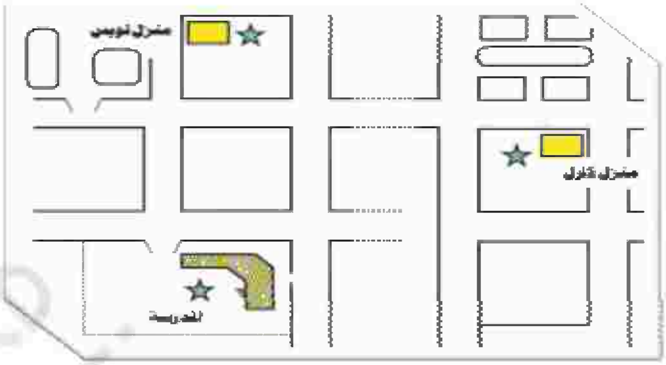
الفصل الرابع

نقاط متماثلة في المثلث

مقدمة

لنفرض أنك وأحد أصدقائك تخططون لإنشاء ملقم كمبيوتر يعمل عن بعد لتخزين المعلومات من كمبيوترك الخاص وكمبيوتر صديقك والكمبيوتر الخاص بالمدرسة ، نلاحظ بسهولة أن مواقع هذه الأجهزة تمثل مثلثاً ، ولنفرض أن أي زاوية من زواياه لا تزيد عن 120°. حاول باستخدام الخريطة المرفقة (انظر الشكل $0-4$) أن تجد موقعاً أو نقطة مناسبة لهذا الملقم بحيث تكون المسافة بينه و بين كل جهاز كمبيوتر من الثلاثة أقل ما يمكن ، وسوف نطلق على هذه النقطة " نقطة المسافة الصغرى " minimum distance point . تُرى كيف نجد هذه النقطة ؟

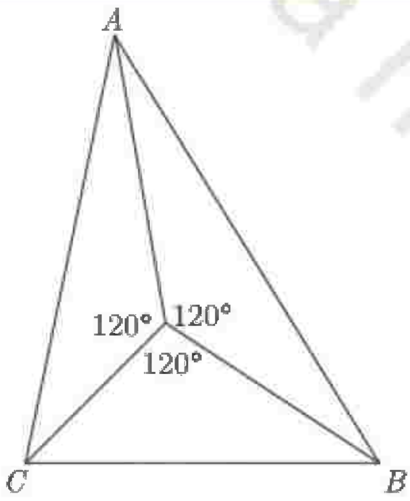
في هذا الفصل سوف نطور بعض النظريات التي ستمكننا من حل هذه المشكلة ، وأثناء ذلك سوف نواجه عدداً من النظريات الشيقة والتي تلقي الضوء على بعض الخواص الساحرة للمثلثات.



شكل 0 – 4

نقطة تساوي الزوايا Equiangular point

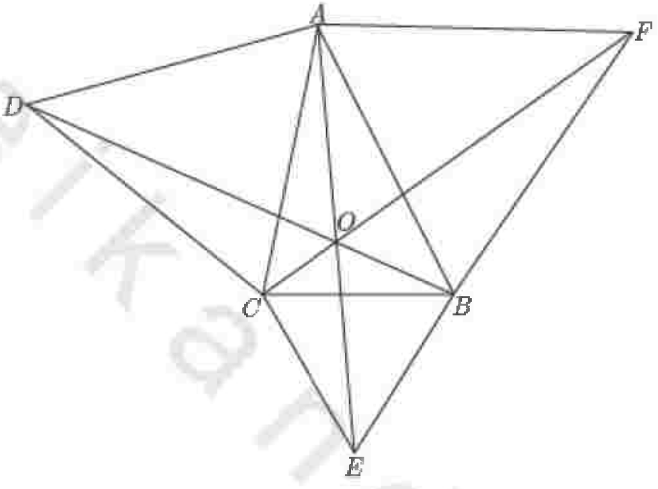
تُرى كيف لنا أن نحدد النقطة التي تتطابق حولها الزوايا الناتجة من الأشعة الخارجة منها إلى رؤوس المثلث ؟ دعونا نحدد هذه النقطة (انظر الشكل 1 – 4) .



