

تلاقي المستقيمات في مثلث

مقدمة

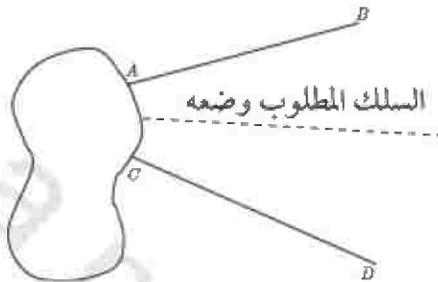
على الرغم من أهمية مفهوم التقاطع في نقطة (أي تقاطع ثلاثة أو أكثر من المستقيمات في نقطة واحدة)، فإن هذا الموضوع لا يأخذ حقه في منهج الهندسة الأساسي؛ وذلك بسبب وجود مفاهيم أخرى ذات أولوية. ولعل الحصول على نتائج سهلة وجميلة حول هذا المفهوم يتطلب المزيد من النظريات التي لا يسمح بها الوقت - عادة - في برنامج الهندسة الدراسي الأولي.

الحالات المألوفة للتقاطع في نقطة مثل المتوسطات، منصفات الزوايا، والارتفاعات في المثلث، تم ذكرها سابقاً. ولكن لم يتم إثباتها في كثير من الأحيان. وإدخال نظريات جديدة قليلة يجعل موضوع التقاطع في نقطة سهلاً جداً، ويفتح أفقاً جديداً في الهندسة الإقليدية.

هذا الفصل يبدأ ببرهان أهمية وضع التقاطع في نقطة، وذلك بمساعدة نظرية مهمة، قدمها جيوفاني شيفا Giovanni Ceva في عام ١٦٧٨ م، وكذلك سنقدم مجموعة متنوعة من العلاقات الشيقة والنظريات، وسترى لاحقاً كيف نوضح ببساطة إثبات بعض النظريات الصعبة السابقة.

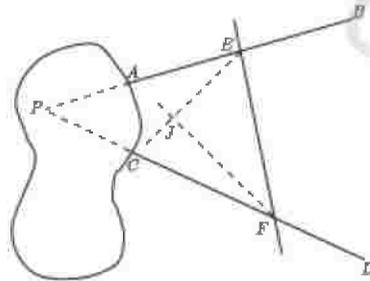
ولأننا نريد أن نوضح أهمية التقاطع في نقطة ، دعونا ندرس المثال التالي
مثال : تم وضع اثنين من الأسلاك المستقيمة داخل منطقة ، فالتقيا في نقطة يصعب
 الوصول إليها (انظر الشكل 1 - 2) .

كيف يمكنك تحديد موقع مناسب لوضع سلك ينصف الزاوية التي شكلها
 السلكان دون لمس هذه المنطقة؟



شكل 1 - 2

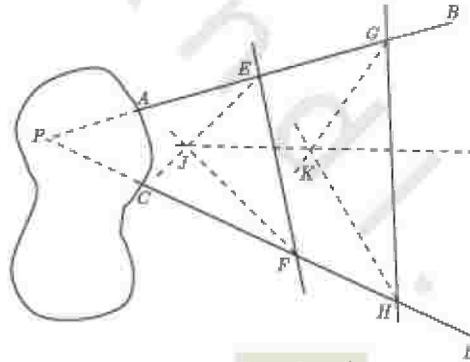
على الرغم من أن هناك طرقاً كثيرة ممكنة لحل هذه المشكلة ، إلا أننا اخترنا الحل التالي
 للسبب الذي سيتضح لاحقاً .



شكل 2 - 2

الحل

لنرسم خطاً مستقيماً يقطع كلاً من $\overline{AB}, \overline{CD}$ في E, F على الترتيب (انظر الشكل 2-2)، وكذلك ننشئ منصفى الزاويتين $\angle AEF, \angle CFE$ ليتقاطعا في J . لنفرض اكمال المثلث PEF . وعليه، فمنصف الزاوية $\angle P$ يمر بالنقطة J (لأن منصفات الزوايا الداخلية للمثلث تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة). لتكرر هذه العملية مع مستقيم ثان وليكن \overline{GH} والذي يقطع $\overline{AB}, \overline{CD}$ في G, H على الترتيب (انظر الشكل 2-3). وبالمثل نصف الزاويتين $\angle AGH, \angle CHG$ بمنصفين يتقاطعان في K ، ومرة أخرى يجب أن تقع النقطة K على منصف الزاوية $\angle P$ ، أي أن منصف الزاوية $\angle P$ تقع عليه النقطتان J, K . وهذا يعني أن النقطتين J, K تحددان موضع الخط المستقيم المطلوب، الذي هو موضع السلك الذي يجب تثبيته. ●



شكل 2-3

هذا الحل يعتمد على فكرة أن منصفات الزوايا في المثلث تتقاطع في نقطة واحدة. وكما أشرنا، فإن موضوع التقاطع في نقطة في المثلث يستحق اهتماماً أكبر في مقرر الهندسة الأساسي الدراسي.

بطريقة سهلة للغاية، سوف نبرهن أن منصفات زوايا المثلث الداخلية تتقاطع في نقطة واحدة، ولكن أولاً يجب أن نؤسس بعض العلاقات المهمة، وعلينا أن نتذكر الأساسيات الهندسية التي نخبرنا أن للمثلث العديد من المراكز والتي منها على سبيل المثال.

