الفصل الأول

مبادئ العدّ الأساسية

BASIC COUNTING PRINCIPLES

يعتبر العدّ هدفاً أساسياً في دراسة نظرية التركيبات. تدعى نظرية التركيبات أحياناً "فن العد" لأننا نعدّ عناصر مجموعة منتهية دون أن نكتب عناصرها في قائمة مفصلة. يهدف هذا الفصل إلى التعرف على صور العد الست القياسية. هذه المسائل الست إضافةً إلى مبادئ المجموع وحاصل الضرب والتقابل تمثل الأدوات الرئيسة لحل معظم مسائل هذا الكتاب.

وهذه المسائل الست يمكن النظر إلى أربع منها (المتتاليات، التباديل، التركيبات، المجموعات المضاعفة) من خلال نموذجين: نموذج العينة للعد ونموذج التوزيع للعد[1]، وأمّا المسألتان المتبقيتان (تجزئة المجموعات، تجزئة الأعداد الصحيحة) فلا يمكن النظر إليهما إلا من خلال نموذج التوزيع للعدّ.

[1] هذان النموذجان ليسا الوحيدين للعد. هناك نموذج الدوال للعدّ الذي يعد صياغة دقيقة لنموذج التوزيع للعد . انظر البند الرابع من الفصل الأول في المرجع [5].

(١,١) مبدأ المجموع ومبدأ حاصل الضرب

إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_k$ مجموعات منتهية تحقق $A_i \cap A_j = \phi$ لكل $i \neq j$ ، فإن $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k|$. يسمى هذا المبدأ **مبدأ المجموع** The Rule of Sum.

يمكن إثبات مبدأ المجموع بواسطة الاستقراء الرياضي على k ، ونترك ذلك للقارئ.

غالباً ما نستخدم الصيغة المكافئة التالية لمبدأ المجموع عند حل المسائل: إذا كان إنجاز المهمة A يتطلب إنجاز أي من المهمات $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ، وإذا كان لا يمكن إنجاز A_i و A_j في الوقت نفسه لكل $i \neq j$ وكان عدد طرق إنجاز A_t هو n_t لكل عدد صحيح $1 \leq t \leq k$ ، فإن عدد طرق إنجاز A هو $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_k$ مجموعات منتهية فإن $|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_k|$. يسمى هذا المبدأ **مبدأ حاصل الضرب** The Rule of Product. يمكن إثبات مبدأ حاصل الضرب بواسطة الاستقراء الرياضي على k ، ونترك ذلك للقارئ.

غالباً ما نستخدم الصيغة المكافئة التالية لمبدأ حاصل الضرب عند حل المسائل: إذا كان إنجاز المهمة A يتطلب إنجاز المتتالية التالية من المهمات $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ، (A_1 أولاً ثم A_2 ثانياً وهكذا) وإذا كان عدد طرق إنجاز المهمة A_j لا يعتمد على الكيفية التي تمّ بها إنجاز المهمات $A_1, A_2, \ldots, A_{j-1}$ لكل عدد صحيح $2 \leq j \leq k$ ، وكان عدد طرق إنجاز A_j هو n_j فإن عدد طرق إنجاز A هو $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$.

مثال(١,١)

لتكن Σ أبجدية عدد حروفها m. جد $|\Sigma_n|$ حيث Σ_n هي مجموعة الكلمات التي طولها n والتي حروفها من الأبجدية Σ.

الحل

لتكن $w = x_1 x_2 \cdots x_n$ كلمة من Σ_n. عدد طرق اختيار الحرف x_i هو m لكل $1 \le i \le n$، كما أن اختيار الحرف x_i لا يعتمد على اختيار الحروف التي قبله. إذن، استناداً إلى مبدأ حاصل الضرب $|\Sigma_n| = m^n$.

مثال(١,٢)

يعمل في مستشفى 4 أطباء و 7 ممرضين و 3 فنيين. بكم طريقة يمكن تكوين فريق عمل مؤلف من طبيب وممرض وفني؟

الحل

يمكن اختيار الطبيب بأربع طرق ويمكن اختيار المرض بسبع طرق ويمكن اختيار الفني بثلاث طرق. استناداً إلى مبدأ حاصل الضرب عدد الطرق الممكنة هو

$4 \cdot 7 \cdot 3 = 84$

مثال(١,٣)

كم عدداً مكوناً من رقمين يمكن تكوينه بحيث يكون مجموع رقميه عدداً فردياً؟

الحل

ليكن y هو رقم الآحاد و x هو رقم العشرات. نبدأ باختيار x. يمكن اختيار x من المجموعة $\{1,2,\ldots,9\}$ وبالتالي فإن عدد طرق اختيار x هو 9. إذا كان x

فردياً فإنه يمكن اختيار y من المجموعة $\{0,2,4,6,8\}$، أما إذا كان x زوجياً فإنه يمكن اختيار y من المجموعة $\{1,3,5,7,9\}$ وبالتالي فإن عدد طرق اختيار y بعد اختيار x هو 5. إذن عدد الأعداد المطلوبة هو $9\cdot 5 = 45$. لاحظ أنه لو بدأنا باختيار y فإن عدد طرق اختيار x بعد اختيار y ليس ثابتاً.

(١,٢) مبدأ التقابل

إذا كان $f : A \to B$ تقابلاً من المجموعة A إلى المجموعة B فإن $|A| = |B|$.

(١,٣) نموذج العينة للعدّ

لتكن $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ مجموعة. إن أخذ عينة من A يعتمد على الإجابة عن السؤالين التاليين:

الأول: هل ترتيب العناصر مهم في هذه العينة أم لا؟

الثاني: هل تكرار ظهور عنصر في العينة مقبول أم لا؟

إذن، لدينا أربع حالات يوضحها المثال التالي، سنتحدث عن كل منها.

مثال(١,٤)

لتكن لدينا المجموعة $A = \{a_1, a_2, a_3\}$. يوضح الجدول المعطى أدناه العينات المكونة من عنصرين والمأخوذة من A

	التكرار مقبول	التكرار غير مقبول
الترتيب مهم	$a_1a_1, a_1a_2, a_1a_3,$ $a_2a_1, a_2a_2, a_2a_3,$ a_3a_1, a_3a_2, a_3a_3	$a_1a_2, a_1a_3, a_2a_1,$ a_2a_3, a_3a_1, a_3a_2
الترتيب غير مهم	$\{a_1,a_2\}$ $\{a_1,a_1\}$ $\{a_2,a_2\}$ $\{a_1,a_3\}$ $\{a_3,a_3\}$ $\{a_2,a_3\}$	$\{a_1,a_3\}$ $\{a_1,a_2\}$ $\{a_2,a_3\}$

ملاحظة

فيما يلي سنصطلح على أن عدد العينات التي عدد عناصرها 0 يساوي 1.

لتكن $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ مجموعة. نسمي العينة **متتاليةً** طولها r (أو متتاليةٌ مكونة من r عنصراً) r- sequence من A إذا كان يسمح فيها بالتكرار والترتيب فيها مهم ونكتبها على الشكل $x_1x_2\ldots x_r$. بمناقشة مماثلة لما فعلنا في مثال(١,١) يمكن إثبات أن عدد المتتاليات التي طولها r من مجموعة سعتها (أي، عدد عناصرها) n هو n^r.

لتكن $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ مجموعة. نسمي العينة **تبديلاً** طوله r، (أو تبديلاً مكوناً من r عنصراً) r- permutation من A إذا كان لا يسمح فيها بالتكرار والترتيب فيها مهم ونكتبها على الشكل $x_1x_2\ldots x_r$.

مبرهنة(١,١)

إذا كان $1 \le r \le n$ ، فإن عدد التباديل التي طولها r من مجموعة عدد عناصرها n هو $n(n-1)\cdots(n-r+1)$.

