحيث  $\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB}$  (الشكل 13-11).

لنفرض أن  $x = \frac{AB}{AP}$ ، إذن:

$$x = \frac{AB}{AP} = \frac{AP + PB}{AP} = 1 + \frac{PB}{AP} = 1 + \frac{AP}{AB} = 1 + \frac{1}{x}$$

أي:

$$x = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

ومن السهل إيجاد جذري هذه المعادلة وهما:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0.6180339887,$$

$\frac{f_{n+1}}{f_n}$	$\frac{l_{n+1}}{l_n}$
$\frac{1}{1} = 1.000000000$	$\frac{3}{1} = 3.000000000$
$\frac{2}{1} = 2.000000000$	$\frac{4}{3} = 1.333333333$
$\frac{3}{2} = 1.500000000$	$\frac{7}{4} = 1.750000000$

$\frac{5}{3} = 1.666666667$	$\frac{11}{7} = 1.571428571$
$\frac{8}{5} = 1.600000000$	$\frac{18}{11} = 1.636363636$
$\frac{13}{8} = 1.625000000$	$\frac{29}{18} = 1.611111111$
$\frac{21}{13} = 1.615384615$	$\frac{47}{29} = 1.620689655$
$\frac{34}{21} = 1.619047619$	$\frac{76}{47} = 1.617021277$
$\frac{55}{34} = 1.617647059$	$\frac{123}{76} = 1.618421053$
$\frac{89}{55} = 1.618181818$	$\frac{199}{123} = 1.617886179$
$\frac{144}{89} = 1.617977528$	$\frac{322}{199} = 1.618090452$
$\frac{233}{144} = 1.618055556$	$\frac{521}{322} = 1.618012422$
$\frac{377}{233} = 1.618025751$	$\frac{843}{521} = 1.618042226$
$\frac{610}{377} = 1.618037135$	$\frac{1.364}{843} = 1.618030842$
$\frac{987}{610} = 1.61832787$	$\frac{2.207}{1.364} = 1.618035191$

شكل 11 - 12



شكل 11 - 13

ولأننا نتعامل مع أطوال قطع مستقيمة، سنستخدم فقط الجذر الموجب  $a$ .

ولنفرض أن جذري المعادلة  $x^2 - x - 1 = 0$  هما  $a, b$ :

$$a^2 = a + 1 \quad (\text{I})$$

$$b^2 = b + 1 \quad (\text{II})$$

بضرب (I) في  $a^n$  حيث  $n$  عدد صحيح، نحصل على:

$$a^{n+2} = a^{n+1} + a^n \quad (\text{III})$$

وبضرب (II) في  $b^n$  حيث  $n$  عدد صحيح، نحصل على:

$$b^{n+2} = b^{n+1} + b^n \quad (\text{IV})$$

بطرح (IV) من (III):

$$a^{n+2} - b^{n+2} = (a^{n+1} - b^{n+1}) + (a^n - b^n)$$

والآن لنقسم على  $a - b = \sqrt{5}$  (لا يساوي الصفر):

$$\frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{a - b} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} + \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

لنفرض أن  $t_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}$ ، إذن  $t_{n+2} = t_{n+1} + t_n$  والمعادلة الأخيرة هي تعريف متسلسلة فيبوناتشي.

كل ما تبقى ليتم عرضه من أجل أن تكون قادراً على استنتاج  $t_n$  لعدد  $n$  من

أعداد فيبوناتشي  $f_n$  هو أن توجد  $t_1 = 1, t_2 = 2$ . لدينا:

$$t_1 = \frac{a^1 - b^1}{a - b} = 1$$

$$t_2 = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{(a + b)(a - b)}{a - b} = \frac{(\sqrt{5})(1)}{(\sqrt{5})} = 1$$

إذن:  $f_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}$  حيث:

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, n = 1, 2, 3, \dots$$

وهذا يوضح لنا كيف يتم التعبير عن أعداد فيوناتشي في صيغة بينيه Binet form

بدلالة حدود لا تنتمي لأعداد فيوناتشي.

مثال أوجد  $f_6$ .

الحل

$$\begin{aligned} f_6 &= \frac{a^6 - b^6}{a - b} = \frac{(a^3 - b^3)(a^3 + b^3)}{a - b} = \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2)(a^3 + b^3)}{a - b} \\ &= (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)(a + b) \\ &= (2)(4)(1) = 8 \end{aligned}$$

والآن من الصفحة قبل السابقة، وجمع (III)، (IV):

$$a^{n+2} + b^{n+2} = (a^{n+1} + b^{n+1}) + (a^n + b^n)$$

نفرض أن:  $w_n = a^n + b^n$ ، إذن:

$$w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$$

وبالعمل على المتسلسلة  $w_n$ ، ودراسة  $w_1, w_2$ .

$$w_1 = a^1 - b^1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1$$

$$w_2 = a^2 + b^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} + \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = 3$$

ولأن  $w_1 = 1, w_2 = 3$  ، فإن  $w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$  ، حيث  $w_n$  هو الحد النوني في

متابعة لوكاس ، فإن :  $l_n = a^n + b^n$

$$\text{حيث } a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, n = 1, 2, 3, \dots$$

وهذا يوضح كيف يمكن التعبير عن أعداد لوكاس بصيغة بينيه.

مثال أثبت أن  $f_{2n} = f_n \cdot l_n$  (الفقرة الأولى صفحة 348)

الحل

$$\text{لأن } f_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}, l_n = a^n + b^n \text{ فإن :}$$

$$f_n \cdot l_n = \left(\frac{a^n - b^n}{a - b}\right) \cdot (a^n + b^n) = \frac{a^{2n} - b^{2n}}{a - b} = f_{2n}$$

بالعودة إلى جدول النسب في الشكل 12 - 11 ، سوف ندرس  $\frac{f_{n+1}}{f_n}, \frac{l_{n+1}}{l_n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^n - b^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{a - \frac{b^{n+1}}{a^n}}{1 - \frac{b^n}{a^n}} \text{ وبالقسمة على } a^n$$

ولأن  $\lim_{n \rightarrow \infty} b^n = 0$  يكون لدينا:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi \quad (\text{النسبة الذهبية})$$

هذه النتيجة تبرر الحدس الذي بدأنا به هذا الفصل.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi$$

نظرية 11-11

برهان هذه النظرية قد تم إثباته سابقاً.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_{n+1}}{l_n} = \phi$$

نظرية 12-11

من الشيق هنا أن نقدم برهاناً بديلاً عن برهان النظرية 11-11

البرهان

لتكن:  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$  ، ومن تعريف  $f_n$  لدينا:

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

إذن:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n-1}}{f_n}$$

ولكن لدينا:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$$

إذن:

$$x = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \phi \quad \bullet$$

صيغة بينه الخاصة بـ  $f_n$  تمكننا بطريقة بسيطة من إثبات العلاقة الثانية في صفحة 339.

$$l_n = f_{n-1} + f_{n+1} = \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a-b} + \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} = \frac{a^n - \frac{b^n}{a} + a \cdot a^n - b \cdot b^n}{a-b}$$

$$= \frac{a^n \left( a + \frac{1}{a} \right) - b^n \left( b + \frac{1}{b} \right)}{a-b}$$

