الفصل الرابع

العلاقات الارتدادية

RECURRENCE RELATIONS

في كثير من مسائل العدّ، تؤدي دراسة المسألة وتحليلها إلى كتابة الحل على شكل متتالية $a_0, a_1, a_2, \ldots$. أحياناً، نكتفي بوصف حدود المتتالية لتعذر إيجاد أي علاقات بين تلك الحدود. فمثلاً، متتالية الأعداد الأولية $2,3,5,7,11,\ldots$ لا يعرف لحدها العام أي صيغة جبرية صريحة كما لا تعرف أي علاقة بين حدود المتتالية. وأحياناً أخرى، يمكن التعبير بسهولة عن الحدّ العام بصيغة جبرية صريحة كما في حالة المتتاليات الهندسية والمتتاليات الحسابية. وفي بعض المسائل، يمكن حساب الحدّ العام a_n ارتدادياً؛ أي، يمكن كتابة معادلة تعطينا a_n بدلالة بعض الحدود a_r حيث $r < n$. تسمى المعادلة علاقة ارتدادية، وإذا أمكن التعبير عن a_n بصيغة جبرية صريحة فإنه يقال إن العلاقة الارتدادية قد حلّت. ولبعض الأغراض تكون الصيغة الجبرية الصريحة للحدّ العام a_n مفيدة، ولكن العلاقة الارتدادية تكون أكثر فائدة لأغراض أخرى مثل حساب a_n لقيمة معطاة n.

في هذا الفصل، نقدم أصنافاً من العلاقات الارتدادية التي توجد طرائق لحلّها، كما نعالج بعض المسائل التي يمكن بناء علاقات ارتدادية لها. وسيلاحظ القارئ أن المقاربة المتبعة في دراسة العلاقات الارتدادية تُذكِّر بطريقة معالجة المعادلات التفاضلية العاديّة.

(٤,١) مقدمة

لتكن $a_0, a_1, a_2, \ldots$ متتالية. كل صيغة تُعبّر عن الحدّ العام a_n بدلالة واحد أو أكثر من الحدود السابقة له $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$، لكل $n \geq k$ حيث k عدد صحيح موجب وثابت، تسمى **علاقة ارتدادية** للمتتالية $a_0, a_1, a_2, \ldots$. نلاحظ أن كل حد من الحدود $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ لا يحقق العلاقة الارتدادية؛ تسمى قيم هذه الحدود **بالشروط الابتدائية للمتتالية**. وتسمى متتالية ما حلاً لعلاقة ارتدادية معطاة إذا كانت حدود المتتالية تحقق العلاقة الارتدادية.

يقال عن علاقة ارتدادية إنها **خطية من الرتبة** k إذا كان يمكن كتابتها على الصورة $u_n + f_1(n)u_{n-1} + f_2(n)u_{n-2} + \ldots + f_k(n)u_{n-k} = g(n)$ حيث $f_1, f_2, \ldots, f_k, g$ دوال معرّفة لكل n و f_k ليست دالة صفرية. إذا كانت g دالة صفرية فإن العلاقة تسمى **متجانسة**؛ ويقال إن العلاقة **غير متجانسة** عندما تكون g ليست دالة صفرية. كما يقال إن العلاقة **ذات معاملات ثابتة** عندما تكون $f_1, f_2, \ldots, f_k$ دوالاً ثابتة.

تبيّن المبرهنة التالية أن حل العلاقة الارتدادية الخطية يكون وحيداً عندما تعطى الشروط الابتدائية.

مبرهنة(٤,١)

يوجد حل وحيد للعلاقة الارتدادية الخطية

$u_n + f_1(n)u_{n-1} + f_2(n)u_{n-2} + \ldots + f_k(n)u_{n-k} = g(n)$ بحيث

$u_0 = a_0, u_1 = a_1, \ldots, u_{k-1} = a_{k-1}$ حيث $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ ثوابت معطاة.