البرهان

لتكن $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ مجموعة وليكن $p=x_1x_2\ldots x_r$ تبديلاً من الطول r من A. لاحظ أن:

1- عدد طرق اختيار x_1 هو n.

2- عدد طرق اختيار x_2 هو $n-1$ بغض النظر عن الكيفية التي اختير بها x_1.

3- عدد طرق اختيار x_3 هو $n-2$ بغض النظر عن الكيفية التي اختير بها x_1, x_2.

$\vdots$

r– عدد طرق اختيار x_r هو $n-r+1$ بغض النظر عن الكيفية التي اختير بها $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}$.

إذن، حسب مبدأ حاصل الضرب يكون عدد التباديل التي طولها r من A هو $n(n-1)\cdots(n-r+1)$. $\square$

نرمز لعدد التباديل التي طولها r من مجموعة سعتها n عادةً بالرمز $(n)_r$ أو بالرمز $P(n,r)$. لاحظ أن

$$(n)_r = P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

لتكن $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ مجموعة. أي مجموعة جزئية من A من السعة r ‏ r- subset يمكن النظر إليها على أنها عينةٌ من A سعتها r الترتيبُ فيها

غير مهم ولا يسمح فيها بالتكرار. تسمى المجموعة الجزئية أحياناً **توفيقاً** أو **تركيباً** combination.

مبرهنة(١,٢)

إذا كان $0 \le r \le n$ ، فإن عدد المجموعات الجزئية التي سعتها r من مجموعة عدد عناصرها n هو $\frac{n!}{r!(n-r)!}$.

البرهان

إذا كان $r = 0$ فإن المجموعة الجزئية الخالية هي الوحيدة التي لا تحوي عناصر. نفرض أن $r > 0$. لاحظ أن أي مجموعة جزئية عدد عناصرها r تقابل $r!$ تبديلاً مختلفاً في مجموعة التباديل التي طولها r. كذلك يمكننا الحصول على $r!$ تبديلاً مختلفاً من أي مجموعة جزئية عدد عناصرها r. وبناء عليه فإن

$r! \times$ (عدد المجموعات الجزئية التي عدد عناصرها r) = عدد التباديل التي طولها r

من مبرهنة(١,١) نستنتج أن عدد المجموعات الجزئية التي عدد عناصرها r يساوي $\frac{n!}{r!(n-r)!}$. □

يُرمز لعدد المجموعات الجزئية التي سعتها r من مجموعة سعتها n بالرمز $\binom{n}{r}$ أو بالرمز $C(n,r)$.

مثال(١,٥)

إذا كانت ورقة اختبار تحوي 7 أسئلة وكان على الطالب أن يجيب عن 5 أسئلة فقط، فبكم طريقة يمكن للطالب أن يجيب عن الاختبار؟

الحل

عدد طرق الإجابة هو $21 = \binom{7}{5}$.

مثال(١,٦)

يعمل 12 مهندساً في شركة، ومن أجل تنفيذ أحد المشاريع تريد الشركة اختيار فريق عمل مؤلف من 5 مهندسين.

(أ) بكم طريقة يمكن للشركة أن تختار فريق العمل؟

(ب) بكم طريقة يمكن للشركة أن تختار فريق العمل إذا أصر اثنان من المهندسين على العمل معاً؟

(ج) بكم طريقة يمكن للشركة أن تختار فريق العمل إذا رفض مهندسان أن يعملا معاً؟

الحل

(أ) عدد الطرق الممكنة هو $792 = \binom{12}{5}$.

(ب) ليكن المهندسان اللذان يصران على العمل معاً هما a و b. إذا كان a و b ضمن الفريق المختار فإن عدد الطرق الممكنة لاختيار الفريق هو $\binom{10}{3}$، أما إذا كان

الفريق المختار لا يتضمن كلاً من a و b فإن عدد الطرق المكنة لاختيار الفريق هو $\binom{10}{5}$. بالاستناد إلى مبدأ المجموع نجد أن عدد الطرق المكنة هو

$$\binom{10}{3}+\binom{10}{5}=120+252=372$$

(ج) ليكن المهندسان اللذان يرفضان العمل معاً هما a و b. إذا كان a ضمن الفريق المختار فإن b ليس ضمن هذا الفريق وبالتالي فإن عدد الطرق في هذه الحالة هو $\binom{10}{4}$. بالمثل إذا كان b ضمن الفريق المختار فإن عدد الطرق هو $\binom{10}{4}$. أما إذا كان الفريق لا يتضمن كلاً من a و b فإن عدد الطرق هو $\binom{10}{5}$. بالاستناد إلى مبدأ المجموع نجد أن عدد الطرق المكنة هو:

$$\binom{10}{4}+\binom{10}{4}+\binom{10}{5}=210+210+252=672\ .$$

لتكن $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ مجموعة. نسمي العينة **مجموعة جزئية مضاعفة** سعتها r multiset -r من A إذا كان الترتيبُ فيها غير مهم ويسمح فيها بالتكرار ونكتبها على الشكل $\{x_1,x_2,\ldots,x_r\}$.

وفقاً لما ذكر أعلاه فإن $M=\{a,a,b,c,c,c,d\}$ مجموعة جزئية مضاعفة سعتها 7 وفيها تكرار كل من a,b,c,d يساوي 2,1,3,1 على الترتيب. كذلك نكتب M على الشكل $M=\{2*a,b,3*c,d\}$.

مثال(١,٧)

المجوعات الجزئية المضاعفة التي سعتها 3 من $\{a,b,c\}$ هي:

$\{a,a,a\},\{a,a,b\},\{a,a,c\},\{a,b,c\},\{b,b,b\},\{b,b,a\},\{b,b,c\},$
$\{c,c,c\},\{c,c,a\},\{c,c,b\}.$

كل متتالية مكونة من جميع عناصر المجموعة المضاعفة A تسمى **تبديلاً لـ** A.

فمثلاً، تباديل $A=\{a,b,b\}$ هي abb و bab و bba.

مبرهنة(١,٣)

عدد المجموعات الجزئية المضاعفة التي سعتها r من مجموعة سعتها n يساوي $\binom{n-1+r}{r}$.

البرهان

لتكن $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ مجموعة. لكل مجموعة جزئية مضاعفة سعتها r من A، نكون جدولاً مكوناً من n عموداً وسطرين. نضع في مستطيلات السطر الأول من اليسار إلى اليمين $a_1,a_2,\ldots,a_n$ على الترتيب، ولكل $i=1,2,\ldots,n$ نضع في المستطيل أسفل a_i نجوماً عددها يساوي تكرار a_i في المجموعة المضاعفة. لاحظ أن عدد النجوم في مستطيلات السطر الثاني يساوي r. فمثلاً المجموعة الجزئية المضاعفة $\{a_1,a_1,a_1,a_3\}$ من المجموعة $\{a_1,a_2,a_3\}$ يقابلها الجدول

a_1	a_2	a_3
***		*

وبالعكس، أي جدول عدد النجوم في مستطيلات السطر الثاني فيه r تقابله مجموعة مضاعفة من A سعتها r. عليه، يوجد تقابل بين المجموعات المضاعفة والجداول. لحساب عدد الجداول نعمل التغيير التالي في الجدول:

نحذف الخطوط الأفقية الثلاثة كما نحذف العناصر من الصف الأول والخطين الرأسيين الأول والأخير من الجدول. فمثلاً الجدول أعلاه يصبح بعد التغيير *||*** وبالعكس **|**| يقابل المجموعة المضاعفة $\{a_2,a_2,a_3,a_3\}$. إذن عدد المجموعات المضاعفة التي سعتها r يساوي عدد المتتاليات المكونة من r نجمة و $n-1$ خطاً رأسياً. نحسب عدد هذه المتتاليات كما يلي: لدينا $n-1+r$ مكاناً وإذا اخترنا r مكاناً للنجوم فستكون الأمكنة المتبقية للخطوط الرأسية. وبما أن عدد طرق اختيار r مكاناً من $n-1+r$ مكاناً هو $\binom{n-1+r}{r}$ فإن عدد المجموعات المضاعفة التي سعتها r هو $\binom{n-1+r}{r}$.