ولأن  $a = \frac{-1}{b}, b = \frac{-1}{a}$ ؛ إذن:

$$l_n = \frac{a^n \left( a + \frac{1}{a} \right) - b^n \left( b + \frac{1}{b} \right)}{a-b} = \frac{a^n (a-b) - b^n (b-a)}{a-b} = a^n + b^n$$

والآن، لنعد لقوى  $\phi$  التي هي في الأصل أساس مناقشتنا حول أعداد فيوناتشي (انظر الشكل 7-11). ومن خلال معرفتنا بهذه الأعداد يمكننا صياغة الحد العام لقوى  $\phi$ :

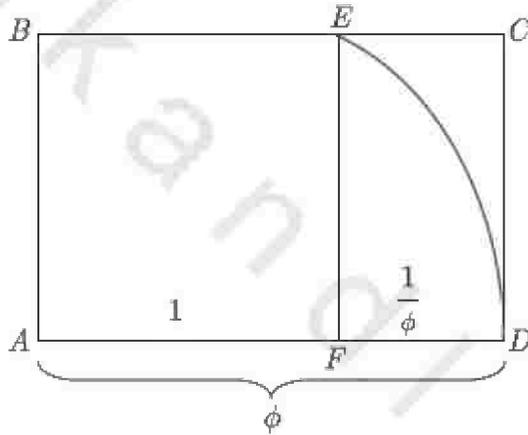
$$\phi^n = f_n \phi + f_{n-1}$$

نحن نملك الآن علاقتين واضحتين بين النسبة الذهبية وأعداد فيوناتشي.

### المستطيل الذهبي ( مرة أخرى )

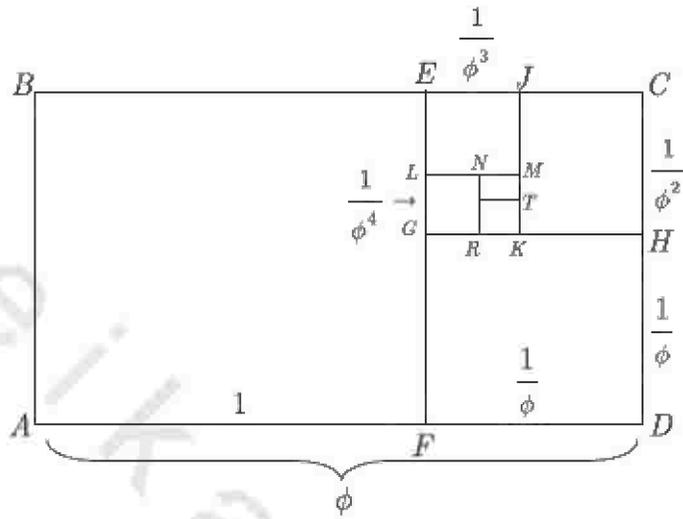
سنكمل مناقشتنا حول المستطيل الذهبي  $ABCD$ ، والذي قدمناه في الشكل 6-11 عندما قمنا بإنشاء المربع داخله. وكما في الشكل 14-11، إذا كان  $AF = 1$  فإن  $FD = \frac{1}{\phi}$  ومن ذلك نستنتج أن  $AD = 1 + \frac{1}{\phi} = \phi$ ، إذن، بعدا

المستطيل  $CDFE$  هما  $CD = 1$ ,  $FD = \frac{1}{\phi}$  وهو أيضاً مستطيل ذهبي. سنستكمل عملنا بإنشاء المربع  $DFGH$  داخل المستطيل الذهبي  $CDFE$ ، كما في الشكل 11-15. عندها سنجد أن  $CH = 1 - \frac{1}{\phi} = \frac{1}{\phi^2}$  وبالتالي يصبح لدينا المستطيل  $CHGE$  وهو أيضاً مستطيل ذهبي. وبالمثل يمكننا الحصول على المربع  $CHKG$  في المستطيل الذهبي  $CHGE$ ؛ ومن ثم يمكننا التوصل على أن:



شكل 11-14

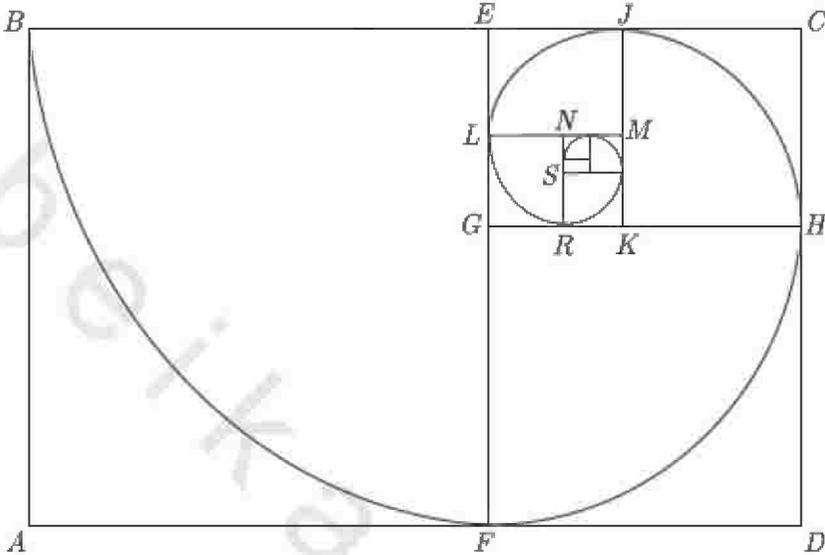
ومرة ثانية، لدينا مستطيل ذهبي جديد. هذه المرة هو المستطيل الذهبي  $EJKG$  وباستكمال تلك العملية نحصل على المستطيل الذهبي  $GKML$ ، والمستطيل الذهبي  $NMKR$ ، وكذلك المستطيل الذهبي  $MNST$ ، وهكذا.



شكل 11 - 15

لنفرض الآن أننا سنرسم أرباع الدوائر التالية، ( انظر الشكل 11 - 16 )

المركز	نصف القطر
$E$	$EB$
$G$	$GF$
$E$	$KH$
$M$	$MJ$
$N$	$NL$
$S$	$SR$
.	.
.	.

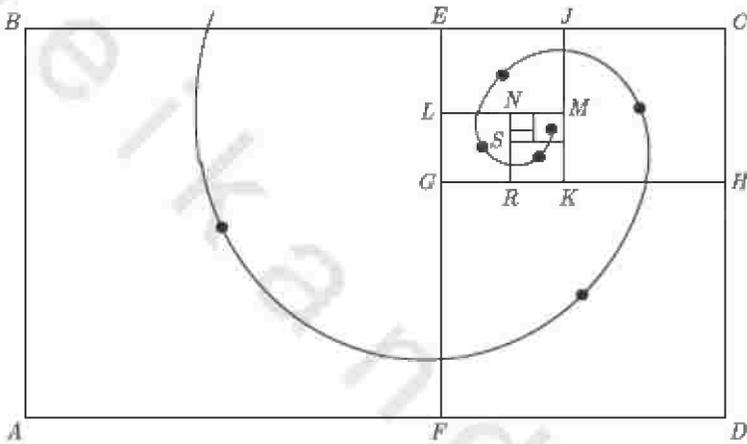


شكل 16 - 11

تكون النتيجة ذلك الحلزون اللوغاريتمي الذي يتضح في الشكل ، كما أننا أيضاً نلاحظ أن مراكز هذه المربعات تقع على حلزون لوغاريتمي آخر ( انظر الشكل 17 - 11 ).