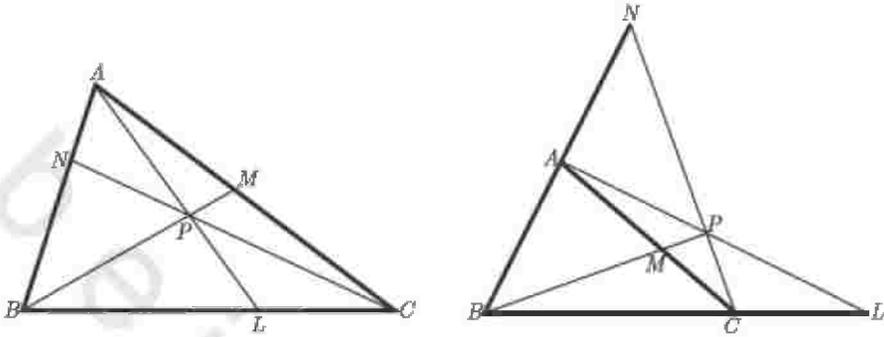
- نقطة تقاطع المتوسطات Centroid - مركز ثقل المثلث.
 - نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث Orthocenter.
 - مركز الدائرة الداخلية للمثلث Incenter. ويتم تعيينه من تقاطع منصفات زوايا المثلث الداخلية .
 - مركز الدائرة المحيطة بالمثلث Circumcenter - ويتم تعيينه من تقاطع المنصفات العمودية لأضلاع المثلث .
- تطبيقات عديدة على مراكز المثلث يتم دراستها في مقرر الهندسة الأساسي ، ويعتمد عليها الطلاب في كثير من الأحيان في التطبيقات العملية التي تعتمد على خاصية التقاطع في نقطة والتي تنتج من النقاط (المراكز) السابقة. سنقدم أحد هذه التطبيقات في بداية هذا الفصل.
- ولأن البراهين التقليدية مرهقة بعض الشيء ، فإن كثيراً من هذه العلاقات تكون مقبولة بدون برهان. بمساعدة نظرية مشهورة قدمها الرياضي الإيطالي جيوفاني شيفا Giovanni Ceva (١٦٤٧ - ١٧٣٤م) والتي تحمل اسمه ، سنستنتج براهين لعلاقات التقاطع في نقطة التي سبق الحديث عنها بالإضافة إلى علاقات عديدة أخرى.

نظرية شيفا Ceva's Theorem

الخطوط المستقيمة الثلاثة المارة برؤوس المثلث ABC لتقطع الأضلاع المقابلة في النقاط L, M, N على الترتيب تتقاطع في نقطة واحدة إذا وفقط إذا كان

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

نظرية 1-2



شكل 4 - 2

لإثبات هذه النظرية ، علينا أن نلاحظ أولاً أن هناك حالتين ممكنتين لتقاطع ثلاثة خطوط مستقيمة تخرج من رؤوس مثلث إلى الأضلاع المقابلة من مثلث (كما بالشكل 4-2). ربما من الأسهل متابعة البرهان مع الرسم الأيسر والتحقق من الخطوات من الرسم على الجهة اليمنى ، وعلى أي حال فإن البرهان التالي يتحقق مع كلا الشكلين. ويحتاج إثبات نظرية شيفا إلى برهانين (أحدهما معكوس للآخر) لأنها علاقة تكافؤ (إذا فقط إذا) ، وستثبت أولاً أنه إذا مرت ثلاثة مستقيمات برؤوس المثلث ABC وقطعت أضلاع المثلث المقابلة في النقاط L, M, N والتقت في نقطة واحدة ، فإن $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$ ، وسنقدم ثلاثة براهين لإثبات ذلك. الأول منها على الرغم أنه ليس أبسطها إلا أنه لا يحتاج أي إنشاء هندسي.

البرهان 1

على الشكل (4-2) ، $\overline{AL}, \overline{BM}, \overline{CN}$ تتقاطع جميعاً في النقطة P ، ولأن

المثلثين ABL, SCL لهما نفس الارتفاع (الخارج من الرأس A) فإن

$$\frac{[\Delta ABL]}{[\Delta ACL]} = \frac{BL}{LC} \quad (I)$$

(رمزنا لمساحة المثلث ABC بالرمز $[\Delta ABC]$). بالمثل

$$\frac{[\Delta PBL]}{[\Delta PCL]} = \frac{BL}{LC} \quad (II)$$

من (I), (II)

$$\frac{[\Delta PBL]}{[\Delta PCL]} = \frac{[\Delta ABL]}{[\Delta ACL]}$$

بتطبيق خاصية التناسب التالية $\left(\frac{w}{x} = \frac{y}{z} = \frac{w-y}{x-z}\right)$ ، نحصل على

$$\frac{BL}{LC} = \frac{[\Delta ABL]}{[\Delta ACL]} = \frac{[\Delta PBL]}{[\Delta PCL]} = \frac{[\Delta ABP]}{[\Delta ACP]} \quad (III)$$

ويتكرر العملية السابقة على \overline{BM} بدلاً من \overline{AL} نحصل على

$$\frac{CM}{MA} = \frac{[\Delta BMC]}{[\Delta BMA]} = \frac{[\Delta PMC]}{[\Delta PMA]}$$

ومنها

$$\frac{CM}{MA} = \frac{[\Delta BMC] - [\Delta PMC]}{[\Delta BMA] - [\Delta PMA]} = \frac{[\Delta BCP]}{[\Delta BAP]} \quad (IV)$$