تمارين (١,١)

١- (أ) كم عدداً صحيحاً يقع بين 1 و99 بحيث رقماه مختلفان؟

(ب) كم عدداً صحيحاً زوجياً يقع بين 1 و99 بحيث رقماه مختلفان؟

(ج) كم عدداً صحيحاً فردياً يقع بين 1 و99 بحيث رقماه مختلفان؟

٢- إذا كانت $B=\{100,101,\ldots,999\}$ فما هو عدد الأعداد الفردية التي تنتمي إلى B وأرقامها مختلفة؟

٣- إذا كانت $B=\{1000,1001,\ldots,9999\}$ فما هو عدد الأعداد الفردية التي تنتمي إلى B وأرقامها مختلفة؟

٤- رميت قطعة نقد ثلاثين مرة، كم عدد المتتاليات الممكنة لظهور الصورة والكتابة؟

٥- كم طريقة مختلفة ممكنة للإجابة عن عشرين سؤالاً إذا كان يمكن الإجابة عن أي منها بنعم أو لا؟

٦- كم طريقة مختلفة ممكنة للإجابة عن أسئلة امتحان مكون من خمسين سؤالاً إذا كان لكل إجابة سؤال من العشرين الأولى ثلاثة خيارات ولكل إجابة سؤال من الثلاثين الباقية خمسة خيارات؟

٧- كم عدد طرق ترتيب حروف كلمة COMPUTER

(أ) إذا كانت حروف العلة متجاورة؟

(ب) إذا كان الحرف P يظهر إلى يسار T؟

(ج) إذا كان هناك حرفين فقط بين M وC؟

٨- احسب $\binom{7}{3}\binom{5}{2}$ ، $\binom{8}{1}$, $\binom{10}{7}$.

٩- بسط $\binom{n}{n}$, $\binom{n}{n-1}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{0}$.

١٠- جد $(n)_1$, $(7)_6$, $(8)_4$, $(8)_3$.

١١- وضح أن $(n)_n = (n)_{n-1}$.

١٢- وضح أن $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

١٣- أثبت أن $\binom{n}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}$.

١٤- مستخدماً تمرين ١٣ ، أثبت أن $\binom{2n}{n}$ عدد زوجي إذا كان $n \geq 1$.

١٥- أثبت أنه لأي عدد صحيح موجب n يوجد n من الأعداد المؤلفة المتعاقبة (يسمى العدد الصحيح الموجب مؤلفاً إذا كان غير أولي وأكبر من 1).

[إرشاد: ادرس الأعداد $(n+1)!+2,(n+1)!+3,\cdots,(n+1)!+(n+1)$]

١٦– بكم طريقة مختلفة يمكن أن يجلس n فرداً حول طاولة مستديرة؟ (يقال إن الطريقتين مختلفتان إذا كان لا يمكن الحصول على إحداهما من الأخرى بوساطة دوران ما.)

١٧– تستخدم سفينة إرسال إشارات برفع سبعة أعلام متتابعة على سارية. كم إشارة مختلفة يمكن إرسالها بخمسة أعلام مختلفة ألوانها؟

١٨– بكم طريقة يمكن أن تصطف أربع سيارات حمراء متطابقة وأربع سيارات بيضاء متطابقة بحيث لا تتجاور سيارتان لهما اللون نفسه؟

١٩– بكم طريقة يمكن أن تصطف أربع سيارات حمراء مختلفة وأربع سيارات بيضاء مختلفة بحيث لا تتجاور سيارتان حمراوان؟

٢٠– كم عدد الكلمات المكونة من خمسة أحرف من الأبجدية العربية إذا كان لا يسمح بتكرار الحرف؟

٢١– طالب لديه 25 من الكتب المختلفة ولديه رف يتسع فقط لعشرة كتب. بكم طريقة يمكنه أن يصف عشرة من كتبه على الرف؟

٢٢– كم عدد تباديل $\{1,2,\cdots,n\}$ التي تثبت العدد 1؟

٢٣– بكم طريقة يمكن تجزئة 12 عنصراً مختلفاً إلى ثلاث مجموعات تتكون كل منها من أربعة عناصر؟

٢٤– بكم طريقة يمكن تجزئة $2n$ عنصراً مختلفاً إلى n مجموعة تتكون كل منها من عنصرين؟

٢٥– بكم طريقة يمكن تجزئة mn عنصراً مختلفاً إلى m مجموعة عدد عناصر كل منها n؟

٢٦– أثبت أن $r!$ يقسم حاصل ضرب أي r من الأعداد الصحيحة الموجبة المتعاقبة. [إرشاد: ادرس طرق اختيار r عنصراً من مجموعة عدد عناصرها $n+r-1$]

٢٧– n عصا مختلفة كسر كل منها إلى جزئين طويل وقصير. بكم طريقة يمكن تكوين n زوجاً من الأجزاء بحيث كل زوج يتكون من جزء قصير وآخر طويل؟

٢٨– شركة حلويات تضع في كيس مجموعة من 10 أصابع من الشوكلاته تختارها من بين ثلاثة أنواع.

(أ) بكم طريقة يمكن أن تكون هذه المجموعة؟

(ب) كم عدد المجموعات التي تحوي على الأقل واحداً من كل نوع؟

٢٩– لتكن A مجموعة عدد عناصرها m و B مجموعة عدد عناصرها n.

(أ) جد عدد العلاقات التي يمكن تعريفها من A إلى B.

(ب) جد عدد الدوال التي يمكن تعريفها من A إلى B.

(ج) جد عدد الدوال الأحادية التي يمكن تعريفها من A إلى B.

(د) جد عدد دوال التقابل التي يمكن تعريفها من A إلى B.

٣٠– لتكن A مجموعة عدد عناصرها n.

(١) جد عدد العلاقات التي يمكن تعريفها على A.

(٢) جد عدد العلاقات R على A في الحالات التالية:

(أ) R انعكاسية (ب) R تناظرية (ج) R انعكاسية وتناظرية (د) R تخالفية.

٣١- جد عدد المتجهات $v=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ في الحالات التالية:

(أ) $\alpha_i\in\{0,1,\ldots,k-1\}$ لكل $i=1,2,\ldots,n$.

(ب) $\alpha_i\in\{0,1,\ldots,k_i-1\}$ لكل $i=1,2,\ldots,n$.

(ج) $\alpha_i\in\{0,1\}$ لكل $i=1,2,\ldots,n$ و $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=r$.

٣٢- إذا كان $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r}$ تحليلاً للعدد n إلى عوامله الأولية فجد

(أ) عدد قواسم n.

(ب) عدد قواسم n التي لا يقسمها أي مربع كامل مختلف عن 1.

٣٣- إذا كان p عدداً أولياً فأثبت أن p يقسم $\binom{p}{k}$ لكل عدد صحيح $0<k<p$.

(١,٤) مبرهنة ذات الحدين

في هذا البند سنقدم مبرهنة ذات الحدين و التي يمكن النظر إليها كتطبيق من تطبيقات التوافيق. كما سنقدم مبرهنة متعددة الحدود و التي تعتبر تعميماً لمبرهنة ذات الحدين.

مبرهنة(١,٤) (متطابقة باسكال)

إذا كان $n\geq k$ عددين صحيحين موجبين، فإن $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$.