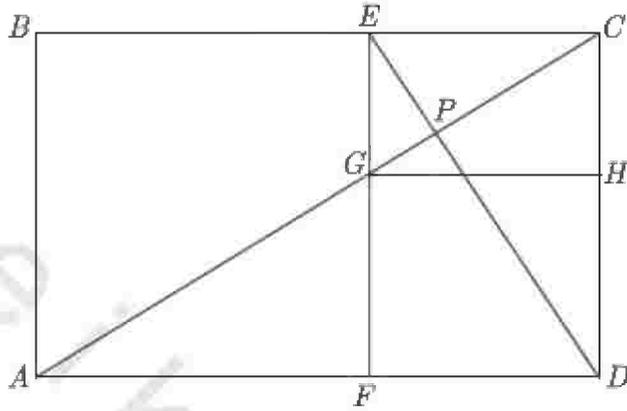
الحلزون الذي يوضحه الشكل 16 - 11 يتقارب إلى نقطة في المستطيل  $ABCD$  ، وهذه النقطة هي نقطة تقاطع  $AC$  مع  $DE$  ( الشكل 18 - 11 ). لاحظ مرة أخرى المستطيل الذهبي  $ABCD$  على الشكل 18 - 11. ولقد استنتجنا سابقاً أن المربع  $ABEF$  يعين مستطيلاً ذهبياً آخر هو  $CEFD$ . ولأن جميع المستطيلات الذهبية لها نفس الشكل ، فإن المستطيل  $ABCD$  يشابه المستطيل  $CEFD$  وهذا يعني أن  $\Delta ECD \sim \Delta CDA$  ، ومن ذلك  $\angle CED \cong \angle DCA$  ، و  $\angle DCA$  تتمم  $\angle ECA$  ، إذن  $\angle CED$  تتمم  $\angle ECA$  ، إذن  $\angle EPC$  يجب أن تكون قائمة ، وهذا يعني أن  $\overline{AC} \perp \overline{ED}$ .

أي أنه إذا كان عرض مستطيل هو طول مستطيل آخر فإن المستطيلين يتشابهان، ويطلق على هذا النوع من المستطيلات "المستطيلات المتعكسة" reciprocal rectangles. في الشكل 11 - 18، نجد أن المستطيل  $ABCD$  والمستطيل  $CEFD$  متعاكسان.



شكل 11 - 17

وعلاوة على ذلك، فإن قطري المستطيلين المتعاكسين يكونان متعامدين. وبنفس الطريقة التي اتبعناها سابقاً، نستطيع إثبات أن المستطيلين  $CEFD, CEGH$  متعاكسان وقطريهما  $ED, CG$  متعامدان ويتقاطعان في النقطة  $P$ . ويمكننا تعميم هذا البرهان ليشمل كل مستطيلين متاليين في الشكل 11 - 16. وواضح أن النقطة  $P$  يجب أن تكون نهاية الخلزون في الشكل 11 - 16.



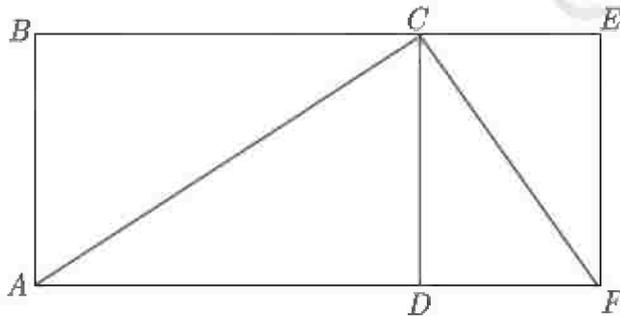
شكل 11 - 18

قطرا المستطيلين المتعاكسين متعامدان.

نظرية 11-13

البرهان

لقد ناقشنا آنفاً الحالة التي فيها يقع أحد المستطيلين المتعاكسين داخل الآخر. والآن سنناقش الحالة التي لا توجد فيها أي منطقة مشتركة بين المستطيلين المتعاكسين ( انظر الشكل 11-19 ).



شكل 11 - 19

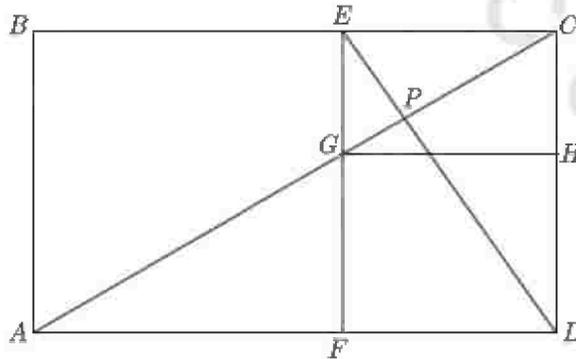
المستطيلان  $ABCD, CEFD$  في الشكل 19 - 11 متشابهان. إذن  
 $\Delta CDA \sim \Delta FDC$  ، ومن نتائج هذا التشابه  $\angle FCD \cong \angle CAD$  . وبما أن  
 $\angle CAD$  تتم  $\angle DCA$  ، إذن  $\angle FCD$  تتم  $\angle DCA$  . إذن  $\overline{AC} \perp \overline{CF}$  .

إذا تعامد زوج من الأقطار المتناظرة في مستطيلين وكان عرض  
 أحد هذين المستطيلين هو طول المستطيل الآخر، فإن  
 المستطيلين يكونان متعاكسين.

نظرية: 11-14

البرهان

في المستطيلين  $ABCD, CEFD$  لدينا  $\overline{AC} \perp \overline{ED}$  عند النقطة  $P$  ( انظر  
 الشكل 20 - 11). سنحاول الآن إثبات أن هذين المستطيلين متشابهان.  
 كلتا الزاويتين  $\angle CED, \angle DCA$  تتمان  $\angle ECA$  . إذن ،  $\angle CED \cong \angle DCA$  ،  
 وهذا يمكننا من استنتاج أن  $\Delta CED \sim \Delta DCA$  ، وهذا يقتضي أن يتشابه  
 المستطيلان  $ABCD, CEFD$  ( لأن الأضلاع المتناظرة متناسبة ).



شكل 20 - 11

لنظرية 14-11 تطبيقات شيقة، فهي على سبيل المثال تعطينا طريقاً مختلفاً لإنشاء المستطيلات الذهبية. فنستطيع ببساطة أن نبدأ بالمستطيل الذهبي  $ABCD$ . ثم نرسم من النقطة  $D$  عموداً على  $\overline{AC}$ . ومن نقطة تقاطع هذا العمود مع  $\overline{BC}$  التي نرمز لها بـ  $E$  نرسم عموداً إلى  $\overline{AD}$ ، لنكمل المستطيل الذهبي الثاني. ويتكرر مثل هذه المعالجة نحصل على العديد من المستطيلات الذهبية.

### المثلث الذهبي The Golden Triangle

لعل إعجابنا بالمستطيل الذهبي يدفعنا للبحث عن أشكال ذهبية أخرى، وهنا يظهر مثلث سيبينا بالدهشة والإعجاب أيضاً، وهذا المثلث مبني على النسبة الذهبية وعلى عدة خصائص شيقة أخرى تناظر بشكل ما خصائص المستطيل الذهبي.