البرهان

نستخدم الاستقراء الرياضي على n لإثبات أن u_n معين بشكل وحيد لكل عدد صحيح $n \geq 0$. ينتج من الشروط الابتدائية أن كلاً من $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$ معين بشكل وحيد. نفرض أن $n \geq k-1$ و $u_0, u_1, \ldots, u_n$ معينة بشكل وحيد. بما أن $n+1 \geq k$، فإن العلاقة الارتدادية تعطي

$$u_{n+1} = -f_1(n+1)u_n - f_2(n+1)u_{n-1} - \ldots - f_k(n+1)u_{n+1-k} + g(n+1)$$

وبالتالي ينتج من فرضية الاستقراء أن u_{n+1} معين بشكل وحيد. □

يساعد المبدأ التالي على إيجاد حلول للعلاقات الارتدادية الخطية.

مبرهنة(٤,٢) (مبدأ التراكب Superposition principle)

إذا كان $u_n^{(1)}$ حلاً للعلاقة الارتدادية

$u_n + f_1(n)u_{n-1} + f_2(n)u_{n-2} + \ldots + f_k(n)u_{n-k} = g_1(n)$ وكان $u_n^{(2)}$ حلاً للعلاقة الارتدادية $u_n + f_1(n)u_{n-1} + f_2(n)u_{n-2} + \ldots + f_k(n)u_{n-k} = g_2(n)$، فإن $c_1u_n^{(1)} + c_2u_n^{(2)}$ يكون حلاً للعلاقة الارتدادية

$$u_n + f_1(n)u_{n-1} + f_2(n)u_{n-2} + \ldots + f_k(n)u_{n-k} = g_1(n) + g_2(n)$$

البرهان

$$[c_1u_n^{(1)}+c_2u_n^{(2)}]+f_1(n)[c_1u_{n-1}^{(1)}+c_2u_{n-1}^{(2)}]+f_2(n)[c_1u_{n-2}^{(1)}+c_2u_{n-2}^{(2)}]+\cdots+$$
$$f_k(n)[c_1u_{n-k}^{(1)}+c_2u_{n-k}^{(2)}]$$
$$=c_1[u_n^{(1)}+f_1(n)u_{n-1}^{(1)}+f_2(n)u_{n-2}^{(1)}+\ldots+f_k(n)u_{n-k}^{(1)}]+$$
$$c_2[u_n^{(2)}+f_1(n)u_{n-1}^{(2)}+f_2(n)u_{n-2}^{(2)}+\ldots+f_k(n)u_{n-k}^{(2)}]$$
$$=c_1g_1(n)+c_2g_2(n).$$

(٤,٢) العلاقات الارتدادية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة

في هذا البند نركز اهتمامنا على البحث عن حلول العلاقة الارتدادية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة. لتكن $u_n+d_1u_{n-1}+\ldots+d_ku_{n-k}=0$ علاقة ارتدادية خطية بحيث $d_1,d_2,\ldots,d_k$ ثوابت. واضح أن $u_n=0$ حل لهذه العلاقة، ويسمى الحل التافه أو الحل الصفري. إذا كان $u_n=\alpha^n$ حلاً غير تافه للعلاقة، فإن $\alpha\neq 0$ تحقق $\alpha^n+d_1\alpha^{n-1}+\ldots+d_k\alpha^{n-k}=0$ ، وبالتالي فإن α تحقق $\alpha^k+d_1\alpha^{k-1}+\ldots+d_k=0$ ويقودنا هذا التحليل إلى التعريف التالي. لتكن $u_n+d_1u_{n-1}+d_2u_{n-2}+\ldots+d_ku_{n-k}=0$ علاقة ارتدادية ذات معاملات ثابتة. تسمى $P(x)=x^k+d_1x^{k-1}+\ldots+d_k$ **كثيرة الحدود المميزة** characteristic polynomial وتسمى $P(x)=0$ **المعادلة المميزة** characteristic equation أو **المعادلة المساعدة** auxiliary equation للعلاقة الارتدادية, وتسمى جذورها **الجذور المميزة** characteristic roots للعلاقة الارتدادية.