مرة أخرى ، نكرر نفس العملية على \overline{CN} بدلاً من \overline{AL} لنجد أن

$$\frac{AN}{NB} = \frac{[\Delta ACN]}{[\Delta BCN]} = \frac{[\Delta APN]}{[\Delta BPN]}$$

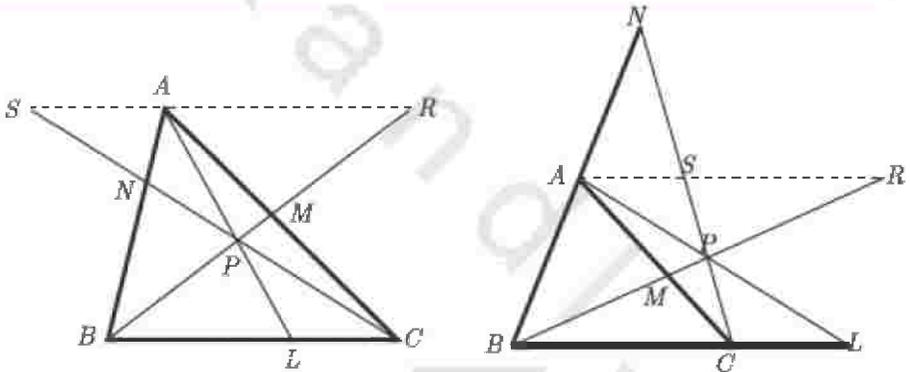
ومنها

$$\frac{AN}{NB} = \frac{[\Delta ACN] - [\Delta APN]}{[\Delta BCN] - [\Delta BPN]} = \frac{[\Delta ACP]}{[\Delta BCP]} \quad (V)$$

بضرب (III)، (IV)، (V) نحصل على المطلوب :

$$\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = \frac{[\Delta ABP]}{[\Delta ACP]} \cdot \frac{[\Delta BCP]}{[\Delta BAP]} \cdot \frac{[\Delta ACP]}{[\Delta BCP]} = 1$$

البرهان II



شكل 2-5

بالعمل على الشكل 2-4 وإضافة \overline{SR} والذي يمر بالنقطة A ويوازي \overline{BC} ويقطع \overline{BM} ، \overline{CN} في R, S على الترتيب، (انظر الشكل 2-5).

الخطوط المتوازية تمكننا من وضع الأزواج التالية من المثلثات المشابهة.

$$\Delta AMR \sim \Delta CMB \Rightarrow \frac{AM}{MC} = \frac{AR}{CB} \quad (I)$$

$$\Delta BNC \sim \Delta ANS \Rightarrow \frac{BN}{AN} = \frac{CB}{SA} \quad (\text{II})$$

$$\Delta CLP \sim \Delta SAP \Rightarrow \frac{CL}{SA} = \frac{LP}{AP} \quad (\text{III})$$

$$\Delta BLP \sim \Delta RAP \Rightarrow \frac{BL}{RA} = \frac{LP}{AP} \quad (\text{IV})$$

من (III)، (IV)، نحصل على $\frac{CL}{SA} = \frac{BL}{RA}$ ، والتي يمكن صياغتها كالتالي :

$$\frac{CL}{BL} = \frac{SA}{RA} \quad (\text{V})$$

بضرب (I)، (II)، (V) نحصل على :

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1 \quad \bullet$$

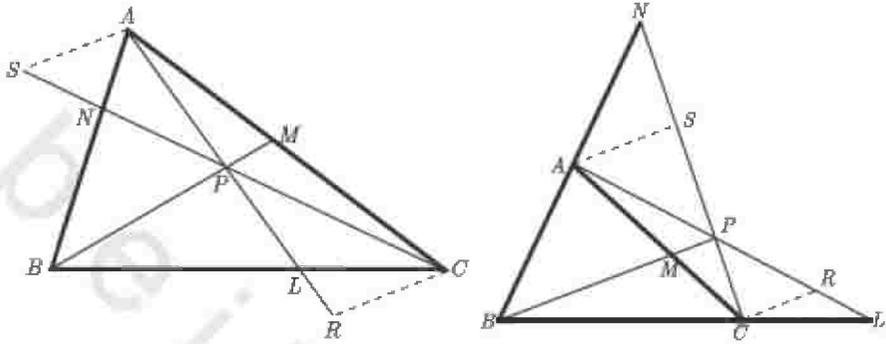
(نفس الاستنتاج الذي وصلنا إليه في البرهان الأول)

البرهان III

بالعمل مرة أخرى على الشكل 4 - 2 وإضافة خطين مستقيمين لكل رسم من الرأسين A, C يوازيان \overline{BP} ، ويقطعان $\overline{CP}, \overline{AP}$ في S, R على الترتيب ، (انظر الشكل 6 - 2) .

$$\Delta ASN \sim \Delta BPN \Rightarrow \frac{AN}{NB} = \frac{AS}{BP} \quad (\text{I})$$

$$\Delta BPL \sim \Delta CRL \Rightarrow \frac{BL}{LC} = \frac{BP}{CR} \quad (\text{II})$$