وسنبداً بمثلث متطابق الضلعين قياس زاوية رأسه  $36^\circ$ ، ثم ننشئ  $\overline{BD}$  منصفاً للزاوية  $\angle ABC$  (انظر الشكل 21-11). ومن ذلك نستنتج أن  $m\angle DBC = 36^\circ$ ، وعليه  $\triangle ABC \sim \triangle BCD$ . والآن لنفرض أن:  $AD = x, AB = 1$  ولأن  $\triangle ABC$  متطابق الضلعين. إذن، نستنتج أن:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \quad \text{ومن تشابه } \triangle ABC, \triangle BCD \text{ نجد أن } BC = BD = AD = x$$

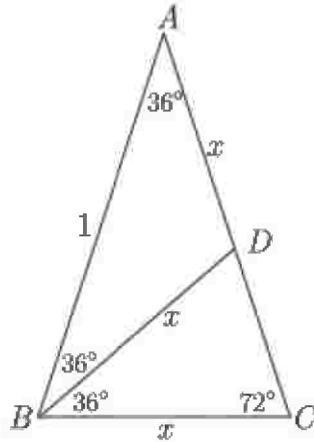
وهذا يقود إلى أن:

$$x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

( تم حذف الجذر السالب حيث إننا نتعامل مع أطوال ). ويمكننا تسمية

$$\frac{1}{x} = \phi \quad \text{حيث النسبة ( ضلع } \div \text{ قاعدة ) للمثلث } ABC \text{ هي } \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\phi}$$

ولذلك نطلق على  $\triangle ABC$  المثلث الذهبي.



شكل 11 - 21

وبأخذ المنصفات التالية تتابعياً  $\overline{BD}, \overline{CE}, \overline{DF}, \overline{EG}, \overline{FH}$  لزوايا القاعدة لكل مثلث قياسات زواياه  $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$ ، سنحصل على متسلسلة من المثلثات الذهبية ( انظر الشكل 11 - 22 )، وهذه المثلثات الذهبية ( والتي قياسات زواياها  $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$  ) هي  $\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDE, \triangle DEF, \triangle EFG, \triangle FGH$ ، ولو كانت المساحة تسمح لأمكننا رسم العديد من منصفات الزوايا وبالتالي تكوين مزيد من المستطيلات الذهبية.

سنلاحظ أن دراستنا للمثلث الذهبي تتوازي مع المستطيل الذهبي، وسنبداً بفرض أن  $HG = 1$  ( الشكل 11 - 22 )، ولأن النسبة (ضلع  $\div$  قاعدة) في المثلث الذهبي هي  $\phi$ ؛ إذن في  $\triangle FGH$  :

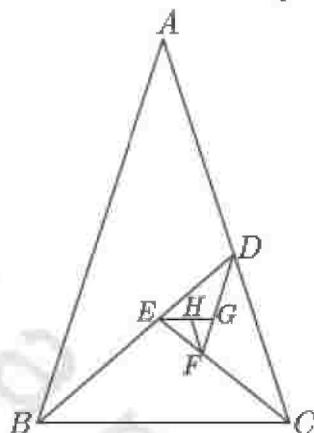
$$\frac{GF}{HG} = \phi \Rightarrow \frac{GF}{1} = \phi \Rightarrow GF = \phi$$

$$\frac{FE}{GF} = \phi \Rightarrow \frac{FE}{\phi} = \phi \Rightarrow FE = \phi^2$$

بالمثل، في المثلث الذهبي  $EFG$  :

$$\frac{ED}{FE} = \frac{\phi}{1} \Rightarrow \frac{ED}{\phi^2} = \frac{\phi}{1} \Rightarrow ED = \phi^3 : \Delta EFG \text{ وفي}$$

$$\frac{DC}{ED} = \frac{\phi}{1} \Rightarrow \frac{DC}{\phi^3} = \frac{\phi}{1} \Rightarrow DC = \phi^4 : CDE \text{ المثلث الذهبي}$$



شكل 11 - 22

وكذلك في المثلث الذهبي  $BCD$  :

$$\frac{CB}{DC} = \frac{\phi}{1} \Rightarrow \frac{CB}{\phi^4} = \frac{\phi}{1} \Rightarrow CB = \phi^5$$

وأخيراً، في المثلث الذهبي  $ABC$  :

$$\frac{BA}{CB} = \frac{\phi}{1} \Rightarrow \frac{BA}{\phi^5} = \frac{\phi}{1} \Rightarrow BA = \phi^6$$

ويستخدم معرفتنا لقوى  $\phi$  ( وقد حصلنا عليها سابقاً ) يمكننا تلخيص النتائج

التالية :

$$HG = \phi^0 = 0\phi + 1 = f_0\phi + f_{-1}\phi$$

$$GF = \phi^1 = 1\phi + 0 = f_1\phi + f_0$$

$$FE = \phi^2 = 1\phi + 1 = f_2\phi + f_1$$

$$ED = \phi^3 = 2\phi + 1 = f_3\phi + f_2$$

$$DC = \phi^4 = 3\phi + 2 = f_4\phi + f_3$$

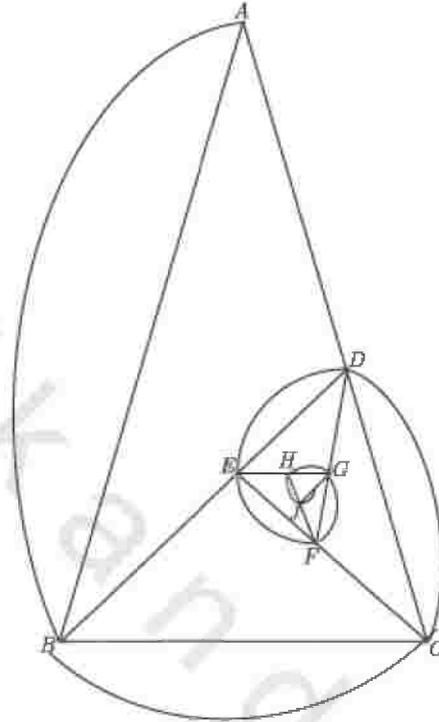
$$CB = \phi^5 = 5\phi + 3 = f_5\phi + f_4$$

$$BA = \phi^6 = 8\phi + 5 = f_6\phi + f_5$$

وكما فعلنا مع المستطيل الذهبي نستطيع استنتاج الحلزون اللوغاريتمي بواسطة رسم أقواس تصل بين رؤوس المثلثات الذهبية المتتالية ( انظر الشكل 23 - 11 ) ونستطيع رسم هذا الأقواس الدائرية كما في الشكل 23 - 11.

وهكذا رأينا أن هناك عدداً كبيراً من العلاقات الرائعة والشيقة والتي تنبثق من النسبة الذهبية، فبعد أن تعرضنا للمثلث الذهبي، يكون التحرك المنطقي هو التحرك نحو تطبيقات تدور حول المضلع الخماسي المنتظم والنجمة الخماسية، التي هي في الأساس تتألف من عدد من المثلثات الذهبية. ونحن نقدم عدداً من هذه العلاقات كتدريبات نتركها لك للعمل عليها مع أملنا أن يشجعك ذلك على زيادة جرعة دراستك للنسبة الذهبية وأعداد فيبوناتشي. وأثناء ذلك بالتأكيد سوف تقدر الصلة الوثيقة بين الهندسة وفروع الرياضيات الأخرى.