البرهان

لتكن $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ مجموعة عدد عناصرها n. ولتكن B مجموعة جزئية من A عدد عناصرها k. لدينا حالتان: إما $a_n\in B$ أو $a_n\notin B$. حسب مبدأ

المجموع فإن عدد المجموعات الجزئية من A من السعة k يساوي عدد المجموعات الجزئية من A من السعة k والتي لا تحوي a_n مضافاً إليه عدد المجموعات الجزئية من A من السعة k والتي تحوي a_n.

عدد المجموعات الجزئية من A من السعة k والتي لا تحوي a_n يساوي عدد المجموعات الجزئية من $A-\{a_n\}$ من السعة k ، إذن يساوي $\binom{n-1}{k}$.

عدد المجموعات الجزئية من A من السعة k والتي تحوي a_n يساوي عدد المجموعات الجزئية من $\{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}\}$ من السعة $k-1$ ، إذن يساوي $\binom{n-1}{k-1}$. عليه ، $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$. $\square$

باستخدام متطابقة باسكال يمكن إنشاء مثلث باسكال الذي يتكون من قيم $\binom{n}{k}$.

$$
\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
1\quad 3\quad 3\quad 1\\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1\\
1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1\\
\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots
\end{array}
$$

مبرهنة(١,٥) (مبرهنة ذات الحدين)

لأي عددين حقيقين x,y ، وأي عدد صحيح غير سالب n ، فإن

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\cdots+\binom{n}{n}y^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^i$$

البرهان

نستخدم الاستقراء الرياضي على n. المبرهنة صحيحة عندما $n=0$ لأن الطرف الايسر يساوي $(x+y)^0 = 1$ ، كما أن الطرف الأيمن يساوي $\binom{0}{0}x^0y^0 = 1$.

لنفرض صحة المبرهنة عندما $n = k \geq 0$ ، أي أن:

$$(x+y)^k = \binom{k}{0}x^k + \binom{k}{1}x^{k-1}y + \binom{k}{2}x^{k-2}y^2 + \cdots + \binom{k}{k}y^k$$

نريد إثبات صحة المبرهنة عندما $n = k+1$. أي نريد إثبات أن

$$(x+y)^{k+1} = \binom{k+1}{0}x^{k+1} + \binom{k+1}{1}x^k y + \binom{k+1}{2}x^{k-1}y^2 + \cdots + \binom{k+1}{k+1}y^{k+1}$$

لاحظ أن $(x+y)^{k+1} = (x+y)(x+y)^k$.

ومن فرضية الاستقراء

$$(x+y)^{k+1} = (x+y)[\binom{k}{0}x^k + \binom{k}{1}x^{k-1}y + \binom{k}{2}x^{k-2}y^2 + \cdots + \binom{k}{k}y^k]$$

$$= \binom{k}{0}x^{k+1} + \binom{k}{1}x^k y + \cdots + \binom{k}{k-1}x^2y^{k-1} + \binom{k}{k}xy^k$$

$$+ \binom{k}{0}x^k y + \binom{k}{1}x^{k-1}y^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}xy^k + \binom{k}{k}y^{k+1}$$

$$= \binom{k}{0}x^{k+1} + \{\binom{k}{1} + \binom{k}{0}\}x^k y + \{\binom{k}{2} + \binom{k}{1}\}x^{k-1}y^2 + \cdots +$$

$$\{\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k}\}xy^k + \binom{k}{k}y^{k+1}$$

$$=\binom{k+1}{0}x^{k+1}+\binom{k+1}{1}x^{k}y+\binom{k+1}{2}x^{k-1}y^{2}+\cdots+\binom{k+1}{k+1}y^{k+1}$$

علماً أننا حصلنا على المساواة الأخيرة باستخدام متطابقة باسكال. □

لاحظ أن عدد الحدود المختلفة في مفكوك $(x+y)^n$ يساوي $n+1$.

تسمى المتسلسلة

$$1+kx+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

متسلسلة ذات الحدين (The Binomial Series). ومن حساب التفاضل نعلم أنه إذا كان $|x|<1$ فإنه لكل عدد حقيقي $k\in\mathbb{R}$ يكون

$$(1+x)^k=1+kx+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n}x^n$$

حيث n عدد صحيح و

$$\binom{k}{n}=\begin{cases}0 & ,n<0\\ 1 & ,n=0\\ \dfrac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} & ,n>0\end{cases}$$

هي معاملات ذات الحدّين المعممة (Generalized Binomial Coefficients). وبغرض الاستخدام في الفصل المتعلق بالدوال المولِّدة نجد الآن مفكوك $(1-x)^{-m}$ حيث m عدد صحيح موجب كما يلي:

$$(1-x)^{-m}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-m}{n}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-m}{n}x^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-n+1)}{n!}\;x^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{n!}\ x^{n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(m+n-1)\cdots(m+1)m}{n!}\ x^{n}$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{m+n-1}{n}\ x^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n-1}{n}\ x^{n}.$$

مثال(١,٨)

جد مفكوك $(x+y)^3$.

الحل

$$(x+y)^3=\binom{3}{0}x^3+\binom{3}{1}x^2y+\binom{3}{2}xy^2+\binom{3}{3}y^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

مثال(١,٩)

$$2^n=(1+1)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}$$

مثال(١,١٠)

أثبت أن

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots=2^{n-1}$$

الحل

$$0=(1-1)^n=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\binom{n}{4}-\binom{n}{5}+\cdots$$

ومنه

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots$$

وبالتعويض في مثال(١,٩) نجد أن

$$2^n = 2\{\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots\}$$

إذن

$$2^{n-1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots$$

مبرهنة(١,٦)

إذا كان لدينا n من العناصر المأخوذة من k نوعاً بحيث عدد العناصر المأخوذة من النوع رقم i هو r_i لكل $1 \le i \le k$ ، فإن عدد تباديل هذه العناصر يساوي

$$\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$$

أي، عدد تباديل المجموعة المضاعفة $M = \{r_1 * a_1, r_2 * a_2, \ldots, r_k * a_k\}$ التي عدد عناصرها $n = r_1 + r_2 + \cdots + r_k$ يساوي $\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$.

البرهان

لدينا n مكاناً. للعناصر من النوع الأول والتي عددها r_1 يمكن أن نختار r_1 مكاناً من n مكاناً بـ $\binom{n}{r_1}$ طريقة. للعناصر من النوع الثاني والتي عددها r_2 يمكن أن نختار r_2 مكاناً من $n - r_1$ مكاناً بـ $\binom{n-r_1}{r_2}$ طريقة. وعموماً للعناصر من النوع رقم i والتي عددها r_i يمكن أن نختار r_i مكاناً من $n - r_1 - r_2 - \cdots - r_{i-1}$ مكاناً بـ $\binom{n - r_1 - r_2 - \cdots - r_{i-1}}{r_i}$ طريقة، لكل $2 \le i \le k$. ومن مبدأ حاصل الضرب ينتج المطلوب.

مثال(١,١١)

كم عدد التباديل المختلفة التي يمكن تكوينها من حروف كلمة ABACDDEFA؟

الحل

$$\frac{9!}{3!1!.1!2!1!1!} = \frac{9!}{3!2!} = 30240\ .$$

مبرهنة(١,٧) (مبرهنة متعددة الحدود)

إذا كانت $x_1, x_2, \ldots, x_m$ أعداداً حقيقية وكان n عدداً صحيحاً غير سالب، فإن:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum \binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_m} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_m^{r_m}$$

حيث الجمع مأخوذ على كل الأعداد الصحيحة غير السالبة $r_1, r_2, \ldots, r_m$ التي تحقق $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$ ؛ وحيث $\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_m} = \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_m!}$.