شكل 2-6

$$\Delta PAM \sim \Delta RAC \Rightarrow \frac{CA}{MA} = \frac{RC}{PM}$$

ويمكننا صياغة العلاقة السابقة على الصورة:

$$CA = \frac{(RC)(MA)}{PM} \quad (\text{III})$$

$$\Delta PCM \sim \Delta SCA \Rightarrow \frac{CM}{CA} = \frac{PM}{AS}$$

كما يمكننا صياغة العلاقة الأخيرة على الصورة:

$$CA = \frac{(AS)(CM)}{PM} \quad (\text{IV})$$

من (III)، (IV)، نحصل على:

$$\frac{(RC)(MA)}{PM} = \frac{(AS)(CM)}{PM}$$

وأخيراً يمكننا كتابة العلاقة

السابقة بعد تبسيطها على الصورة :

$$\frac{CM}{MA} = \frac{RC}{AS} \quad (V)$$

بضرب (I), (II), (V) نحصل على :

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{AS}{BP} \cdot \frac{BP}{CR} \cdot \frac{RC}{AS} = 1 \quad \bullet$$

لإكمال برهان نظرية شيفا علينا أن نثبت عكس ما أثبتناه سابقاً، أي سنثبت الآن أنه إذا كانت الخطوط المستقيمة الخارجة من رؤوس المثلث ABC نحو أضلاعه المقابلة والتي تقطعها في L, M, N على الترتيب تحقق العلاقة $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$ فإن الخطوط المستقيمة الثلاثة تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة.

البرهان

نفرض أن \overline{BM} , \overline{AL} يتقاطعان في النقطة P ، ونرسم \overline{PC} والذي يتقاطع مع \overline{AB} في N' . الآن كل من \overline{AL} , \overline{BM} , $\overline{CN'}$ تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة. وعليه، يمكننا استخدام الجزء الذي أثبتناه في نظرية شيفا سابقاً للوصول إلى أن

$$\frac{AN'}{N'B} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

ولكن من المعطى لدينا

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

إذن $\frac{AN'}{N'B} = \frac{AN}{NB}$ أي أن النقطة N' تنطبق على النقطة N ، وهذا يثبت المطلوب. \bullet

تطبيقات على نظرية شيفا

إن من أفضل الوسائل التي تكشف لنا مدى الاستفادة من نظرية شيفا هي برهنة مشكلة تقاطع القطع المستقيمة المختلفة والتي تواجهنا في الهندسة الأولية . وأبسط هذه التطبيقات هو إثبات تقاطع متوسطات المثلث في نقطة واحدة. ولعل أفضل تقدير لقوة نظرية شيفا هو أن تثبت أن متوسطات المثلث تتقاطع في نقطة واحدة بالطريقة التقليدية وسيكفي أن تقول عند ذلك أنه إثبات طويل جدا ومعقد. وبالمقارنة مع هذا الإثبات المرهق ، فإن الطريقة التي نستخدمها هنا ينبغي أن تثير بعض التشويق حول نظرية شيفا.

تطبيق 1

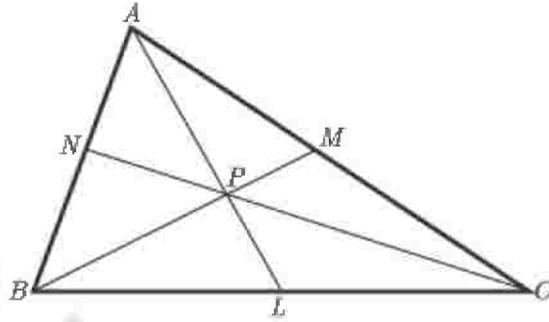
أثبت أن متوسطات المثلث جميعاً تتقاطع في نقطة واحدة.

البرهان

القطع المستقيمة $\overline{AL}, \overline{BM}, \overline{CN}$ متوسطات في ΔABC (انظر الشكل 2-7)، ولذا $AN = NB$ ، $CM = MA$ ، $BL = LC$. بالضرب نحصل على:

$$(AN)(BL)(CM) = (NB)(LC)(MA) \Rightarrow \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

إذن من نظرية شيفا $\overline{AL}, \overline{BM}, \overline{CN}$ تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة . ●



شكل 7 - 2

تطبيق 2

أثبت أن ارتفاعات المثلث جميعاً تتقاطع في نقطة واحدة.

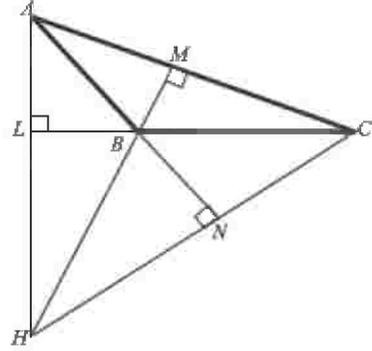
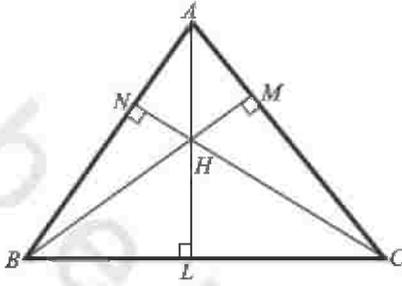
البرهان

في $\triangle ABC$ ، ارتفاعات \overline{AL} , \overline{BM} , \overline{CN} ، يمكن تتبع البرهان التالي في الرسمين الموضحين في الشكل 8 - 2 لأن الإثبات يتحقق للمثلث الحاد الزوايا والمثلث المنفرج الزاوية على السواء .

$$\triangle ANC \sim \triangle AMB \Rightarrow \frac{AN}{MA} = \frac{AC}{AB} \quad (I)$$

$$\triangle BLA \sim \triangle BNC \Rightarrow \frac{BL}{NB} = \frac{AB}{BC} \quad (II)$$

$$\triangle CMB \sim \triangle CLA \Rightarrow \frac{CM}{LC} = \frac{BC}{AC} \quad (III)$$



شكل 8 - 2

بضرب (I), (II), (III) نحصل على :

$$\frac{AN}{MA} \cdot \frac{BL}{NB} \cdot \frac{CM}{LC} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} = 1$$

إذن من نظرية شيفا ، ارتفاعات المثلث تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة ●.