شكل 1 – 4

ستكون أول خطواتنا لإيجاد هذه النقطة ذات الخاصية المهمة هو إنشاء مثلثات متطابقة الأضلاع على كل ضلع من أضلاع المثلث من الخارج، ثم قطعاً مستقيمة تصل بين كل رأس خارجية من هذه المثلثات بالرأس المقابلة لها من المثلث الأصلي (انظر الشكل 2 – 4) .

وتقدم النظرية 1 – 4 الخاصية المدهشة للمستقيمات الثلاثة، وبعد إثبات هذه الخاصية سنعود لمسألتنا الأصلية.



شكل 2 – 4

نظرية 4–1	القطع المستقيمة الواصلة بين رؤوس مثلث والرؤوس الخارجية للمثلثات المتطابقة الأضلاع المنشأة على أضلاع هذا المثلث من الخارج متطابقة.

خطة البرهان

أثبت أن $\overline{DB} \cong \overline{AE}$ ، $\overline{AE} \cong \overline{CF}$ عن طريق إثبات أن $\Delta DCB \cong \Delta ACE$ ، ومن ثم أثبت أن $\Delta CBF \cong \Delta EBA$ ●

البرهان

لأن $m\angle DCA = m\angle ECB = 60°$ ، $m\angle DCB = m\angle ACE$ (بالإضافة).

وأيضا ، لأن لدينا مثلثات متطابقة الأضلاع ؛ فإن $DC = AC$ ، وكذلك $CB = CE$ ، إذن $\Delta ACB \cong \Delta ACE\left(SAS\right)$ ، وهذا يثبت لنا أن : $\overline{DB} \cong \overline{AE}$ ، وبنفس الطريقة نستطيع إثبات أن $\Delta EBA \cong \Delta CBF$. وهذا يمكننا من إثبات أن $\overline{AE} \cong \overline{CF}$ ومنه $\overline{DB} \cong \overline{AE} \cong \overline{CF}$. ●

من خلال الشكل $2-4$ ، لعلك لاحظت أن $\overline{DB}, \overline{AE}, \overline{CF}$ تتقاطع جميعها في نقطة واحدة ، وهذه الملاحظة تعطينا النظرية التالية .

نظرية $2-4$	القطع المستقيمة الواصلة بين رؤوس مثلث والرؤوس الخارجية للمثلثات المتطابقة الأضلاع المنشأة على أضلاع هذا المثلث من الخارج تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة. (تسمى هذه النقطة نقطة فيرما* Fermat Point للمثلث)

خطة البرهان

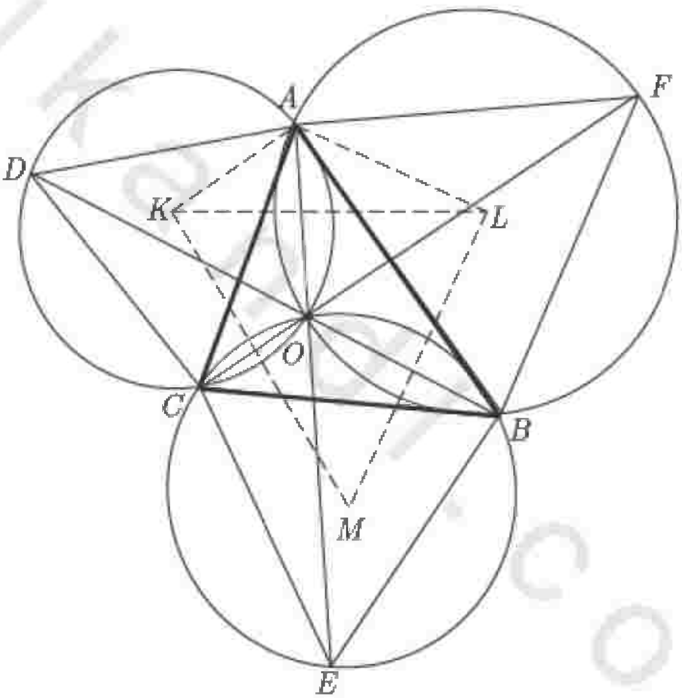
أنشئ الدائرة المحيطة لكل مثلث من المثلثات الثلاثة ، وحاول أن تثبت أن الدوائر الثلاثة تتقاطع في النقطة O. القطع المستقيمة الست الخارجة من النقطة O والواصلة إلى النقاط A, B, C, D, E, F ستعين المستقيمات الثلاثة المتقاطعة في نقطة واحدة. ●

* سميت باسم الرياضي الفرنسي بيير دي فيرما Pierre de Fermmat (١٦٠١-١٦٦٥).