...	J	H	G	F	E	D	مركز الدائرة عند النقطة
...	$\widehat{FG}$	$\widehat{EF}$	$\widehat{DE}$	$\widehat{CD}$	$\widehat{BC}$	$\widehat{AB}$	القوس



شكل 11 - 23

تدريبات

أثبت كلاً من العلاقات التالية في التدريبات 1 - 4 :

$$\frac{l_{12}}{l_4} = l_8 - 1 \quad .b$$

$$\frac{l_{15}}{l_5} = l_{10} + 1 \quad .b$$

$$\frac{l_9}{l_3} = l_6 + 1 \quad .b$$

$$\frac{l_6}{l_2} = l_4 - 1 \quad .b$$

$$\frac{f_{12}}{f_5} = f_5 + f_7 \quad .a \quad .1$$

$$\frac{f_{10}}{f_5} = f_4 + f_6 \quad .a \quad .2$$

$$f_{11} = f_5^2 + f_6^2 \quad .a \quad .3$$

$$f_9^2 - 4 \cdot f_4 \cdot f_7 = f_6^2 \quad .a \quad .4$$

استخدام الجدول الموجود في الشكل 9 - 11 لإكمال الفراغ في التدريبات 5 - 10

$$f_n^2 + f_{n+1}^2 = (\dots) \quad .5$$

$$f_{2n} = f_{n+1}^2 - (\dots) \quad .6$$

$$f_{-n} = f_n \cdot (\dots) \quad .7 \text{ (ربما ستحتاج لإكمال الجدول 9 - 11).}$$

$$f_{n+1} + f_{n-1} = f_{2n} \div (\dots) \quad .8$$

$$(\dots) \cdot f_8 = f_{n+3}^2 - f_{n-3}^2 \quad .9$$

$$\sum_{m=1}^6 f_m = (\dots) - 1 \quad .10$$

$$\text{مثّل } \sum_{m=1}^6 f_m^2 \text{ هندسياً.} \quad .11$$

$$\text{مثّل } \sum_{m=1}^8 f_m^2 \text{ هندسياً.} \quad .12$$

عبر في التدريبات 16 - 13 بطريقة أخرى تحتوي على حدود من أعداد فيبوناتشي.

$$\sum_{m=1}^n f_{4m-1} \quad .14 \qquad \sum_{m=1}^n f_{4m} \quad .13$$

$$\sum_{m=1}^n f_{4m-3} \quad .16 \qquad \sum_{m=1}^n f_{4m-2} \quad .15$$

أثبت التدريبات 21 - 17 باستخدام الاستقراء الرياضي.

$$\sum_{m=1}^n f_m^2 = f_n \cdot f_{n+1} \quad .18 \qquad \sum_{m=1}^n f_{2m} = f_{2n+1} - 1 \quad .17$$

$$f_{2n} + f_{n-1}^2 = f_{n+1}^2 \quad .20 \qquad f_n^2 - f_{n+2} \cdot f_{n-2} = (-1)^n \quad .19$$

$$f_{2n} = f_n \cdot f_{n-1} + f_n \cdot f_{n+1} \quad .21$$

22 - 25. أثبت بالاستقراء الرياضي كل النتائج التي حصلت عليها في التدريبات

26. أثبت أن مجموع المجاميع الواردة في التدريبات 16 - 13 تساوي  $\sum_{m=1}^{4n} f_m$ .

استخدام الجدولين بالشكلين 11-9, 11-11 لإكمال الفراغ في التدريبات

$$27 - 30$$

$$27. (\dots) + l_{n+1}^2 = 5f_{2n+1}$$

$$28. (\dots) = 2 + l_{4n}$$

$$29. 5f_{2n}^2 = (\dots) - 2$$

$$30. 5f_{2n}^2 = (\dots) - 4$$

$$31. \text{ مثل } \sum_{m=1}^5 l_m^2 \text{ هندسياً.}$$

$$32. \text{ مثل } \sum_{m=1}^8 l_m^2 \text{ هندسياً.}$$

عبر في التدريبات 36 - 33 بطريقة أخرى تحتوي على حدود من أعداد فيوناتشي.

$$34. \sum_{m=1}^n l_{4m-1}$$

$$33. \sum_{m=1}^n l_{4m}$$

$$36. \sum_{m=1}^n l_{4m-3}$$

$$35. \sum_{m=1}^n l_{4m-2}$$

37. أثبت نظرية 9 - 11 باستخدام الاستقراء الرياضي.

38. أثبت نظرية 10 - 11 باستخدام الاستقراء الرياضي.

39. أثبت - بمثال - كيف يمكننا تمثيل أول 25 عدداً طبيعياً كمجموع من أعداد

مختلفة من أعداد لوكاس.

40. أثبت كيف يمكن لأي عدد من الأعداد الطبيعية أن يتم التعبير عنه كمجموع

أعداد مختلفة من أعداد فيوناتشي.

ولحل هذا التدريب إليك بعض الإرشادات :

( على سبيل المثال  $f_3 + f_7 = f_3 + f_6 + f_6 = 15$  أو  $f_4 + f_6 + f_6 = 45$  ،  
 ..... إلخ). أولاً حاول أن تمثل الأعداد من 1 إلى 100 كحدود من أعداد فيوناتشي. ثم  
 حاول أن تثبت أن أي عدد طبيعي يمكن تمثيله كحدود من أعداد فيوناتشي. هل يمكن  
 لنا أن نعبر عن جميع الأعداد الطبيعية كحدود من أعداد فيوناتشي إذا فقد أي عدد  
 من أعداد فيوناتشي؟ أو إذا فقد أي عددين من أعداد فيوناتشي؟ وضح بالأمثلة أنه  
 إذا فقد  $f_1$  فإن أي عدد طبيعي يمكن تمثيله كحدود من أعداد فيوناتشي ( باستثناء  $f_1$  )  
 فقط بطريقة واحدة إذا لم يتم اختيار حدين متتاليين  $(f_k, f_{k+1})$  على سبيل المثال  
 $f_2 + f_4 + f_7 = 17$  .

41. قم بإعداد جدول للفروق بين حدود متسلسلة فيوناتشي. وقد يساعدك في عمل  
 هذا الجدول إذا بدأت من الجدول المتاح بالشكل 24 - 11 وقمت بعد ذلك  
 بإكماله. لاحظ النمط!

5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8
-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	
13	-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1		
-21	13	-8	5	-3	2	-1	1	0			
34	-21	13	-8	5	-3	2	-1				
-55	34	-21	13	-8	5	-3					
89	-55	34	-21	13	-8						
-144	89	-55	34	-21							

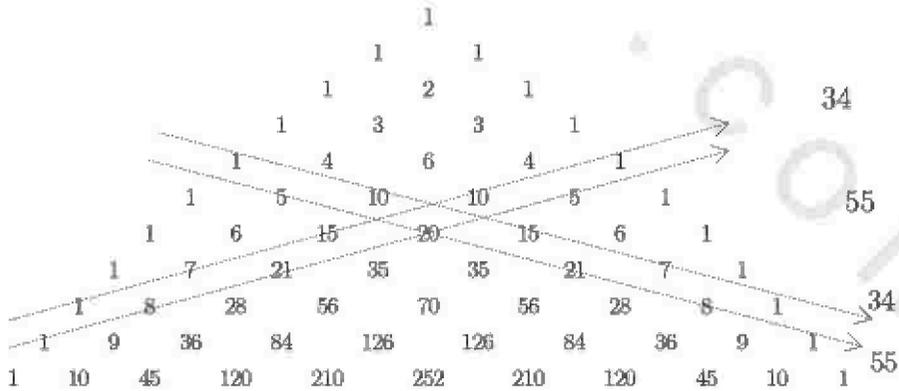
42. قم بإعداد جدول للفروق بين أعداد لوكاس كما فعلت مع أعداد فيوناتشي في التدريب السابق.