إثبات أن منصفات زوايا المثلث تتقاطع في نقطة واحدة تم تركه كتمرين ،

والبرهان التالي سيساعدك في حله.

تطبيق 3

أثبت أن المنصف الداخلي لأي زاوية في مثلث غير متطابق الضلعين يتقاطع في

نقطة واحدة مع المنصفين الخارجيين للزاويتين الأخرين .

البرهان

في ΔABC ، \overline{AL} ينصف $\angle BAC$ ويقطع \overline{BC} في L ، \overline{BM} منصف

خارجي للزاوية $\angle ABE$ ويقطع \overline{AC} في M ، \overline{CN} منصف خارجي للزاوية

$\angle ACF$ ويقطع \overline{AB} في N (انظر الشكل 9 - 2).

المنصف الخارجي أيضاً يقسم الضلع الذي يقطعه إلى جزأين متناسبين مع الضلعين الباقين في المثلث ، وهذه الخاصية تعطينا التناسبين التاليين :

للمنصف \overline{BM} :

$$\frac{CM}{MA} = \frac{BC}{AB} \quad (II)$$

للمنصف \overline{CN} :

$$\frac{AN}{NB} = \frac{AC}{BC} \quad (III)$$

بضرب (I)، (II)، (III) نحصل على :

$$\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AC}{BC} = 1$$

من نظرية شيفا نستطيع استنتاج أن \overline{AL} ، \overline{BM} ، \overline{CN} تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة. ●
في بعض الأحيان ، قد يأتي سؤال التقاطع في نقطة بصورة غير مباشرة ، كما في التطبيق التالي.

تطبيق 4

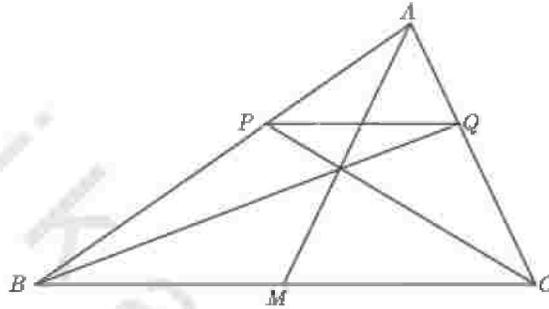
في ΔABC ، $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ويقطع \overline{AB} ، \overline{AC} في P ، Q على الترتيب (انظر الشكل 10 - 2). أثبت أن يتقاطعان في نقطة تقع على المتوسط \overline{AM} .

البرهان

لأن $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ، فلدينا :

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \Rightarrow \frac{AP}{PB} \cdot \frac{QC}{AQ} = 1 \quad (I)$$

ولأن \overline{AM} متوسط في المثلث، إذن $BM = MC$ أو



شكل 10 - 2

$$\frac{BM}{MC} = 1 \quad (II)$$

فبضرب (I) و (II) نحصل على:

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{QC}{AQ} \cdot \frac{BM}{MC} = 1$$

إذن، من نظرية شيفا $\overline{AM}, \overline{QB}, \overline{PC}$ تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة، أو

● $\overline{PC}, \overline{QB}$ يتقاطعان في نقطة تقع على المتوسط \overline{AM} .

حتى هذه اللحظة فإن جميع التطبيقات السابقة احتاجت أن تثبت التقاطع في

نقطة، ولكن التطبيق التالي سيوضح استخداماً مختلفاً لنظرية شيفا.

تطبيق 5

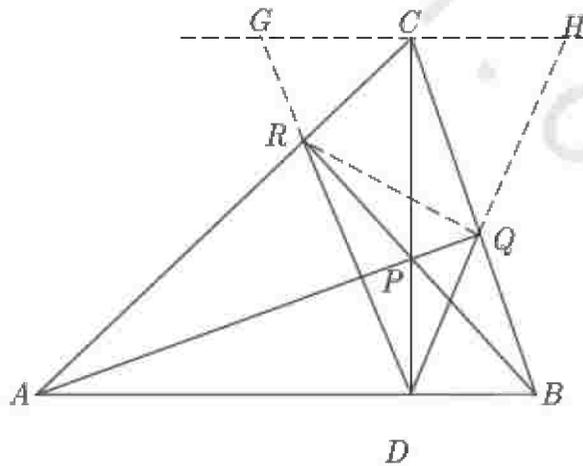
في ΔABC ، \overline{CD} ارتفاع على \overline{AB} ، P أي نقطة تقع على $\overline{AP} \cdot \overline{DC}$ تقطع \overline{BC} في Q ، \overline{BP} تقطع \overline{AC} في R (انظر الشكل 11-2) . أثبت أن $\angle RDC \cong \angle QDC$