البرهان

لنفرض أن مراكز الدوائر الثلاث المحيطة بالمثلثات المتطابقة الأضلاع $\triangle ACD, \triangle ABF, \triangle BCE$ هي K, L, M (انظر الشكل $3-4$). الدائرتان K, L تتقاطعان في النقطتين O, A.

$$m\angle AOC = \frac{1}{2}\left(m\widehat{ADC}\right), m\widehat{ADC} = 240^\circ \Rightarrow m\angle AOC = 120^\circ$$



شكل $3-4$

بالمثل $$m\angle AOB = \frac{1}{2}\left(m\widehat{AFB}\right) = 120^\circ \Rightarrow m\widehat{COB} = 120$$

لأن مجمـــوع قياســـات الزوايـــا المتجمعـــة حـــول نقطـــة = $360°$). ولأن $m\widehat{CEB} = 240°$ فإن $\angle COB$ زاوية محيطية والنقطة O تقع على الدائرة M. ومن هذا نستنتج أن الدوائر الثلاث تتقاطع في نقطة واحدة هي النقطة O.

الآن نصل النقطة O بكل من النقاط A, B, C, D, E, F. وحيث إن :

$m\angle DOA = m\angle AOF = m\angle FOB = 60°$ ، إذن النقاط B, O, D تقع على مستقيم واحد $\overleftrightarrow{DOB}$. بالمثل بالنسبة لكل من $\overleftrightarrow{COF}, \overleftrightarrow{AOE}$. وهذا يثبت أن $\overline{DB}, \overline{AE}, \overline{CF}$ تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة هي O. (وهذه النقطة هي أيضاً نقطة تقاطع الدوائر الثلاث K, L, M. ●

والآن هل تستطيع أن تعين موضع النقطة داخل المثلث ABC بحيث تكون الزوايا التي تواجه أضلاع المثلث الثلاثة والمتجمعة حولها متطابقة ؟

لعلك تعرف الآن أنها النقطة O والتي تسمى نقطة تساوي الزوايا Equiangular point للمثلث ABC وذلك لأن :

$$m\angle AOB = m\angle AOC = m\angle BOC = 120°.$$

وقبل أن نكمل بحثنا في موضوع نقطة تساوي الزوايا والتي سوف نعود إليها مرة أخرى خلال هذا الفصل ، دعونا نستفد من النظرية التالية ، والتي تشير المصادر بأن الذي وضعها هو نابليون بونابرت Napoleon Bonaparte وتظهر هذه النظرية بوضوح موهبته الرياضية والتي كان من نتائجها أن يطلق البعض على المثلث المتطابق الأضلاع مثلث نابليون Napoleon triangle.

نظرية 4-3	مراكز الدوائر المحيطة بالمثلثات المتطابقة الأضلاع المنشأة على أضلاع مثلث من الخارج هي رؤوس مثلث متطابق الأضلاع .

خطة البرهان

أثبت أن أضلاع ΔKLM تتناسب مع $\overline{AE}, \overline{BD}, \overline{CF}$ (أثبتنا سابقاً أن $\overline{DB} \cong \overline{AE} \cong \overline{CF}$). ●

البرهان

في المثلث DAC (انظر الشكل $3-4$)، النقطة K (نقطة تقاطع المتوسطات) تقسم المتوسط أو العمود (لأن المثلث متطابق الأضلاع) بنسبة $2:1$ من جهة الرأس، أي أن AK يساوي ثلثي المتوسط، وباستخدام العلاقات في المثلث الثلاثيني الستيني نحصل على $AC : AK = \sqrt{3} : 1$.