43. بدراسة قابلية القسمة لأعداد فيوناتشي. لاحظ أن  $f_6 | f_{10}$  (ونقرأ  $f_5$  تقسم  $f_{10}$ ) ، وأيضاً  $f_5 | f_{15}$  ،  $f_4 | f_8$  ،  $f_4 | f_{12}$  ،  $f_4 | f_{16}$  ، وهكذا. أوجد النمط العام لقابلية القسمة لأعداد فيوناتشي موضحاً السبب.

44. اقسم كلاً من  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_{31}$  على 7 وافحص البواقي. ثم اقسم  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_{31}$  على 5 وافحص البواقي. ثم حدد ما هو استنتاجك فيما يتعلق بالبواقي ؟ ما هو العدد الطبيعي الذي يقسم أعداد فيوناتشي؟ حاول القسمة على باقي الأعداد الطبيعية واستنتج أنماطاً مختلفة.

45. من خلال مثلث باسكال الموضح في الشكل 25 - 11. هل تستطيع إيجاد مجاميع الأعداد والتي تنتج متسلسلة فيوناتشي؟ هل تستطيع تبرير ذلك.

استخدم صيغة بينيه الخاصة بكل من  $f_n$  ،  $L_n$  لإيجاد قيمة التعبيرات الواردة في التدريبات 46 - 49.



شكل 25 - 11

$l_7$ .47	$f_7$ .46
$f_9$ .49	$l_9$ .48

أثبت كلاً من المتطابقات التالية في التدريبات 50 - 55 باستخدام صيغة بينيه لكل من  $l_n$  ،  $f_n$ .

$$5f_n = l_{n-1} + l_{n+1} \quad .51 \qquad l_n = f_{n-1} + f_{n+1} \quad .50$$

$$5f_n = l_{n-2} + l_{n+2} \quad .53 \qquad l_n = f_{n-2} + f_{n+2} \quad .52$$

$$5f_{2n+1} = l_{n+1}^2 + l_n^2 \quad .55 \qquad 5f_n^2 = l_n^2 - 4(-1)^n \quad .54$$

.56. أثبت باستخدام الاستقراء الرياضي أن  $f_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}$  حيث  $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  ،  $b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  ،  $n = 1, 2, 3, \dots$

.57. أثبت باستخدام الاستقراء الرياضي أن:  $l_n = a^n + b^n$  حيث  $a, b$  تم تعريفهما في التدريب السابق.

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = f_1 + f_2x + f_2x^2 + \dots + f_nx^{n-1} + \dots \quad .58$$

حيث  $f_n$  هو الحد النوني من متتابعة فيبوناتشي. فوضح لماذا هذه العلاقة صحيحة؟

.59. باعتبار أن قوى  $\phi = a$  (النسبة الذهبية) هي:

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$a^2 = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$a^3 = \frac{8 + 4\sqrt{5}}{4} = \frac{4 + 2\sqrt{5}}{2}$$

$$a^4 = \frac{14 + 6\sqrt{5}}{4} = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$$

$$a^5 = \frac{22 + 10\sqrt{5}}{4} = \frac{11 + 5\sqrt{5}}{2}$$

$$a^6 = \frac{36 + 16\sqrt{5}}{4} = \frac{18 + 8\sqrt{5}}{2}$$

ناقش هذه النتائج ومثل قوى  $a = \phi$  بدلالة  $a$  مثل:

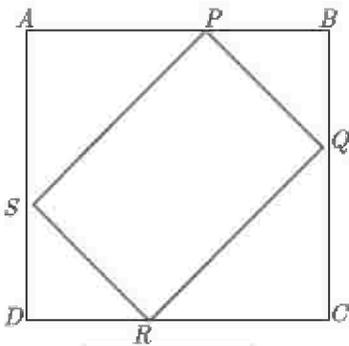
$$a^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 = a + 1$$

$$a^3 = 2a + 1$$

$$a^4 = 3a + 1$$

.

.



شكل 11 - 26

60. استنتج بعض العلاقات الإضافية بين

النسبة الذهبية وأعداد فيوناتشي ولوكاس.

61. أثبت أن أطوال أضلاع أي مثلث لا يمكن

أن تكون ثلاثة أعداد متتالية سواء من

أعداد فيوناتشي أو لوكاس.

62. أثبت أنه إذا كانت النقاط  $P, Q, R, S$

تقسم كل ضلع من أضلاع المربع  $ABCD$

إلى النسبة الذهبية كما يتضح في الشكل

11 - 26، فإن الرباعي  $PQRS$  يكون

مستطيلاً ذهبياً.

63. حدد الجزء الذهبي على النجمة الخماسية المنتظمة في أكبر عدد ممكن من الأماكن داخلها.

64. حدد الجزء الذهبي على الخماسي المنتظم في أكبر عدد ممكن من الأماكن داخله.

65. أثبت أن الإنشاء التالي يقسم  $\overline{AB}$  حسب النسبة الذهبية: أنشئ  $\overline{BC} \perp \overline{AB}$

عند النقطة  $B$  بحيث  $BC = \frac{1}{2}(AB)$ . ارسم  $\overline{AC}$  (انظر الشكل 11 - 27).

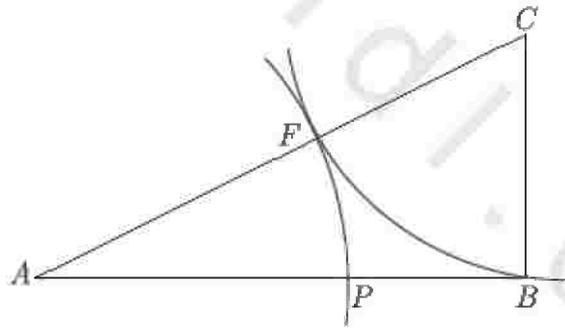
ثم ارسم الدائرة التي مركزها  $C$  ونصف قطرها  $\overline{BC}$  لتقطع  $\overline{AC}$  في النقطة

$F$ . مركزها  $C$  ونصف قطرها  $\overline{BC}$  لتقطع  $\overline{AC}$  في النقطة  $F$ . النقطة  $P$  هي

نقطة تقاطع الدائرة التي مركزها النقطة  $A$  ونصف قطرها  $\overline{AF}$ ، وهي النقطة

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB}$$

التي تقسم  $\overline{AB}$  إلى القسم الذهبي أي



شكل 11 - 27

66. أثبت في الشكل 11 - 22 أن مساحة  $\triangle BCD$  : مساحة  $\triangle ABD$  : مساحة  $\triangle ABC$

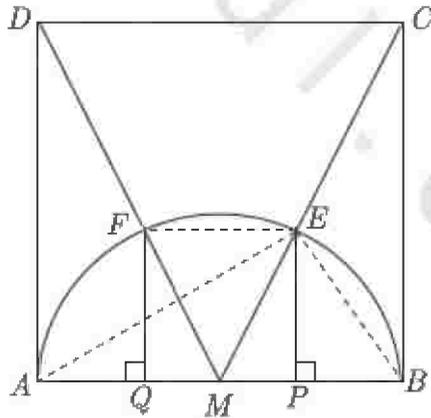
$$1 : \phi : \phi^2 = \triangle ABC$$

67. أثبت أن  $\sin 18^\circ = \frac{1}{2\phi}$ .