وفي الحالة التي تكون فيها الجذور المميزة مختلفة، فإنه يمكن كتابة حلول العلاقة الارتدادية بصورة بسيطة نسبياً، أما في الحالة الأخرى فإنه يمكن الوصول إلى الحلول ولكن ليس بالبساطة نفسها.

مبرهنة(٤,٣)

لتكن $u_n + d_1 u_{n-1} + \ldots + d_k u_{n-k} = 0$ علاقة ارتدادية خطية ذات معاملات ثابتة، وجذورها المميزة $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ مختلفة. عندئذ، لكل مجموعة من الثوابت $c_1, c_2, \ldots, c_k$ يكون

$$u_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n + \cdots + c_k\alpha_k^n \qquad (*)$$

حلاً للعلاقة الارتدادية. ولكل حل للعلاقة الارتدادية، توجد ثوابت $c_1, c_2, \ldots, c_k$ بحيث يمكن كتابة الحل على الشكل (*). تسمى العبارة المعطاة في (*) **بالحل العام** للعلاقة الارتدادية.

البرهان

بما أن كلاً من $u_n^{(1)} = \alpha_1^n, \ldots, u_n^{(k)} = \alpha_k^n$ حل للعلاقة الارتدادية، فإنه ينتج من مبدأ التراكب أن العبارة المعطاة في (*) حل للعلاقة الارتدادية. الآن نفرض أن $u_n = b_n$ حل للعلاقة الارتدادية، ونبحث عن ثوابت $c_1, c_2, \ldots, c_k$ بحيث يكون $u_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n + \cdots + c_k\alpha_k^n$ حلاً يحقق الشروط الابتدائية $u_0 = b_0, \ldots, u_{k-1} = b_{k-1}$. باستخدام الشروط الابتدائية نجد أن

$$\begin{aligned}
&c_1 + c_2 + \cdots + c_k = b_0\\
&\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_k c_k = b_1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_1^{k-1}c_1 + \alpha_2^{k-1}c_2 + \cdots + \alpha_k^{k-1}c_k = b_{k-1}
\end{aligned}$$

وإذا كانت A هي مصفوفة المعاملات لهذا النظام من المعادلات الخطية، فإن محدد A يكون

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \cdots & \alpha_k^{k-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le k}(\alpha_j-\alpha_i)$$

لأنه على شكل محدد فاندرمند. وبما أن $\alpha_i \neq \alpha_j$ لكل $i \neq j$، فإن $\det(A)\neq 0$. إذن، يوجد لنظام المعادلات الخطية حل وحيد. وبالتالي، فإنه يوجد للعلاقة الارتدادية حل على الشكل (*) بحيث $u_0=b_0,\ldots,u_{k-1}=b_{k-1}$. ولكن هذا الحل وحيد حسب مبرهنة(٤,١)؛ إذن يكون هذا الحل هو $u_n=b_n$.

مثال(٤,١)

أوجد صيغة جبرية صريحة للحد العام لمتتالية فيبوناتشي التي تحقق $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ لكل $n\ge 2$ وحيث $a_0=a_1=1$.

الحل

المعادلة المميزة $x^2-x-1=0$ لها الجذران المختلفان $\alpha_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\alpha_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

إذن، الحل العام هو $a_n=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. وينتج من $a_0=a_1=1$ أن

$$c_1+c_2=1$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)c_1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)c_2=1$$

وبحل نظام المعادلات نجد أن $c_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, c_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ وبالتالي نجد أن $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$. وتجدر الإشارة هنا إلى أن استخدام العلاقة الارتدادية لحساب a_n أسهل من استخدام الصيغة الصريحة للغرض نفسه.

مثال(٤,٢)

أوجد حل المسألة التالية: $a_n-5a_{n-1}+6a_{n-2}=0, n\geq 2$ حيث $a_0=2, a_1=5$.