ولأن $m\angle KAC = m\angle LAF = 30°$، وبإضافة $m\angle CAL$ نحصل على $m\angle KAL = m\angle CAF$، وبالتالي نستنتج أن $\Delta KAL \sim \Delta CAF$ والذي يؤدي إلى أن:

$$CF : KL = CA : AK = \sqrt{3} : 1.$$

بالمثل يمكننا إثبات أن:

$$DB : KM = \sqrt{3} : 1, AE : ML = \sqrt{3} : 1$$

$$\Rightarrow DB : KM = AE : ML = CF : KL$$

ولكننا أثبتنا سابقاً أن: $DB = AE = CF$ وهذا يقود إلى أن $KM = ML = KL$، أي أن ΔKML متطابق الأضلاع. ●

من خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع

لعلنا قبل العودة لمشكلة أين يضع لويس وكارل ملقم جهاز الكمبيوتر الخاص بهم، نحتاج لحقيقة مدهشة أخرى عن المثلث المتطابق الأضلاع.

لنرسم مثلثاً كبيراً متطابق الأضلاع، ونختار أي نقطة تقع داخله، ثم نقيس البعد بين هذه النقطة وكل ضلع من أضلاع المثلث الثلاثة، ونسجل مجموع هذه

الأبعاد. ونكرر هذه الخطوات مع نقطة أخرى تقع داخل نفس المثلث، ونقارن بين المجموعين في كل حالة. ثم لنقس طول ارتفاع المثلث المتطابق الأضلاع.

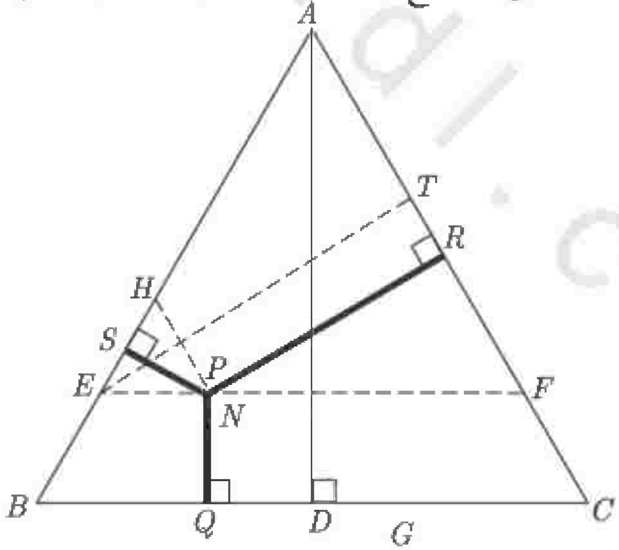
تُرى ما نتيجة المقارنة بين المجموعين وطول ارتفاع المثلث المتطابق الأضلاع ؟ للإجابة عن هذا السؤال نقترح لك النظرية التالية.

نظرية 4-4 مجموع المسافات العمودية من نقطة داخل مثلث متطابق الأضلاع والمرسومة على أضلاع هذا المثلث من الداخل تساوي مقدار ثابت (يساوي طول ارتفاع المثلث).

سنقدم لهذه النظرية المدهشة برهانين مختلفين، الأول منهما سنجزئ ارتفاع المثلث ونقارن بين هذه الأجزاء و المسافات العمودية المرسومة من النقطة إلى أضلاع المثلث. أما البرهان الثاني فسنستخدم فيه مقارنة المساحات.

البرهان *I*

في المثلث المتطابق الأضلاع ABC ، $\overline{PR} \perp \overline{AC}, \overline{PQ} \perp \overline{BC}, \overline{PS} \perp \overline{AB}, \overline{AD} \perp \overline{BC}$.



شكل 4 – 4

نرسم مستقيماً يمر بالنقطة P ويوازي $\overline{BC}$ ويقطع كلاً من $\overline{AD}, \overline{AB}, \overline{AC}$ في النقاط G, E, F على الترتيب (انظر الشكل $4 - 4$).