68. أوجد  $\cos 27^\circ$  بدلالة  $\phi$ .

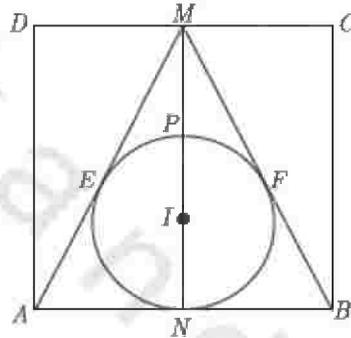
69. أثبت أن منتصف زاوية الرأس في المثلث الذهبي يقسم كلاً من منصفَي الزاويتين الباقيتين حسب النسبة الذهبية.

70. أثبت أن الإنشاء التالي يقسم  $\overline{QB}$  حسب النسبة الذهبية: ابدأ بالمرجع  $ABCD$  (انظر الشكل 11-28). ثم ارسم نصف دائرة داخل المربع على  $\overline{AB}$  والتي نقطة منتصفها هي النقطة  $M$ ، ثم ارسم  $\overline{CM}, \overline{DM}$  ليقطعا نصف الدائرة في  $E, F$  على الترتيب. ومن النقطة  $E$  أسقط عموداً على  $\overline{AB}$  يقطعها في النقطة  $P$ ، ومن النقطة  $F$  أسقط عموداً على  $\overline{AB}$  يقطعها في النقطة  $Q$ .  $\frac{PQ}{BP} = \phi$ . (الخطوط المنقوشة في الشكل 11-28 تم رسمها كإرشاد).



شكل 11 - 28

71. أثبت أن الإنشاء التالي يقسم  $\overline{MN}$  حسب النسبة الذهبية: ابدأ بالمربع  $ABCD$  حيث  $M$  منتصف  $\overline{CD}$ . ارسم الدائرة  $I$  كدائرة داخلية للمثلث  $AMB$  تمس أضلاعه  $\overline{AM}$ ,  $\overline{BM}$ ,  $\overline{AB}$  عند النقاط  $E, F, N$  على الترتيب (انظر الشكل 11 - 29)، وعليه يكون لدينا النقطة  $P$  تقسم  $\overline{MN}$  حسب النسبة الذهبية  $\frac{MP}{PN} = \frac{PN}{MN}$ .



شكل 11 - 29

72. أثبت أن أطوال المتوسطات الخارجة من زوايا القاعدة في المثلثات المتتالية تشكل متسلسلة فيبوناتشي.

73. أثبت أن مساحة الخماسي المنتظم الذي طول ضلعه  $s$  تساوي  $\frac{5s^2\phi}{4\sqrt{3}-\phi}$ .

## ثبت المصطلحات

أولاً: عربي - إنجليزي

أ

Altitudes of a triangle	ارتفاعات المثلث
Collinearity	استقامة (نقاط تقع على مستقيم واحد)
Mathematical induction	استقراء رياضي
Midline of a triangle	الخط المنصف للمثلث
Construction	إنشاء
Abraham Bosse	أبراهام بوس
Apollonius	أبولونيوس
Arabic numbers	أرقام عربية
Exradii lengths	أطوال أنصاف اقطار الدوائر الخارجية للمثلث
Fibonacci numbers	أعداد فيبوناشي
Lucas numbers	أعداد لوكاس
Perpendiculars	أعمدة

Shortest distance أقصر مسافة

Equiradii أنصاف أقطار الدوائر الأربع لمثلث

## ب

Pappus of Alexandria بابوس الإسكندري

Pascal, Blaise باسكال ، بليز

Ptolemy بطليموس

Poncelet, Jean- Victor بونسليه ، جان فيكتور

Betweenness بينية

## ت

Nomenclature تسمية

Similarity تشابه

Similarity of triangles تشابه المثلثات

Charles Julien Brianchon تشارلز جوليان براينشون

Charles Davies تشارلز ديفيز

Harmonic division تقسيم توافقي

Equivalence تكافؤ

Concurrency تلاق في نقطة

Proportion تناسب

## ث

Duality ثنوية

## ج

Gerard Desargues

جيرارد ديزارغ

Gergonne, Joseph-Diaz

جيرجوني ، جوزيف دياز

Giovanni Ceva

جيوفاني شيفا

## ح

Fourth proportion

حد رابع متناسب

Logarithmic spiral

حلزون لوغاريتمي

## خ

Euler line

خط أويلر

Simson line

خط سيمسون

Pentagon

خماسي

## د

Nine-point circle

دائرة النقاط التسع

Circumcircle

دائرة محيطية بمثلث

Equicircles

دوائر مماسة لأضلاع مثلث

## ر

Cyclic quadrilateral

رباعي دائري

Robert Simson

روبرت سيمسون

Vertices

رؤوس

Rene Descartes

رينيه ديكارت

## س

Stewart, Matthew

ستيوارت، ماثيو

Hexagon

سداسي

Smogorzhevski

سموجرفيسكي

## ش

Trapezoid

شبه منحرف

Quadrilateral

شكل رباعي

## ص

Analogue spherical

صورة كروية مناظرة

Brahmagupta's formula

صيغة براهاماجوبتا

Binet form

صيغة بينيه

## ط

Proving methods

طرق البرهان

## ف

Architecture

فن معماري

Fibonacci

فيبوناشي

Vieta, Franciscus

فيتا، فرانسيسكوس

Pythagoras

فيثاغورس

Fermat

فيرما

## ق

Secant	قاطع
Sector	قطاع
Diagonals of a quadrilateral	قطرا شكل رباعي
Segment	قطعة
Conic sections	قطع مخروطية

## ك

Karl Feuerbach	كارل فيورباخ
Elements	كتاب العناصر لإقليدس
Almagest	كتاب المجسطي لبطليموس

## ل

Legender, Adrien	لجندر، أدريان
Lucas, Francois-Edouard- Anatole	لوكاس، إدوارد فرانسوا أناتول
Leonardo of pisa	ليوناردو بيزا

## م

Miquel	مايكل
Inequalities	متباينات
Parallelogram	متوازي أضلاع
Pedal triangle	مثلث المواقع
Orthic triangle	مثلث المواقع من نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث

Pascal triangle	مثلث باسكال
Acute triangle	مثلث حاد الزوايا
Right triangle	مثلث قائم الزاوية
Equilateral triangle	مثلث متطابق الأضلاع
Isosceles triangle	مثلث متطابق الضلعين
Medial triangle	مثلث متوسط
Scalene triangle	مثلث مختلف الأضلاع
Obtuse triangle	مثلث منفرج الزاوية
Triangles in circle inscribed	مثلثات منشأة داخل دائرة
Redundant set	مجموعة الفائض
Radical axes	مجاور أساسية
Locus	محل هندسي
Square	مربع
Excenter	مركز الدائرة الخارجية
Incenter	مركز الدائرة الداخلية
Circumcenter	مركز الدائرة المحيطة
Area	مساحة
Apollonius problem	مسألة أبولونيوس
Golden rectangle	مستطيل ذهبي
Reciprocal rectangles	مستطيلات متعاكسة
Cevian	مستقيم مار برأس