البرهان

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = (x_1 + x_2 + \cdots + x_m) \cdots (x_1 + x_2 + \cdots + x_m) \quad (n \text{ مرة})$$

ومنه أي حدّ من حدود المفكوك يكون من الشكل $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_m^{r_m}$ حيث $r_1, r_2, \ldots, r_m$ أعداد صحيحة غير سالبة تحقق $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$. معامل هذا الحدّ هو عدد تباديل r_1 عنصراً من النوع x_1 و r_2 عنصراً من النوع x_2 و ... و r_m عنصراً من النوع x_m. من مبرهنة(١,٦) يكون معامل $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_m^{r_m}$ هو $\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_m}$. □

لاحظ أنه إذا وضعنا $m = 2$ في مبرهنة(١,٧) فإننا نحصل عل مبرهنة ذات الحدين. كذلك عدد الحدود المختلفة في مفكوك $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$ هو $\binom{m-1+n}{n}$ وذلك لأن عدد حلول $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$ في الأعداد الصحيحة غير السالبة يساوي $\binom{m-1+n}{n}$ كما سنثبت لاحقاً في نتيجة(١,١٠).

مثال(١,١٢)

جد مفكوك $(x+y+z)^2$.

الحل

عدد الحدود في المفكوك هو $\binom{3-1+2}{2} = \binom{4}{2} = 6$. من مبرهنة متعددة الحدود نجد أن

$$(x+y+z)^2 = \binom{2}{2,0,0}x^2 + \binom{2}{0,2,0}y^2 + \binom{2}{0,0,2}z^2 + \binom{2}{1,1,0}xy + \binom{2}{1,0,1}xz + \binom{2}{0,1,1}yz$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz.$$

تمارين(١,٢)

١- استخدم مبرهنة ذات الحدين لإيجاد مفكوك $(x-2)^5$.

٢- استخدم مبرهنة ذات الحدين لإيجاد مفكوك $(x+1)^6$.

٣- استخدم مبرهنة متعددة الحدود لإيجاد مفكوك $(x+y+z)^4$.

٤- ما هو معامل $x^3y^2z^5$ في مفكوك $(x+y+z)^{10}$؟

٥- كم عدد حدود مفكوك $(x+y+z)^{70}$؟

٦- باستخدام مبرهنة ذات الحدين أثبت أن: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = 3^n$.

٧- أوجد قيمة x إذا كان $\sum_{k=0}^{50}\binom{50}{k}8^k = x^{100}$.

٨- كم عدد تباديل حروف كلمة MISSISSIPPI بحيث I لا يجاور I؟

٩- كم عدد تباديل حروف كلمة ILLINOIS بحيث لا يظهر I إلى يسار L؟

١٠- كم عدد المتتاليات الثنائية (أي، المأخوذة من المجوعة $\{0,1\}$) من الطول n والتي تحوي عدداً زوجياً من الأصفار وعدداً فردياً من الرقم 1؟

١١- كم عدد المتتاليات الثنائية من الطول n و التي تحوي عدداً زوجياً من الأصفار وعدداً زوجياً من الرقم 1؟

١٢- لأي عدد صحيح موجب n، أثبت أن $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}2^{n-k} = n3^{n-1}$.

١٣- أعط برهاناً تركيبياً للمتطابقة $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$.

١٤- أعط برهاناً تركيبياً للمتطابقة $\binom{3n}{3} = 3\binom{n}{3} + 6n\binom{n}{2} + n^3$.

١٥- أعط برهاناً تركيبياً للمتطابقة $\binom{n+1}{r+1} = \binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \cdots + \binom{n}{r}$.

١٦- أثبت أن

$$\binom{r}{k} - \binom{r}{k+1} + \binom{r}{k+2} - \binom{r}{k+3} + \cdots + (-1)^{r-k}\binom{r}{r} = \binom{r-1}{k-1}.$$

[إرشاد: استخدم متطابقة باسكال]

١٧- اكتب مفكوك $2^p = (1+1)^p$ ثم أثبت أن $p \mid (2^p - 2)$ ، حيث p عدد أولي.

١٨- أثبت أن $\binom{m}{k}\binom{n}{0} + \cdots + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \binom{m}{0}\binom{n}{k} = \binom{m+n}{k}$. تسمى هذه المتطابقة صيغة فاندرمند للالتفاف (Vandermonde's convolution formula).

(١,٥) نموذج التوزيع للعدّ

يهدف هذا البند إلى تقديم نموذج التوزيع للعد (The distribution model of counting). ليكن لدينا r كرة نريد توزيعها على n صندوقاً، ثلاثة أسئلة مهمة في هذا السياق:

الأول: هل الكرات مختلفة أم متطابقة؟

الثاني: هل من الممكن أن يحوي الصندوق أكثر من كرة؟

الثالث: هل الصناديق مختلفة أم متطابقة؟

في هذا البند سنفرض أن الصناديق مختلفة. إذن، لدينا أربع حالات يوضحها المثال التالي:

مثال(١,١٣)

يوضح الجدول التالي كل التوزيعات الممكنة لكرتين على ثلاثة صناديق مختلفة.

كل صندوق يحوي كرة على الأكثر	لا شروط على عدد الكرات في كل صندوق	
$\lfloor b_1 \rfloor \lfloor b_2 \rfloor \lfloor \; \rfloor$ $\lfloor b_1 \rfloor \lfloor \; \rfloor \lfloor b_2 \rfloor$ $\lfloor b_2 \rfloor \lfloor b_1 \rfloor \lfloor \; \rfloor$ $\lfloor \; \rfloor \lfloor b_1 \rfloor \lfloor b_2 \rfloor$ $\lfloor b_2 \rfloor \lfloor \; \rfloor \lfloor b_1 \rfloor$ $\lfloor \; \rfloor \lfloor b_2 \rfloor \lfloor b_1 \rfloor$	$\lfloor b_1, b_2 \rfloor \lfloor \; \rfloor \lfloor \; \rfloor$ $\lfloor \; \rfloor \lfloor b_1, b_2 \rfloor \lfloor \; \rfloor$ $\lfloor \; \rfloor \lfloor \; \rfloor \lfloor b_1, b_2 \rfloor$ $\lfloor b_1 \rfloor \lfloor b_2 \rfloor \lfloor \; \rfloor$ $\lfloor b_1 \rfloor \lfloor \; \rfloor \lfloor b_2 \rfloor$ $\lfloor b_2 \rfloor \lfloor b_1 \rfloor \lfloor \; \rfloor$ $\lfloor \; \rfloor \lfloor b_1 \rfloor \lfloor b_2 \rfloor$ $\lfloor b_2 \rfloor \lfloor \; \rfloor \lfloor b_1 \rfloor$ $\lfloor \; \rfloor \lfloor b_2 \rfloor \lfloor b_1 \rfloor$	**الكرات مختلفة**
$\lfloor b \rfloor \lfloor b \rfloor \lfloor \; \rfloor$ $\lfloor b \rfloor \lfloor \; \rfloor \lfloor b \rfloor$ $\lfloor \; \rfloor \lfloor b \rfloor \lfloor b \rfloor$	$\lfloor b, b \rfloor \lfloor \; \rfloor \lfloor \; \rfloor$ $\lfloor \; \rfloor \lfloor b, b \rfloor \lfloor \; \rfloor$ $\lfloor \; \rfloor \lfloor \; \rfloor \lfloor b, b \rfloor$ $\lfloor b \rfloor \lfloor b \rfloor \lfloor \; \rfloor$ $\lfloor b \rfloor \lfloor \; \rfloor \lfloor b \rfloor$ $\lfloor \; \rfloor \lfloor b \rfloor \lfloor b \rfloor$	**الكرات متطابقة**

ليكن لدينا توزيع لـِ r كرة مختلفة $\{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$ على n من الصناديق المختلفة $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. نكوّن متتالية $x_1 x_2 \ldots x_r$ طولها r من المجموعة $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ مستخدمين التوزيع المعطى كما يلي: x_i هو الصندوق الذي يحوي الكرة b_i لكل $1 \le i \le r$.