الحل

المعادلة المميزة $x^2-5x+6=0$ لها الجذران المختلفان $\alpha_1=2, \alpha_2=3$. إذن، يمكن كتابة الحل العام على الشكل $a_n=c_1 2^n+c_2 3^n$. وينتج من $a_0=2, a_1=5$ أن

$$\begin{aligned} c_1+c_2&=2\\ 2c_1+3c_2&=5 \end{aligned}$$

وبحل نظام المعادلات نجد أن $c_1=c_2=1$. إذن $a_n=2^n+3^n$. □

يمكن للجذور المميزة للعلاقة الارتدادية أن تكون أعداداً مركبة. في هذه الحالة، غالباً ما نستخدم الصيغة المثلثية للعدد المركب لغرض كتابة الحل بشكل مناسب. في الحقيقة، يمكن برهان أنه إذا كان $a+ib\in\mathbb{C}^*$ حيث $i=\sqrt{-1}$ و $a,b\in\mathbb{R}$ وكان $a+ib=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ حيث

$r=\sqrt{a^2+b^2},\ \cos\theta=\frac{a}{r},\ \sin\theta=\frac{b}{r},\ -\pi<\theta\le\pi$، فإن $(a+ib)^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$ لكل عدد صحيح n. والجدير بالذكر هنا أنه في بعض المسائل يكون استخدام العلاقة الارتدادية لحساب a_n لأجل n معينة -كما في حساب أعداد فيبوناتشي- أبسط من استخدام الصيغة الصريحة للحل للغرض نفسه.

مثال(٤,٣)

أوجد حل المسألة التالية: $a_n+2a_{n-1}+2a_{n-2}=0,\ n\ge 2$ حيث $a_0=1, a_1=2$.

الحل

المعادلة المميزة $x^2+2x+2=0$ لها الجذران $\alpha_1=-1+i,\ \alpha_2=-1-i$. إذن، الحل العام هو $a_n=c_1(-1+i)^n+c_2(-1-i)^n$ حيث $c_1,c_2\in\mathbb{C}$. وبإيجاد الصيغة المثلثية

لكل من α_1,α_2 نجد أن

$\alpha_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right),\ \alpha_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$. إذن

$$a_n=c_1\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{3n\pi}{4}+i\sin\frac{3n\pi}{4}\right)+c_2\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{3n\pi}{4}-i\sin\frac{3n\pi}{4}\right)$$
$$=(c_1+c_2)\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{3n\pi}{4}+(c_1-c_2)i\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\frac{3n\pi}{4}$$

وبوضع $k_1=(c_1+c_2),\ k_2=(c_1-c_2)i$ نجد أن

$a_n=k_1\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{3n\pi}{4}+k_2\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\frac{3n\pi}{4}$. وينتج من $a_0=1, a_1=2$ أن

$$k_1 = 1$$

$$-k_1 + k_2 = 2$$

إذن $k_1 = 1, k_2 = 3$ وبالتالي فإن $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n cos\frac{3n\pi}{4} + 3\left(\sqrt{2}\right)^n sin\frac{3n\pi}{4}$.□

الآن نبدأ العمل على الحالة التي لا تكون فيها الجذور مختلفة.

مبرهنة(٤,٤)

لتكن $u_n + c_1u_{n-1} + \ldots + c_ku_{n-k} = 0$ علاقة ارتدادية خطية ذات معاملات ثابتة من الرتبة k. إذا كان α جذراً مميزاً تكراره r، فإن $u_n = n^m\alpha^n$ يكون حلاً للعلاقة الارتدادية لكل عدد صحيح $0 \le m < r$.