Polygon	مضلع
Rhombus	معين
Fallacy	مغالطة
Tangent	مماس
Angel bisector	منصف زاوية
Perpendicular bisectors	منصفات عمودية
Parallel	مواز
Moritz Pasch	موريتز باش
Feet	موطئ مستقيم على آخر

## ن

Napoleon	نابوليون
Nagel	ناجل
Ratio of similitude	نسبة التشابه
Golden ratio	نسبة ذهبية
Semiperimeter	نصف المحيط
Radius	نصف قطر الدائرة
Inradius	نصف قطر الدائرة الداخلية للمثلث
Circumradius	نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث
Orthocentric system	نظام تقاطع الارتفاعات
Concyclic points	نقاط على محيط دائرة واحدة
Midpoint	نقطة المنتصف

Equiangular point

نقطة تساوي الزوايا

Oorthocenter

نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث

Centroid of triangle

نقطة تقاطع المتوسطات في المثلث

Centerpoint

نقطة متوسطة

Newton

نيوتن

→

Heron of Alexandria

هيرون الإسكندري

و

William Wallace

وليام والاس

Chord

وتر

## ثانياً: إنجليزي - عربي

## A

Acute triangle	مثلث حاد الزوايا
Almagest	كتاب المجسطي لبطليموس
Altitudes of a triangle	ارتفاعات المثلث
Analogue spherical	صورة كروية مناظرة
Angel bisector	منصف زاوية
Apollonius	أبولونيوس
Apollonius problem	مسألة أبولونيوس
Arabic numbers	أرقام عربية
Architecture	فن معماري
Area	مساحة

## B

Betweenness	بينية
Binet form	صيغة بينيه
Boşse, Abraham	أبراهام بوس
Brahmagupta's formula	صيغة براهاماجوتا
Brianchon Charles Julien	تشارلز جوليان براينشون

## C

Centerpoint	نقطة متوسطة
Centroid of triangle	نقطة تقاطع المتوسطات في المثلث
Ceva	شيفا

Cevian	مستقيم مار برأس
Charles Davies	تشاؤلز دافيز
Chord	وتر
Circumcenter	مركز الدائرة المحيطة
Circumcircle	دائرة محيطة بمثلث
Circumradius	نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث
Collinearity	استقامة (نقاط تقع على مستقيم واحد)
Concurrency	تلاق في نقطة
Concyclic points	نقاط على محيط دائرة واحدة
Conic sections	قطوع مخروطية
Construction	إنشاء
Cyclic quadrilateral	رباعي دائري
<b>D</b>	
Diagonals of a quadrilateral	قطرا شكل رباعي
Duality	ثنوية
<b>E</b>	
Elements	كتاب العناصر لإقليدس
Equiangular point	نقطة تساوي الزوايا
Equicircles	دوائر مماسة لأضلاع مثلث
Equilateral triangle	مثلث متطابق الأضلاع
Equiradii	أنصاف أقطار الدوائر الأربع لمثلث
Equivalence	تكافؤ

Euler line	خط أويلر
Excenter	مركز الدائرة الخارجية
Exradii lengths	أطوال أنصاف اقطار الدوائر الخارجية للمثلث
<b>F</b>	
Fallacy	مغالطة
Feet	موطئ مستقيم على آخر
Fermat	فيرما
Fibonacci	فيبوناتشي
Fibonacci numbers	أعداد فيبوناتشي
Fourth proportion	حد رابع متناسب
<b>G</b>	
Gerard Desargues	جيرارد ديزارغ
Gergonne, Joseph-Diaz	جيرجونني ، جوزيف دياز
Golden ratio	نسبة ذهبية
Golden rectangle	مستطيل ذهبي
<b>H</b>	
Harmonic division	تقسيم توافقي
Heron of Alexandria	هيرون الإسكندري
Hexagon	سداسي
<b>I</b>	
Incenter	مركز الدائرة الداخلية
Inequalities	متباينات
Inradius	نصف قطر الدائرة الداخلية للمثلث

Inscribed triangles in circle	مثلثات منشأة داخل دائرة
Isosceles triangle	مثلث متطابق الضلعين
<b>K</b>	
Karl Feuerbach	كارل فيورباخ
<b>L</b>	
Legender, Adrien	لجندر، أدريان
Leonardo of pisa	ليوناردو بيزا
Locus	محل هندسي
Logarithmic spiral	حلزون لوغاريتمي
Lucas numbers	أعداد لوكاس
Lucas, Francois-Edouard- Anatole	لوكاس، إدوارد فرانسوا أناتول
<b>M</b>	
Mathematical induction	استقراء رياضي
Medial triangle	مثلث متوسط
Midline of a triangl	الخط المنتصف للمثلث
Midpoint	نقطة المنتصف
Miquel	مايكل
Moritz Pasch	موريتز باش
<b>N</b>	
Nagel	ناجل
Napoleon	نابوليون
Newton	نيوتن
Nine-point circle	دائرة النقاط التسع

	تسمية
Nomenclature	
<b>O</b>	
Obtuse triangle	مثلث منفرج الزاوية
Orthic triangle	مثلث المواقع من نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث
Orthocenter	نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث
Orthocentric system	نظام تقاطع الارتفاعات
<b>P</b>	
Pappus of Alexandria	بابوس الإسكندري
Parallel	مواز
Parallelogram	متوازي أضلاع
Pascal triangle	مثلث باسكال
Pascal, Blaise	باسكال ، بليز
Pedal triangle	مثلث المواقع
Pentagon	خماسي
Perpendicular bisectors	منصفات عمودية
Perpendiculars	أعمدة
Polygon	مضلع
Poncelet, Jean Victor	بونسيليه ، جان فيكتور
Proportion	تناسب
Proving methods	طرق البرهان
Ptolemy	بطليموس
Pythagoras	فيثاغورس

## Q

Quadrilateral

شكل رباعي

## R

Radical axes

مجاور أساسية

Radius

نصف قطر الدائرة

Ratio of similitude

نسبة التشابه

Reciprocal rectangles

مستطيلات متعاكسة

Redundant set

مجموعة الفائض

Rene Descartes

رينيه ديكارت

Rhombus

معين

Right triangle

مثلث قائم الزاوية

Robert Simson

روبرت سيمسون

## S

Scalene triangle

مثلث مختلف الأضلاع

Secant

قاطع

Sector

قطاع

Segment

قطعة

Semiperimeter

نصف المحيط

Shortest distance

أقصر مسافة

Similarity

تشابه

Similarity of triangles

تشابه المثلثات

Simson line

خط سيمسون

Smogorzhevski

سموجر فيسكي

Square

مربع

Stewart, Matthew

ستيوارت، ماثيو

**T**

Tangent

مماس

Trapezoid

شبه منحرف

**V**

Vertices

رؤوس

Vieta, Franciscus

فيتا، فرانسيسكوس

**W**

William Wallace

وليام والاس