البرهان

نرسم \overline{DR} ، \overline{DQ} يقطعان الخط المستقيم المار بالنقطة C والموازي للضلع \overline{AB} في G ، H على الترتيب لنجد أن

$$\Delta CGR \sim \Delta ADR \Rightarrow \frac{CR}{RA} = \frac{GC}{AD} \quad (I)$$

$$\Delta BDQ \sim \Delta CHQ \Rightarrow \frac{BQ}{QC} = \frac{DB}{CH} \quad (II)$$



والآن سنطبق نظرية شيفا على ΔABC لنحصل على

$$\frac{CR}{RA} \cdot \frac{AD}{DB} \cdot \frac{BQ}{QC} = 1 \quad (\text{III})$$

بالتعويض من (I), (II), (III) :

$$\frac{GC}{AD} \cdot \frac{AD}{DB} \cdot \frac{DB}{CH} = 1 \Rightarrow \frac{GC}{CH} = 1$$

أي أن $GC = CH$ ، إذن \overline{CD} هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة \overline{GH} ، وعليه

فإن $\Delta GCD \cong \Delta HCD$ ومنه فإن $\angle RDC \cong \angle QDC$.

لقد رأينا في التطبيقات السابقة كيف يسرت لنا نظرية شيفا إثبات النظريات التي كان إثباتها معقداً. ومرة أخرى ، توضح لنا نظرية شيفا أهميتها في مساعدتنا في إثبات نقطة تقاطع أخرى شيقة في المثلث تسمى نقطة جيرجون Gergonne point

نقطة جيرجون Gergonne point

قدم الرياضي الفرنسي جوزيف - دياز جيرجون Joseph-Diaz Gergonne (١٧٧١ - ١٨٥٩م) نقطة تقاطع رائعة في المثلث. ويحتل جيرجون مكانة متميزة في تاريخ الرياضيات ، وقد بدأت شهرته عام ١٨١٠م عندما أسس مجلة الرياضيات البحثية والتي كانت تسمى "دوريات الرياضيات البحثية والتطبيقية" Annales des mathematiques pures et appliques ، وكانت تصدر شهرياً حتى عام ١٨٣٢م ، وعرفت باسم مجلة جيرجون. وأثناء صدور المجلة قدم جيرجون حوالى مائتي بحث ومقال وخاصة في الهندسة. وقد لعبت مجلة جيرجون دوراً مهماً في تأسيس الهندسة الإسقاطية والهندسة الجبرية ، وأعطت الفرصة للعقول العظيمة في ذلك الوقت لتبادل المعلومات.

وسندرس هنا نظرية بسيطة نوعاً ما قدمها جيرجون حول التقاطع في نقطة،
ومن السهل إثباتها بنظرية شيفا.

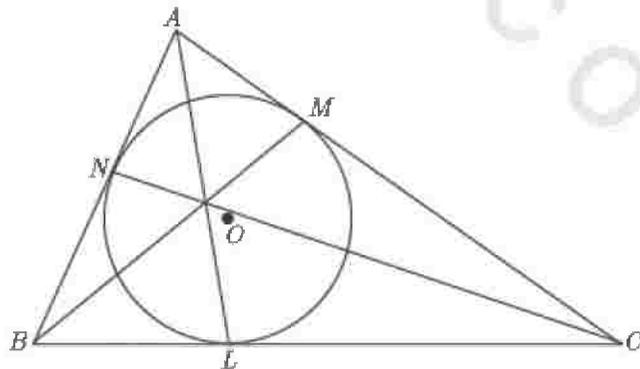
الخطوط المستقيمة المارة برؤوس المثلث ونقاط تماس الدائرة الداخلية له الواقعة على أضلاع المثلث المقابلة لكل رأس تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة. (هذه النقطة يطلق عليها اسم نقطة جيرجون Gergonne point للمثلث).

نظرية 2-2

البرهان

الدائرة O تمس أضلاع المثلث $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ في النقاط N, M, L على الترتيب (انظر الشكل 12 - 2). ومن ذلك نستنتج المتساويات $AN = AM, BL = BN, CM = CL$ والتي يمكن صياغتها على الصورة:

$$\frac{AN}{AM} = 1, \frac{BL}{BN} = 1, \frac{CM}{CL} = 1$$



شكل 2 - 12

ويضرب النسب الثلاث السابقة ، نحصل على :

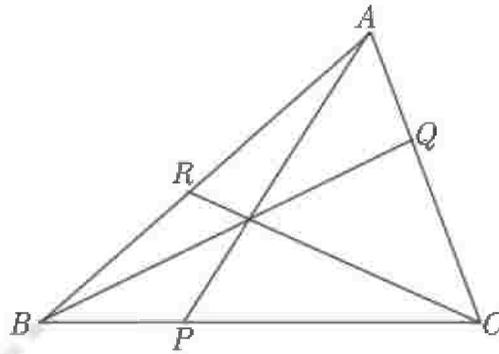
$$\frac{AN}{AM} \cdot \frac{BL}{BN} \cdot \frac{CM}{CL} = 1 \Leftrightarrow \frac{AN}{BN} \cdot \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CM}{AM} = 1$$

من نظرية شيفا ، المتساوية السابقة تؤدي إلى أن $\overline{AL}, \overline{BM}, \overline{CN}$ تتقاطع في نقطة واحدة هي نقطة جيرجون للمثلث ABC . ●