البرهان

نضع $c_0 = 1$ في الطرف الأيسر للعلاقة الارتدادية، فنجد أن

$$c_0u_n + c_1u_{n-1} + \ldots + c_ku_{n-k} = c_0n^m\alpha^n + c_1(n-1)^m\alpha^{n-1} + \ldots + c_k(n-k)^m\alpha^{n-k}$$

$$= \alpha^{n-k}\sum_{j=0}^{k} c_j(n-j)^m\alpha^{k-j} = \alpha^{n-k}\sum_{j=0}^{k} c_j\left[(n-k)+(k-j)\right]^m\alpha^{k-j}$$

$$= \alpha^{n-k}\sum_{j=0}^{k} c_j\left[\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}(n-k)^{m-i}(k-j)^i\right]\alpha^{k-j}$$

$$= \alpha^{n-k}(n-k)^m\sum_{j=0}^{k} c_j\alpha^{k-j}\left[\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}(n-k)^{-i}(k-j)^i\right]$$

$$= \alpha^{n-k}(n-k)^m\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}(n-k)^{-i}\left[\sum_{j=0}^{k} c_j(k-j)^i\alpha^{k-j}\right]$$

$$= \alpha^{n-k}(n-k)^m\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}(n-k)^{-i}P_i(\alpha)$$

حيث $P_i(x)=\sum_{j=0}^{k} c_j (k-j)^i x^{k-j}$ لكل $0\le i\le m$. نلاحظ أن $P_0(x)=\sum_{j=0}^{k} c_j x^{k-j}$ هي كثيرة الحدود المميزة للعلاقة الارتدادية. ولكي يتم البرهان، يكفي إثبات أن $P_i(\alpha)=0$ لكل $0\le i\le m$. لهذا الغرض يمكن التحقق بسهولة أن

$$P_{i+1}(x)=x\frac{d}{dx}[P_i(x)],\ 0\le i\le m \qquad (*)$$

وبما أن α جذر مميز تكراره r، فإنه توجد كثيرة حدود $T_0(x)$ بحيث $P_0(x)=(x-\alpha)^r T_0(x)$ و $T_0(\alpha)\ne 0$. باستخدام العلاقة (*) نجد أنه يوجد كثيرة حدود $T_1(x)$ بحيث $P_1(x)=(x-\alpha)^{r-1}T_1(x)$ و $T_1(\alpha)\ne 0$. وهكذا، بالاستخدام المتكرر العلاقة (*) نجد أنه لكل $0\le i\le m$ توجد كثيرة حدود $T_i(x)$ بحيث $P_i(x)=(x-\alpha)^{r-i}T_i(x)$ و $T_i(\alpha)\ne 0$. وبالتالي فإن $P_i(\alpha)=0$ لكل $0\le i\le m$. □

لقد وصلنا الآن إلى وضع مناسب لتقديم المبرهنة التي تعطي الحل العام للعلاقة الارتدادية مهما كانت جذورها المميزة.

مبرهنة(٤،٥)

لتكن $u_n + c_1u_{n-1}+\ldots+c_ku_{n-k}=0$ علاقة ارتدادية خطية ذات معاملات ثابتة ومن الرتبة k، وجذورها المميزة المختلفة $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ لها التكرارات $r_1,r_2,\ldots,r_s$ على الترتيب. عندئذٍ، لكل مجموعة من الثوابت $c_{1,1},c_{1,2},\ldots,c_{1,r_1},\ldots,c_{s,1},c_{s,2},\ldots,c_{s,r_s}$ يكون

$$u_n=\sum_{i=1}^{s}\left(c_{i,1}+c_{i,2}n+c_{i,3}n^2+\cdots+c_{i,r_i}n^{r_i-1}\right)\alpha_i^n \ \ldots\ldots\ldots (*)$$

حلاً للعلاقة الارتدادية. ولكل حل للعلاقة الارتدادية، توجد ثوابت $c_{1,1}, c_{1,2}, \ldots, c_{1,r_1}, \ldots, c_{s,1}, c_{s,2}, \ldots, c_{s,r_s}$ بحيث يمكن كتابة الحل على الشكل (*). وتسمى العبارة المعطاة في (*) **بالحل العام** للعلاقة الارتدادية.