لأن الشكل $PGDQ$ مستطيل فإن:

$$PQ = GD$$

لنرسم أيضاً $\overline{ET} \perp \overline{AC}$ ، ولأن المثلث AEF متطابق الأضلاع، فإن $\overline{AG} \cong \overline{ET}$ (جميع ارتفاعات المثلث المتطابق الأضلاع متطابقة). وأخيراً، لنرسم $\overline{PH} \parallel \overline{AC}$ ليلاقي $\overline{ET}$ في N فنحصل على:

$$\overline{NT} \cong \overline{PR}$$

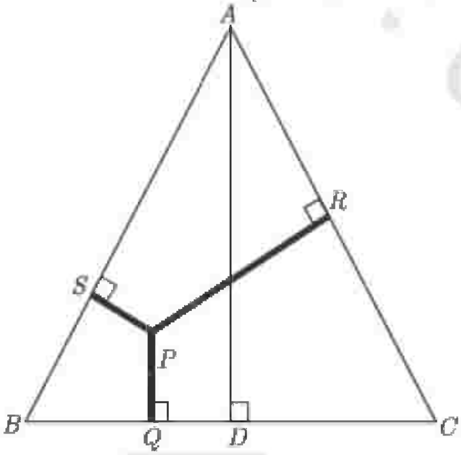
وحيث إن ΔEHP متطابق الأضلاع وارتفاعيه $\overline{PS}, \overline{EN}$ متطابقان فإن :

$$PS + PR = ET = AG$$

ولكن $PQ = GD$ ؛ إذن، $AD = AG + GD = PS + PR + PQ$ (ثابت لأي مثلث). ●

البرهان II

في المثلث المتطابق الأضلاع ABC ، $\overline{PR} \perp \overline{AC}, \overline{PQ} \perp \overline{BC}, \overline{PS} \perp \overline{AB}, \overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، نصل كلاً من $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}$ (انظر الشكل $4 - 5$). ومنه نجد أن :



شكل $4 - 5$

$$\left[\Delta ABC\right]= \left[\Delta ABP\right]+ \left[\Delta PBC\right]+ \left[\Delta CPA\right]$$
$$=\frac{1}{2}(AB)(PS)+\frac{1}{2}(BC)(PQ)+\frac{1}{2}(AC)(PR)$$

ولكن $AB = BC = AC$ ؛ إذن :

$$\left[\Delta ABC\right]=\frac{1}{2}(BC)\left[(PS)+(PQ)+(PR)\right]$$

ولكن $\left[\Delta ABC\right]=\frac{1}{2}(BC)(AD)$ ، ومن ذلك نجد أن :

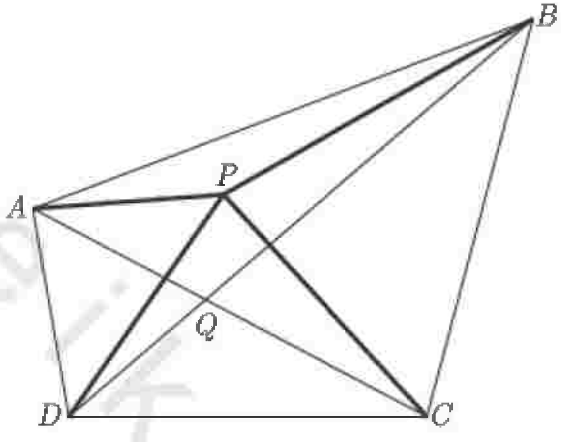
$AD = PS + PR + PQ$ (ثابت لأي مثلث). ●

نقطة المسافة الصغرى

مرة أخرى قبل أن نحل مشكلتنا الأصلية وهي العثور على النقطة التي تبعد أقل مسافة ممكنة عن أضلاع مثلث من الداخل، دعونا نطرح السؤال التالي : تُرى في أي شكل رباعي، ما النقطة التي يكون عندها مجموع الأبعاد بين هذه النقطة ورؤوس الرباعي من الداخل أقل ما يمكن ؟

لعل تخمينك المبدئي يكون صحيحاً عندما تظن أن هذه النقطة هي نقطة تقاطع قطري هذا الرباعي، والتي نطلق عليها نقطة المسافة الصغرى في الشكل الرباعي، وللتحقق من صحة هذا التخمين دعونا نفترض نقطة أخرى داخل الرباعي غير نقطة تقاطع القطرين ونحصل على مجموع المسافات بينها وبين رؤوسه ونقارنها بمجموع المسافات بين نقطة تقاطع القطرين والرؤوس. وذلك كما يلي :

ليكن $ABCD$ شكلاً رباعياً يتقاطع قطراه $\overline{AC}, \overline{BD}$ في النقطة Q ، ولتكن P نقطة اختيارية داخل الرباعي (لا تنطبق على Q)، (انظر الشكل $6-4$).