تدريبات

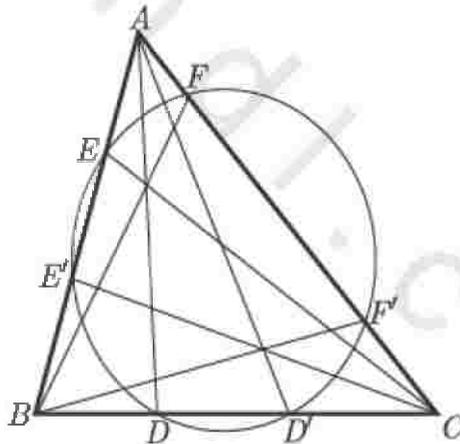
1. أثبت أن منصفات زوايا المثلث الداخلية تتقاطع في نقطة واحدة.
2. تقع النقطة P على الضلع \overline{BC} بحيث $AB + BP = AC + CP$ ، وتقع النقطة Q على الضلع \overline{AC} بحيث $BC + CQ = AB + AQ$ ، وكذلك تقع النقطة R على الضلع \overline{AB} بحيث $AB + BP = AC + CP$. أثبت أن $\overline{AP}, \overline{BQ}, \overline{CR}$ تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة. (انظر الشكل 13-2) . (تُعرف نقطة التقاطع هذه بنقطة ناجل * Nagel point للمثلث ABC).

* اكتشفها ناجل C. H. Nagel (١٨٠٣ - ١٨٨٢ م) ، وهذه النقطة أيضاً يمكن وصفها على أنها نقطة تقاطع المستقيمات المارة برؤوس مثلث ونقاط تماس الدوائر الخارجية للمثلث الواقعة على الأضلاع المقابلة لها في المثلث (الدائرة الخارجية للمثلث هي الدائرة التي تمس أحد أضلاع المثلث من الخارج وتمس امتداد الضلعين الآخرين) .



شكل 2-13

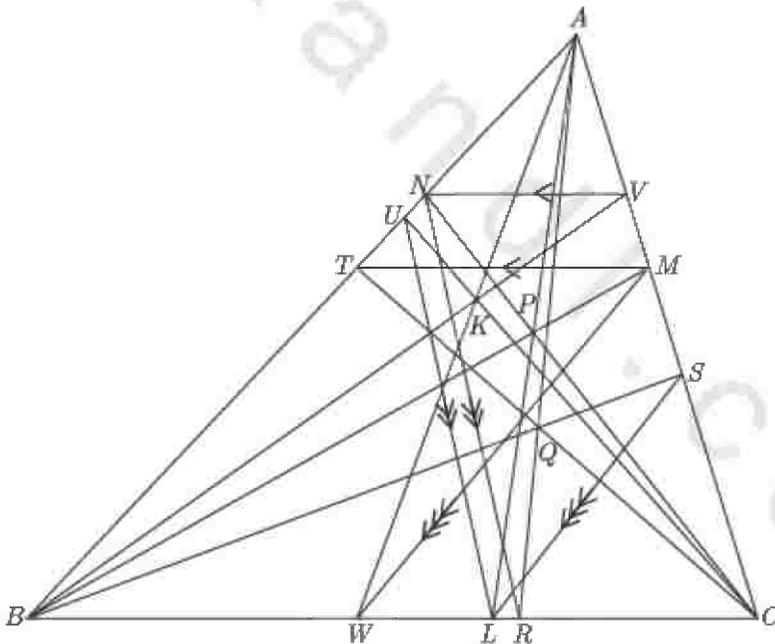
3. على الشكل (2-14)، المثلث ABC يقطع الدائرة في النقاط E, E', D, D', F, F' . أثبت أنه إذا تقاطع كل من AD, BF, CE في نقطة واحدة، فإن AD', BF', CE' تتقاطع هي الأخرى في نقطة واحدة.



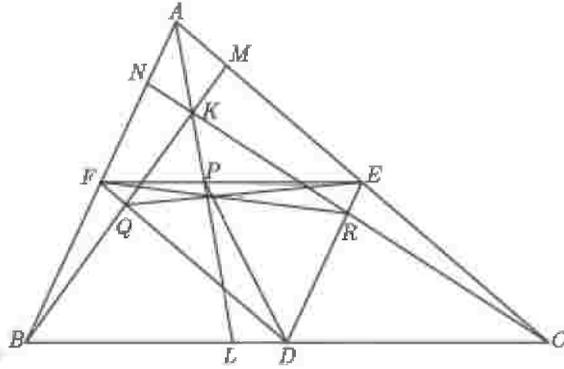
شكل 2-14

4. في المثلث ABC (الشكل 2-15)، $\overline{AL}, \overline{BM}, \overline{CN}$ تتقاطع في النقطة P . النقاط R, S, T تقع على $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ على الترتيب، بحيث $\overline{NR} \parallel \overline{AC}$ ، $\overline{LS} \parallel \overline{AB}$ ، $\overline{MT} \parallel \overline{BC}$. أثبت أن $\overline{AR}, \overline{BS}, \overline{CT}$ تتقاطع في نقطة (عند النقطة Q).