وبالعكس، إذا كانت $x_1 x_2 \ldots x_r$ متتالية طولها r من مجموعة الصناديق $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$، فإننا نكون توزيعاً للكرات المختلفة $\{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$ على الصناديق مستخدمين المتتالية المعطاة كما يلي: نضع الكرة b_i في الصندوق x_i لكل

$1 \le i \le r$. عليه، توزيعات r كرة مختلفة على n من الصناديق المختلفة تقابل المتتاليات التي طولها r من مجموعة سعتها n.

وبالمثل يمكن توضيح أن توزيعات r كرة مختلفة $\{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$ على n من الصناديق المختلفة $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ بحيث لا يحوي أي صندوق أكثر من كرة تقابل التباديل التي طولها r من المجموعة $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. عليه، ومن مبرهنة(١,١) تنتج المبرهنة التالية.

مبرهنة(١,٨)

(أ) عدد طرق توزيع r كرة مختلفة على n من الصناديق المختلفة يساوي n^r.

(ب) عدد طرق توزيع r كرة مختلفة على n من الصناديق المختلفة بحيث لا يحوي أي صندوق أكثر من كرة يساوي $(n)_r$.

لتكن لدينا r كرة متطابقة موزعة على n من الصناديق المختلفة $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. لكل توزيع نأخذ عينة $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ من المجموعة $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ الترتيب فيها غير مهم وسعتها r حيث $x_1, x_2, \ldots, x_r$ هي الصناديق التي تحوي الكرات. وبالعكس، كل عينة $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ سعتها r من المجموعة $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ بحيث لا يكون فيها الترتيب مهماً تقابل توزيعاً لكرات متطابقة عددها r على n من الصناديق المختلفة $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ كما يلي: نوزع الكرات بحيث يكون عدد الكرات في الصندوق a_i يساوي عدد مرات ظهور العنصر a_i في العينة $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$. عليه، يوجد تقابل بين توزيعات r كرة متطابقة على n من الصناديق المختلفة $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ والعينات من الطول r التي لا يكون فيها الترتيب مهماً والمأخوذة من مجموعة سعتها n.

لاحظ أنه إذا كان كل صندوق يحوي كرةً على الأكثر، فإن العينات في هذه الحالة تكون مجموعات. أما إذا لم يكن هناك شروط على عدد الكرات في الصناديق، فإن العينات في هذه الحالة تكون مجموعات مضاعفة. من ذلك ومن مبرهنة(١,٢) ومبرهنة(١,٣) نستنتج المبرهنة التالية.

مبرهنة(١,٩)

(أ) عدد طرق توزيع r كرة متطابقة على n من الصناديق المختلفة يساوي $\binom{n-1+r}{r}$.

(ب) عدد طرق توزيع r كرة متطابقة على n من الصناديق المختلفة بحيث لا يحوي أي صندوق أكثر من كرة يساوي $\binom{n}{r}$.

نتيجة(١,١)

إذا كان $r \geq 0$ عدد صحيحاً، فإن عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = r$ يساوي $\binom{n-1+r}{r}$.

البرهان

لننظر إلى المتغيرات $X_1, X_2, \ldots, X_n$ كصناديق مختلفة، أي حل صحيح غير سالب للمعادلة يمكن رؤيته كتوزيع لـِ r كرة متطابقة على الصناديق المختلفة $X_1, X_2, \ldots, X_n$. والعكس بالعكس. من مبرهنة(١،٩)، عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = r$ يساوي $\binom{n-1+r}{r}$.

مثال(١,١٤)

كم عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $X_1 + X_2 + X_3 = 2$ ؟

الحل

من نتيجة(١,١)، عدد الحلول يساوي

$$\binom{3-1+2}{2} = \binom{4}{2} = 6$$

مثال(١,١٥)

كم عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1 + X_2 + X_3 = 30$ إذا كان $X_1 \geq 3$ و $X_2 \geq 5$ و $X_3 > 6$ ؟

الحل

حيث إن الحلول صحيحة، فإن $X_3 > 6$ تكافئ $X_3 \geq 7$. لنفرض $Y_1 = X_1 - 3$ و $Y_2 = X_2 - 5$ و $Y_3 = X_3 - 7$. لاحظ أن

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 = X_1 - 3 + X_2 - 5 + X_3 - 7 = 30 - 15 = 15$$

ومنه عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1 + X_2 + X_3 = 30$ إذا كان $X_1 \geq 3$ و $X_2 \geq 5$ و $X_3 > 6$ يساوي عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $Y_1 + Y_2 + Y_3 = 15$. من نتيجة (١,١)، عدد الحلول يساوي

$$\binom{3-1+15}{15} = \binom{17}{15} = \binom{17}{2} = \frac{(17)(16)}{2} = 136 .$$

(١,٦) تجزئات المجموعات

في هذا البند نجد عدد التجزئات التي عدد أجزائها k لمجموعة منتهية عدد عناصرها n أو ما يسمى **بأعداد ستيرلنج من النوع الثاني**، ونوضح أن عدد التجزئات التي عدد أجزائها k لمجموعة عدد عناصرها n يساوي عدد طرق توزيع n من الكرات المختلفة على k من الصناديق المتطابقة بحيث يحوي كل منها كرة واحدة على الأقل.

لتكن A مجموعة غير خالية. نقول إن $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ تجزئة للمجموعة A إلى k جزءاً أو تجزئة عدد أجزائها k إذا تحقق ما يلي:

١- $\phi \neq A_i \subseteq A$ لكل $1 \leq i \leq k$.

٢- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = A$.

٣- $A_i \cap A_j = \phi$ إذا كان $1 \leq i \neq j \leq k$.

لتكن $X = \{b_1, b_2, b_3\}$ مجموعة مكونة من ثلاث كرات مختلفة. يمكن النظر إلى التجزئة $\{\{b_1, b_2\}, \{b_3\}\}$ على أنها توزيع للكرات b_1, b_2, b_3 على صندوقين متطابقين بحيث تكون b_1, b_2 في صندوق و b_3 في الصندوق الآخر.

وبوجه عام إذا كانت X مجموعة منتهية عدد عناصرها n فكل تجزئة عدد أجزائها k تقابل توزيعاً لكرات مختلفة عددها n على صناديق متطابقة عددها k بحيث يحوي كل منها كرة واحدة على الأقل. كذلك أي توزيع لكرات مختلفة عددها n على صناديق متطابقة عددها k بحيث يحوي كل منها كرة واحدة على الأقل يقابل تجزئة عدد أجزائها k للمجموعة X .

يُرمز لعدد التجزئات التي عدد أجزائها k لمجموعة عدد عناصرها n بالرمز $S(n,k)$ وتسمى $S(n,k)$ أعداد ستيرلنج من النوع الثاني
.Stirling numbers of the second kind

لتكن $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$. لاحظ أن $\{X\}$ هي التجزئة الوحيدة التي عدد أجزائها 1 للمجموعة X . ومنه $S(n,1)=1$. كذلك $\{\{x_1\},\{x_2\},\ldots,\{x_n\}\}$ هي التجزئة الوحيدة التي عدد أجزائها n للمجموعة X . عليه $S(n,n)=1$.

مثال(١,١٦)

أوجد $S(4,2)$.