شكل $4-6$

من متباينة المثلث (مجموع أي ضلعين في المثلث أكبر من الضلع الثالث) ؛ إذن :

$$PA+PC>QA+QC,\, PB+PD>QB+QD$$

بالجمع نحصل على :

$$PA+PC+PB+PD>QA+QC+QB+QD$$

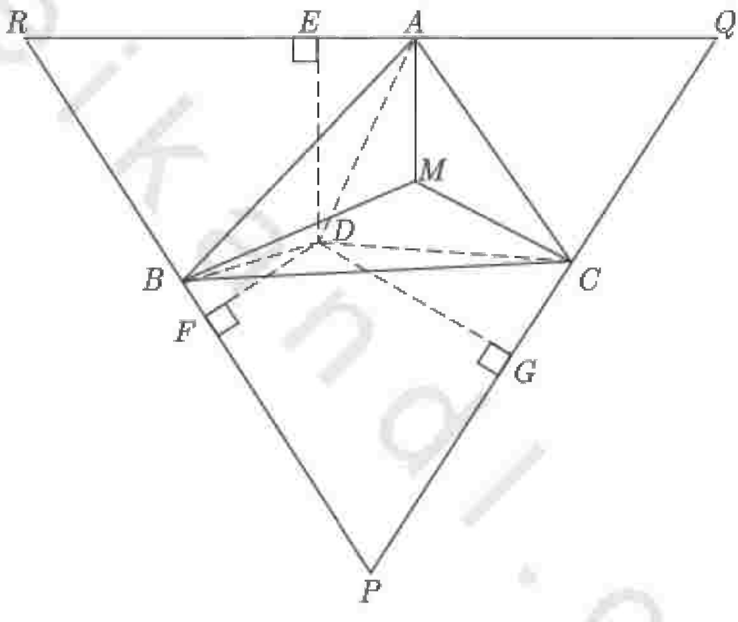
أي أن مجموع المسافات من نقطة تقاطع قطري أي شكل رباعي إلى رؤوس هذا الشكل أقل من مجموع المسافات بين أي نقطة أخرى داخله ورؤوسه. وهذا يمهد لنا الطريق لتقديم النظرية.

نظرية 4–5 نقطة المسافة الصغرى في الشكل الرباعي هي نقطة تقاطع قطريه.

من الطبيعي أن نتساءل أين يجب أن تقع النقطة التي تكون مجموع المسافات منها إلى رؤوس المثلث أقل ما يمكن. وهذا على وجه التحديد ما تطرحه المشكلة التي تصاحبنا من أول الفصل، والتي ربما نسعى الآن للبحث عن نقطة متماثلة لما تم في

حالة الشكل الرباعي ولكن داخل المثلث. بالطبع سنضع في عين الاعتبار نقطة تساوي الزوايا والتي هي بالتأكيد تقدم بعض التماثل داخل المثلث.

ليكن ΔABC ليس به زاوية أكبر من $120°$ ، ولتكن M أي نقطة تقع داخل هذا المثلث بحيث $m\angle AMB = m\angle BMC = m\angle AMC = 120°$. وكما في الشكل $(7-4)$ ،



شكل $7-4$

لنرسم مستقيمات تمر بـ A, B, C وتكون عمودية على $\overline{AM}, \overline{BM}, \overline{CM}$ على الترتيب، وتتقاطع في ثلاث نقاط هي رؤوس المثلث المتطابق الأضلاع PQR (لإثبات أن ΔPQR متطابق الأضلاع، لاحظ أن قياس كل زاوية من زواياه تساوي $60°$ وذلك ناتج من أن الرباعي $AMBR$ – على سبيل المثال – فيه $m\angle AMB = 120°$ و $m\angle MAR = m\angle MBR = 90°$ وبالتالي فإن:

$(m\angle ARB = 60^\circ$

لتكن الآن D أي نقطة تقع داخل ΔABC ، وبالتالي فمن نظرية $(4-4)$ فإن :

$$MA + MB + MC = DE + DF + DG$$

(حيث $\overline{DE}, \overline{DF}, \overline{DG}$ أعمدة على $\overline{REQ}, \overline{RBP}, \overline{QGP}$ على الترتيب)، ولكن

$$DE + DF + DG < DA + DB + DC$$

(أقصر بعد بين مستقيم ونقطة تقع خارجة هو البعد العمودي بين هذه النقطة والمستقيم). بالتعويض نجد $MA + MB + MC < DA + DB + DC$.

ربما تتساءل لماذا وضعنا شرط أن المثلث الذي اخترناه لا يجب أن تزيد أي زاوية من زواياه عن 120° ، ولكنك إذا حاولت أن ترسم النقطة M في مثلث إحدى زواياه على سبيل المثال 150° فإنك ستعرف لماذا وضعنا هذا الشرط.

نظرية 4-6 نقطة المسافة الصغرى في مثلث جميع زواياه أقل من 120° ، هي النقطة متساوية الزوايا (أي النقطة التي تضم زوايا متطابقة حولها وتواجه أضلاع المثلث).

نحن الآن مستعدون لحل المشكلة الخاصة باختيار أفضل موقع لكمبيوتر التحكم عن بُعد (أي الموقع الذي تكون عنده المسافات للمنازل أقل ما يمكن، فبعد رسم مثلث على الخريطة تكون المنازل هي رؤوسه، عليك أن تنشئ النقطة التي عندها تكون المسافة أقل ما يمكن عن طريق تحديد موضع نقطة متساوية الزوايا داخل ذلك المثلث (والتي هي أيضاً النقطة التي عندها تكون المسافة أقل ما يمكن) بالطريقة التي اتبعناها في نظرية $(1-4)$.

تدريبات

1. أوجد مجموع أطوال الأعمدة الثلاثة المرسومة من أي نقطة تقع داخل مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه 10.
2. حدد موضع نقطة تقع داخل مثلث حاد الزوايا بحيث مجموع المسافات التي تبعدها عن رؤوسه أقل ما يمكن.
3. وضح لماذا وضعنا في نظرية $(6-4)$ شرط أن يكون قياس أي زاوية في المثلث أقل من 120°.
4. إذا كانت إحدى زوايا مثلث أكبر من أو تساوي 120° ، فأثبت أن رأس هذه الزاوية هي النقطة التي عندها تكون المسافة أقل ما يمكن.
5. إذا أنشأنا مربعات على أضلاع مثلث من الخارج ، فأثبت أن الخط المستقيم المار بمركزي أي مربعين منها يكون عمودياً على الخط المستقيم المار بالرأس المشتركة لهذين المربعين ومركز المربع الثالث.
6. أثبت أكبر المثلثات مساحة بين كل المثلثات التي لها المحيط نفسه هو المثلث المتطابق الأضلاع.
7. أثبت أن أقل المثلثات محيطاً بين كل المثلثات التي لها المساحة نفسها هو المثلث المتطابق الأضلاع.
8. أثبت أن مراكز الدوائر المحيطة بالمثلثات الثلاثة المتشابهة والمنشأة على أضلاع أي مثلث من الخارج هي رؤوس مثلث يشابه هذه المثلثات.
9. أثبت نظرية $(3-4)$ في حالة رسم المثلثات الثلاثة المتطابقة الأضلاع على أضلاع مثلث من الداخل (هذه الحالة تسمى مثلث نابليون الداخلي **internal Napoleon**

triangle بينما في حالة رسم المثلثات من الخارج كما في نظرية $(3-4)$ فيسمى مثلث نابليون الخارجي external Napoleon triangle).

10. أثبت أن مثلث نابليون الداخلي ومثلث نابليون الخارجي لهما نفس المركز، وأن الفرق بين مساحتيهما يساوي مساحة المثلث الأصلي.