البرهان

ينتج من مبرهنة(٤،٤) ومبدأ التراكب أن العبارة المعطاة في (*) حل للعلاقة الارتدادية.

الآن، نفرض أن $u_n = b_n$ حل للعلاقة الارتدادية ونبحث عن ثوابت $c_{1,1}, c_{1,2}, \ldots, c_{1,r_1}, \ldots, c_{s,1}, c_{s,2}, \ldots, c_{s,r_s}$ بحيث يكون $u_n = \sum_{i=1}^{s} \left(c_{i,1} + c_{i,2}n + c_{i,3}n^2 + \cdots + c_{i,r_i} n^{r_i - 1}\right)\alpha_i^n$ حلاً يحقق الشروط الابتدائية $u_0 = b_0, \ldots, u_{k-1} = b_{k-1}$. باستخدام الشروط الابتدائية نجد أن

$$\sum_{i=1}^{s} c_{i,1} = b_0$$

$$\sum_{i=1}^{s} (c_{i,1} + c_{i,2} + \cdots + c_{i,r_i})\alpha_i = b_1$$

$$\sum_{i=1}^{s} (c_{i,1} + c_{i,2}2 + \cdots + c_{i,r_i} 2^{r_i - 1})\alpha_i^{\,2} = b_2$$

....

$$\sum_{i=1}^{s} [c_{i,1} + c_{i,2}(k-1) + \cdots + c_{i,r_i}(k-1)^{r_i - 1}]\alpha_i^{\,k-1} = b_{k-1}$$

وإذا كانت A هي مصفوفة المعاملات لهذا النظام من المعادلات الخطية، فإن

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_s \\ \alpha_1{}^2 & 2\alpha_1{}^2 & \cdots & 2^{r_1-1}\alpha_1{}^2 & \alpha_2{}^2 & \cdots & 2^{r_s-1}\alpha_s{}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1{}^{k-1} & (k-1)\alpha_1{}^{k-1} & \cdots & (k-1)^{r_1-1}\alpha_1{}^{k-1} & \alpha_2{}^{k-1} & \cdots & (k-1)^{r_s-1}\alpha_s{}^{k-1} \end{bmatrix}$$

وكما في إثبات مبرهنة(٤،٣) يكفي إثبات أن $\det(A)\neq 0$. وهذا يكافئ إثبات أن صفوف A تكون مجموعة متجهات مستقلة خطياً. وبهدف الحصول على تناقض، نفرض أن صفوف A تكون مجموعة متجهات مرتبطة خطياً. لكل $0\leq i\leq k-1$ ضع

$$V_i=(\alpha_1^i, i\alpha_1^i,\ldots,i^{r_1-1}\alpha_1^i,\cdots,\alpha_s^i,i\alpha_s^i,\ldots,i^{r_s-1}\alpha_s^i)$$

بما أن $\{V_0,V_1,\ldots,V_{k-1}\}$ مجموعة متجهات مرتبطة خطياً، فإنه توجد ثوابت $d_0,d_1,\ldots,d_{k-1}$ ليست جميعها أصفاراً بحيث $d_0V_0+d_1V_1+\ldots+d_{k-1}V_{k-1}=0$.

وللاختصار ضع $V=d_0V_0+d_1V_1+\ldots+d_{k-1}V_{k-1}$. ليكن $Q(x)=\sum_{i=0}^{k-1}d_ix_i$ ، وليكن D مؤثراً بحيث $D^if(x)=D[D^{i-1}f(x)], i\geq 2$ ؛ $Df(x)=x\dfrac{d}{dx}[f(x)]$ نلاحظ أن

$$\begin{aligned} V&=\sum_{i=0}^{k-1}d_iV_i=\sum_{i=0}^{k-1}d_i(\alpha_1^i,i\alpha_1^i,\ldots,i^{r_1-1}\alpha_1^i,\cdots,\alpha_s^i,i\alpha_s^i,\ldots,i^{r_s-1}\alpha_s^i)\\ &=(\sum_{i=0}^{k-1}d_i\alpha_1^i,\sum_{i=0}^{k-1}d_ii\alpha_1^i,\ldots,\sum_{i=0}^{k-1}d_ii^{r_1-1}\alpha_1^i,\ldots,\sum_{i=0}^{k-1}d_ii^{r_s-1}\alpha_s^i)\\ &=(Q(\alpha_1),DQ(\alpha_1),\ldots,D^{r_1-1}Q(\alpha_1),\ldots,D^{r_s-1}Q(\alpha_s)) \end{aligned}$$