الحل

لتكن $X=\{a,b,c,d\}$. التجزئات التي عدد أجزائها 2 للمجموعة X هي:
$\{\{a\},\{b,c,d\}\}$ ، $\{\{b\},\{a,c,d\}\}$ ، $\{\{c\},\{a,b,d\}\}$ ، $\{\{d\},\{a,b,c\}\}$ ، $\{\{a,b\},\{c,d\}\}$ ، $\{\{a,c\},\{b,d\}\}$ ، $\{\{a,d\},\{b,c\}\}$. عليه $S(4,2)=7$.

مثال(١,١٧)

إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، فأثبت أن $S(n,n-1)=\binom{n}{2}$.

الحل

لتكن P تجزئة عدد أجزائها $n-1$ لمجموعة X عدد عناصرها n. لاحظ انه يوجد جزء واحد فقط من هذه الأجزاء مكون من عنصرين وكل من الأجزاء الأخرى مكون من عنصر واحد فقط. أي أن كل تجزئة تتحدد تماماً بتعيين الجزء المكون من

عنصرين. ومنه، عدد التجزئات التي عدد أجزائها $n-1$ للمجموعة X يساوي عدد المجموعات الجزئية من X والمكونة من عنصرين. أي يساوي $\binom{n}{2}$.

مثال(١,١٨)

أوجد $S(4,3)$.

الحل

من مثال(١,١٦) نجد $S(4,3)=\binom{4}{2}=6$.

بما أن الأجزاء في التجزئة يجب أن تكون منفصلة زوجاً زوجاً وغير خالية فإن $S(n,k)=0$ لأي عددين صحيحين موجبين $k>n$. نُعِّرف $S(0,0)=1$ و $S(n,0)=0$ لكل عدد صحيح موجب n ونستفيد من ذلك في حساب أعداد ستيرلنج من النوع الثاني باستخدام المبرهنة التالية.

مبرهنة(١,١٠)

لكل عددين صحيحين موجبين n,k فإن

$$S(n+1,k)=S(n,k-1)+kS(n,k)$$

البرهان

لتكن $N=\{1,2,\ldots,n\}$ و $N'=\{1,2,\ldots,n,n+1\}$. أي تجزئة للمجموعة N' إلى k جزءاً يمكن الحصول عليها بطريقة وحيدة من التالي:

١- تجزئة للمجموعة N إلى $k-1$ جزءاً، ثم إضافة المجموعة $\{n+1\}$ إلى تلك التجزئة. عدد التجزئات في هذه الحالة هو $S(n,k-1)$.

٢- تجزئة للمجموعة N إلى k جزءاً، ثم تعيين جزء من أجزاء التجزئة (عددها k) ومن ثم إضافة العنصر $n+1$ إليه. حسب مبدأ حاصل الضرب، عدد التجزئات في هذه الحالة هو $kS(n,k)$. من مبدأ المجموع، فإن
$S(n+1,k)=S(n,k-1)+kS(n,k)$.

مثال(١,١٩)

مستخدماً مبرهنة(١,١٠) أوجد $S(5,3)$.

الحل

$$S(5,3)=S(4,2)+3S(4,3)=7+3\cdot 6=25$$

يوضح الجدول التالي طريقة لإيجاد أعداد ستيرلنج من النوع الثاني باستخدام مبرهنة(١,١٠).

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$n=1$	1	0	0	0	0	0	0
$n=2$	1	1	0	0	0	0	0
$n=3$	1	3	1	0	0	0	0
$n=4$	1	7	6	1	0	0	0
$n=5$	1	15	25	10	1	0	0
$n=6$	1	31	90	65	15	1	0
$n=7$	1	63	301	350	140	21	1

مبرهنة(١,١١)

عدد الدوال الشاملة من مجموعة عدد عناصرها m إلى مجموعة عدد عناصرها n، حيث $m\geq n$، يساوي $n!S(m,n)$.

البرهان

لتكن $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$ و $Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$ ولتكن $f:X\to Y$ دالة شاملة. لكل $1\le i\le n$ نعرف المجموعة $f^{-1}(y_i)=\{x\in X: f(x)=y_i\}$. من الواضح أن $f^{-1}(y_i)\subseteq X$ وأن $f^{-1}(y_i)\bigcap f^{-1}(y_k)=\phi$ إذا كان $i\ne k$. كذلك $f^{-1}(y_i)\ne\phi$ لأن الدالة شاملة. إذن $\{f^{-1}(y_i):1\le i\le n\}$ تجزئة عدد أجزائها n للمجموعة X. بالمقابل يمكننا الحصول على $n!$ دالة شاملة لأي تجزئة عدد أجزائها n للمجموعة X. وحيث إن عدد التجزئات التي عدد أجزائها n للمجموعة X هو $S(m,n)$، فينتج من مبدأ حاصل الضرب أن عدد الدوال الشاملة هو $n!S(m,n)$. □

ويمكن الحصول على أعداد ستيرلنج من المبرهنة التالية التي سنثبتها باستخدام مبرهنة(١,١١)، وذلك بعد حساب عدد الدوال الشاملة بطريقة أخرى في مبرهنة(٢،٢) في الفصل الثاني.

مبرهنة(١,١٢)

إذا كان $m\ge n$ عددين صحيحين موجبين، فإن

$$S(m,n)=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^m \quad \square$$

لنرمز لعدد التجزئات لمجموعة سعتها n بالرمز B_n (من المعلوم أنه يوجد تقابل بين مجموعة التجزئات لمجموعة وعلاقات التكافؤ التي يمكن تعريفها عليها).

من الواضح أن $B_n=\sum_{k=0}^{n}S(n,k)$. تسمى هذه الأعداد **بأعداد بل** (Bell numbers). فمثلاً $B_4=15$. يمكن الحصول على B_n من جدول أعداد ستيرلنج بجمع عناصر الصف رقم n.

(١,٧) تجزئات الأعداد الصحيحة

ليكن n عدداً صحيحاً موجباً. نقول إن المتتالية غير المتزايدة من الأعداد الصحيحة الموجبة $n_1, n_2, \ldots, n_k$ تجزئة لـِ n إذا كان $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ ولكل $1 \le i \le n$ نسمي n_i جزءاً . فمثلاً 3,3,2,1 تجزئة للعدد 9. نرمز لعدد تجزئات العدد n بالرمز $p(n)$. كما نرمز لعدد تجزئات العدد n إلى k جزءاً بالرمز $p_k(n)$.

مثال(١,٢٠)

تجزئات العدد 5 هي :

1,1,1,1,1

2,1,1,1

2,2,1

3,1,1

3,2

4,1

5

عليه $p(5) = 7$ كما أن

$$p_1(5) = 1 \quad , \quad p_2(5) = 2 \ , \quad p_3(5) = 2 \, , \quad p_4(5) = 1 \, , \quad p_5(5) = 1 \, .$$

من الواضح أن: $p(n) = \sum_{k=1}^{n} p_k(n)$

لاحظ أنه من الممكن رؤية التجزئة $n_1, n_2, \ldots, n_k$ للعدد الصحيح الموجب n كتوزيع لـِ n كرة متطابقة على k من الصناديق المتطابقة بحيث تحوي الصناديق $n_1, n_2, \ldots, n_k$ من الكرات. وكذلك يمكن رؤية توزيع n كرة متطابقة على k من

الصناديق المتطابقة بحيث لا يوجد صندوق خالٍ كتجزئة للعدد n. عليه، يوجد تقابل بين تجزئات n وتوزيعات n كرة متطابقة على صناديق متطابقة بحيث لا يوجد صندوق خالٍ.

من الممكن بسهولة التحقق من أن:

$$p(1)=1,\ p(2)=2,\ p(3)=3,\ p(4)=5,\ p(5)=7,\ p(6)=11,\ p(7)=15$$

كذلك يمكن ملاحظة أن: $p_n(n)=p_1(n)=p_{n-1}(n)=1$.