5. في المثلث ABC (الشكل 2-15) تتقاطع $\overline{AL}, \overline{BM}, \overline{CN}$ في النقطة P . النقاط U, V, W تقع على $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ على الترتيب، بحيث $\overline{MW} \parallel \overline{AB}$ ، $\overline{LU} \parallel \overline{AC}$ ، $\overline{NV} \parallel \overline{BC}$. أثبت أن $\overline{AW}, \overline{BV}, \overline{CU}$ تتقاطع في نقطة (عند النقطة K).
6. في المثلث ABC (الشكل 2-16) تتقاطع $\overline{AL}, \overline{BM}, \overline{CN}$ في النقطة K . النقاط L, M, N تقع على $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ على الترتيب، والنقاط P, R, Q منتصفات $\overline{AL}, \overline{CN}, \overline{BM}$. أثبت أن $\overline{DP}, \overline{EQ}, \overline{FR}$ تتقاطع في نقطة إذا كانت النقاط D, E, F منتصفات $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ على الترتيب.

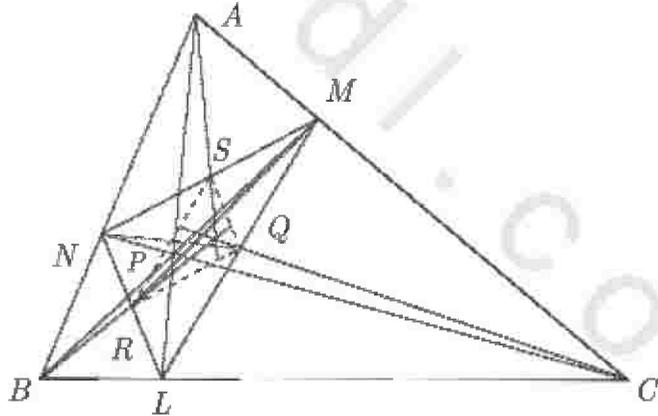


شكل 2-15



شكل 2-16

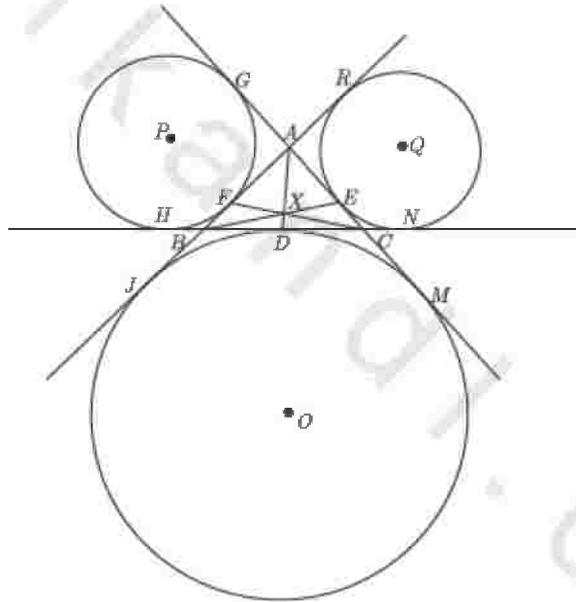
7. في المثلث ABC (الشكل 2-17) $\overline{AL}, \overline{BM}, \overline{CN}$ تتقاطع في النقطة P . التقاط S, Q, R منتصفات $\overline{MN}, \overline{ML}, \overline{NL}$. أثبت أن $\overline{AS}, \overline{BR}, \overline{CQ}$ تتقاطع في نقطة .



شكل 2-17

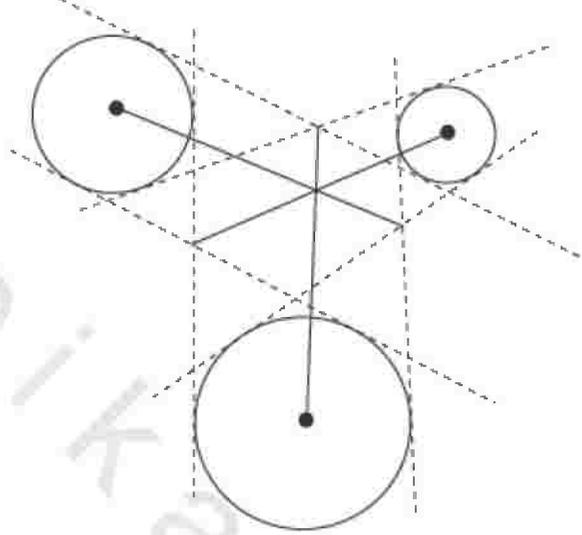
8. في المثلث ABC (الشكل 2-17)، $\overline{AL}, \overline{BM}, \overline{CN}$ تتقاطع في النقطة P . النقاط S, Q, R تقع على $\overline{MN}, \overline{ML}, \overline{NL}$ على الترتيب. إذا تقاطعت $\overline{LS}, \overline{MR}, \overline{NQ}$ في نقطة واحدة، فاثبت أن $\overline{AS}, \overline{BR}, \overline{CQ}$ تتقاطع في نقطة.

9. الدوائر P, O, Q خارجية بالنسبة للمثلث ABC (أي تماس أحد أضلاعه وامتداد الضلعين الآخرين)، وتمس أضلاعه في النقاط الموضحة بالشكل 2-18. أثبت أن $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ تتقاطع في نقطة واحدة.



شكل 2-18

10. ثلاث دوائر مختلفة غير متداخلة ولا متقاطعة، يصل بين كل دائرتين مشني مشني مماسان خارجيان مشتركين يتقاطعان في نقطة (كما في الشكل 2-19). أثبت أن المستقيمات التي تمر بمراكز هذه الدوائر ونقاط تقاطع المماسات تتقاطع في نقطة واحدة.



شكل 19 - 2