ومن $V=\underline{0}$ ينتج أن

$$Q(\alpha_1)=DQ(\alpha_1)=\cdots=D^{r_1-1}Q(\alpha_1)=\cdots=D^{r_s-1}Q(\alpha_s)=0$$

إذن لكل $1 \le i \le s$ فإن α_i جذر لكثيرة الحدود $Q(x)$ تكراره r_i على الأقل. وبالتالي، درجة $Q(x)$ أكبر من أو تساوي $r_1 + r_2 + \cdots + r_s = k$. وهذا يناقض أن درجة $Q(x)$ أصغر من أو تساوي $k-1$.

مثال(٤,٤)

أوجد حل المسألة التالية: $u_n - 7u_{n-1} + 16u_{n-2} - 12u_{n-3} = 0$ حيث $u_0 = 1,\ u_1 = 2,\ u_2 = 0$.

الحل

المعادلة المميزة هي $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0$ وبالتحليل نجد أن $(x-2)^2(x-3) = 0$. إذن، 2 جذر مميز تكراره 2 و3 جذر مميز بسيط (أي، تكراره 1). وبالتالي فإن الحل العام هو $u_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n + c_3 3^n$. باستخدام الشروط الابتدائية نحصل على

$$c_1 + c_3 = 1$$

$$2c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 2$$

$$4c_1 + 8c_2 + 9c_3 = 0$$

وبحل نظام المعادلات نجد أن $c_1 = 5,\ ,c_2 = 2,\ c_3 = -4$. إذن، $u_n = 5(2^n) + n2^{n+1} - 4(3^n)$ هو الحل المطلوب.

(٤,٣) العلاقات الارتدادية غير المتجانسة

يتضح من المبرهنة التالية أن حل العلاقات الارتدادية غير المتجانسة وثيق الصلة بحل المعادلات الارتدادية المتجانسة.

مبرهنة(٤,٦)

لتكن

$$u_n + c_1 u_{n-1} + \cdots + c_k u_{n-k} = f(n) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (*)$$

علاقة ارتدادية ذات معاملات ثابتة من الرتبة k. ليكن $u_n^{(h)} = \sum_{i=1}^{s} (c_{i,1} + \cdots + c_{i,r_i} n^{r_i - 1}) \alpha_i^n$ هو الحل العام للجزء المتجانس من (*)، أي الحل العام لـ $u_n + c_1 u_{n-1} + \cdots + c_k u_{n-k} = 0$. عندئذ، إذا كان $u_n = u_n^{(p)}$ أي حل خاص لـ (*)، فإن $u_n = u_n^{(h)} + u_n^{(p)}$ حل لـ (*). وإذا كان $u_n = a_n$ أي حل لـ (*)، فإنه يوجد ثوابت $c_{1,1}, \ldots, c_{s,r_s}$ بحيث يمكن كتابة a_n على الشكل $a_n = u_n^{(h)} + u_n^{(p)}$. ويسمى $u_n = u_n^{(h)} + u_n^{(p)}$ **حلاً عاماً** لِ (*).

البرهان

ينتج من مبدأ التراكب أن $u_n = u_n^{(h)} + u_n^{(p)}$ حل للعلاقة الارتدادية (*).