مبرهنة(١,١٣)

لأي عددين صحيحين موجبين n,k، فإن:

$$p_k(n+k)=p_1(n)+p_2(n)+\cdots+p_k(n)=\sum_{i=1}^{k}p_i(n)$$

البرهان

الطرف الأيمن هو عدد تجزئات العدد n التي عدد أجزائها أصغر من أو يساوي k. لتكن $a_1,a_2,\ldots,a_i$ تجزئة للعدد n إلى i جزءاً حيث $i\le k$. من هذه التجزئة نكون تجزئة للعدد $n+k$ إلى k جزءاً كما يلي: نضيف 1 إلى كل a_i، ثم نضيف متتالية كل حد فيها 1 وطولها $k-i$ فنحصل على

$$a_1+1,a_2+1,\ldots,a_i+1,1,1,\ldots,1$$

حيث

$$(a_1+1)+(a_2+1)+\ldots+(a_i+1)+(k-i)=a_1+a_2+\cdots+a_i+k=n+k$$

بالمقابل، من أي تجزئة للعدد $n+k$ إلى k جزءاً نكون تجزئة للعدد n عدد أجزائها أصغر من أو يساوي k وذلك بحذف كل الأجزاء التي تساوي 1 ثم طرح 1 من الأجزاء الأخرى. وبالتالي فإن $p_k(n+k)=\sum_{i=1}^{k}p_i(n)$.

نتيجة(١,٢)

$$p_k(m)=\sum_{i=1}^{k} p_i(m-k)$$

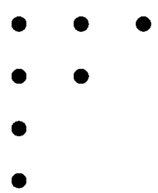
البرهان

ضع $n=m-k$ في مبرهنة(١,١٣). □

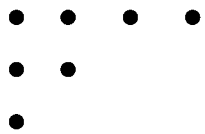
يعطي الجدول التالي قيم $p_k(n)$ عندما $1\le k,n\le 10$ وقد أُنشئ استناداً إلى نتيجة(١,٢) وإلى أن $p_k(n)=0$ عندما $k>n$.

	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7	k=8	k=9	k=10
n=1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
n=2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
n=3	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
n=4	1	2	1	1	0	0	0	0	0	0
n=5	1	2	2	1	1	0	0	0	0	0
n=6	1	3	3	2	1	1	0	0	0	0
n=7	1	3	4	3	2	1	1	0	0	0
n=8	1	4	5	5	3	2	1	1	0	0
n=9	1	4	7	6	5	3	2	1	1	0
n=10	1	5	8	9	7	5	3	2	1	1

للتجزئة $n_1,n_2,\ldots,n_k$ للعدد الصحيح الموجب n نكون ***شكل فيريرز*** (Ferrers diagram) برسم n_i نقطة في الصف رقم i لكل $1\le i\le k$. فمثلاً شكل فيريرز للتجزئة 3,2,1,1 للعدد 7 يكون:



كذلك شكل فيريرز للتجزئة 4,2,1 للعدد 7 يكون:



لكل شكل فيريرز لتجزئة للعدد n يمكننا الحصول على منقول (transpose) وذلك بتحويل الصفوف إلى أعمدة. لاحظ أن ما سنحصل عليه هو شكل فيريرز لتجزئة للعدد n نفسه.

مثال(١,٢١)

تجزئات العدد 4 إلى أجزاء كل منها أصغر من أو يساوي 3 هي:

3,1

2,2

2,1,1

1,1,1,1

كما أن التجزئات المقابلة لمنقول شكل فيريرز للتجزئات المبينة أعلاه هي على الترتيب:

2,1,1

2,2

3,1

4

نلاحظ أن عدد تجزئات العدد 4 إلى أجزاء كل منها على الأكثر 3 يساوي عدد التجزئات للعدد 4 إلى ثلاثة أجزاء أو أقل. في الحقيقة، يمكن تعميم ذلك كما في المبرهنة التالية:

مبرهنة(١,١٤)

عدد التجزئات للعدد الصحيح الموجب n إلى أجزاء كل منها على الأكثر k يساوي عدد التجزئات للعدد n إلى k جزءاً على الأكثر.

البرهان

لاحظ أن منقول شكل فيريرز لتجزئة للعدد n إلى أجزاء كل منها أصغر من أو يساوي k يعطي شكل فيريرز لتجزئة للعدد n إلى k جزءاً على الأكثر. وهذا صحيح لأن أكبر عدد من النقاط في صف في الشكل الأول هو k على الأكثر وعليه فإن عدد الصفوف في المنقول هو k على الأكثر. وبالعكس منقول شكل فيريرز لتجزئة للعدد n إلى k جزءاً على الأكثر هو شكل فيريرز لتجزئة للعدد n إلى أجزاء كل منها أصغر من أو يساوي k.

تمارين(١,٣)

١- اكتب عبارة مكافئة (على شكل عدد الحلول الصحيحة لمعادلة) لما يلي:

(أ) عدد طرق توزيع r كرة متطابقة على n من الصناديق المختلفة.

(ب) عدد طرق توزيع r كرة متطابقة على n من الصناديق المختلفة بحيث يحوي كل صندوق كرتين على الأكثر.

(ج) عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر من المجموعة $\{A, B, C, D, E\}$.

(د) عدد طرق توزيع r كرة متطابقة على n من الصناديق المختلفة بحيث يحوي كل صندوق كرتين على الأقل.

٢- كم عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 15$ إذا كان $X_k \geq 0$ لكل $1 \leq k \leq 5$؟

٣- كم عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 15$ إذا كانت $X_k \geq -3$ ؟

٤- كم عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 15$ إذا كانت $X_k \geq 2k$ ؟

٥- كم عدد الحلول الصحيحة للمتباينة $X_1 + X_2 + X_3 \leq 10$ إذا كانت $X_k \geq 0$ ؟

٦- كم عدد الحلول الصحيحة للمتباينة $X_1 + X_2 + X_3 \leq 10$ إذا كانت $X_k \geq -2$ ؟

٧- كم عدد الحلول الصحيحة للمتباينة $X_1 + X_2 + X_3 \leq 10$ إذا كانت $X_k \geq 2k$ ؟

٨- كم عدد الحلول الصحيحة الآنية للمعادلتين $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 20$ و $X_1 + X_2 + X_3 = 5$ إذا كانت $X_k \geq 0$ ؟

٩- إذا كان $n \geq 2$ عدداً صحيحاً، فأثبت أن $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$.

١٠- إذا كان $n \geq 3$ عدداً صحيحاً، فأثبت أن $S(n,3) = \tfrac{1}{2}(3^{n-1} + 1) - 2^{n-1}$.

١١- إذا كان $n \geq 4$ عدداً صحيحاً، فأثبت أن

$$S(n, n-2) = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}.$$

١٢- إذا كان $n \geq 6$ عدداً صحيحاً، فأثبت أن

$$S(n, n-3) = \binom{n}{4} + \binom{n}{3}\binom{n-3}{2} + \frac{1}{6}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}.$$

١٣- لتكن $X=\{a,b,c,d,e\}$ و $Y=\{f,g,h,i\}$. ما عدد الدوال الشاملة من X إلى Y؟

١٤- أكتب كل التجزئات للأعداد 3,4,6,7 .

١٥- إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، فأثبت أن $P_2(n)=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

١٦- إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، فأثبت أن $p_n(2n)=p(n)$.

١٧- إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، فأثبت أن $p_n(2n+1)=p(n+1)-1$.

١٨- إذا كان $n\geq 4$ عدداً صحيحاً، فأثبت أن $p_{n-2}(n)=2$.