الآن، نفرض أن $u_n = a_n$ حل لِ (*) ونبحث عن ثوابت $c_{1,1}, \ldots, c_{s,r_s}$ بحيث يكون $a_n = u_n^{(h)} + u_n^{(p)}$. سنثبت أولاً أن $u_n = a_n - u_n^{(p)}$ حل للعلاقة الارتدادية

$$u_n + c_1 u_{n-1} + \cdots + c_k u_{n-k} = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (**)$$

بالتعويض في الطرف الأيسر لـ (**) نجد أن

$$u_n + c_1 u_{n-1} + \cdots + c_k u_{n-k} =$$

$$a_n - u_n^{(p)} + c_1 (a_{n-1} - u_{n-1}^{(p)}) + \cdots + c_k (a_{n-k} - u_{n-k}^{(p)}) =$$

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k} - (u_n^{(p)} + u_{n-1}^{(p)} + \cdots + u_{n-k}^{(p)}) =$$

$$f(n)-f(n)=0$$

إذن، $u_n=a_n-u_n^{(p)}$ حل لـ $(**)$. وبالتالي، توجد ثوابت $c_{1,1},\ldots,c_{s,r_s}$ بحيث يكون

$$u_n=a_n-u_n^{(p)}=\sum_{i=1}^{s}(c_{i,1}+\cdots+c_{i,r_i}n^{r_i-1})\alpha_i^n$$

إذن، $a_n=\sum_{i=1}^{s}(c_{i,1}+\cdots+c_{i,r_i}n^{r_i-1})\alpha_i^n+u_n^{(p)}$ كما هو مطلوب. □

يعتمد إيجاد حل خاص للعلاقة الارتدادية

$$u_n+c_1u_{n-1}+\cdots+c_ku_{n-k}=f(n) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

على $f(n)$ ؛ ولذلك لا توجد طريقة عامة تعطينا حلولاً خاصة في جميع الأحوال. سنكتفي بإعطاء إرشادات للبحث عن حلول خاصة لـ (1) عندما تكون $f(n)$ في شكل معين، وسنتبع ذلك ببعض الأمثلة التي توضح تلك الإرشادات.

(أ) إذا كانت $f(n)=b_0+b_1n+\cdots+b_tn^t$ حيث $b_0,b_1,\ldots,b_t$ ثوابت وكان العدد 1 ليس جذراً مميزاً للجزء المتجانس من (1) فيمكن البحث عن حل خاص لـ (1) على الشكل $u_n^{(p)}=e_0+e_1n+\cdots+e_tn^t$ حيث $e_0,e_1,\ldots,e_t$ ثوابت.

(ب) إذا كانت $f(n)=b_0+b_1n+\cdots+b_tn^t$ حيث $b_0,b_1,\ldots,b_t$ ثوابت وكان العدد 1 جذراً مميزاً للجزء المتجانس من (1) تكراره r فيمكن البحث عن حل خاص لـ (1) على الشكل $u_n^{(p)}=n^r(e_0+e_1n+\cdots+e_tn^t)$ حيث $e_0,e_1,\ldots,e_t$ ثوابت.

(ج) إذا كانت $f(n)=(b_0+b_1n+\cdots+b_tn^t)\beta^n$ حيث $b_0,b_1,\ldots,b_t$ ثوابت و $\beta\neq 1$ وكان العدد β ليس جذراً مميزاً للجزء المتجانس من (1) فيمكن البحث عن حل خاص لـ (1) على الشكل $u_n^{(p)}=(e_0+e_1n+\cdots+e_tn^t)\beta^n$ حيث $e_0,e_1,\ldots,e_t$ ثوابت.

(د) إذا كانت $f(n)=(b_0+b_1n+\cdots+b_tn^t)\beta^n$ حيث $b_0,b_1,\ldots,b_t$ ثوابت و $\beta\neq 1$ وكان العدد β جذراً مميزاً للجزء المتجانس من (1) تكراره r فيمكن البحث عن حل خاص لـ (1) على الشكل $u_n^{(p)}=n^r(e_0+e_1n+\cdots+e_tn^t)\beta^n$ حيث $e_0,e_1,\ldots,e_t$ ثوابت.

يمكن استخدام مبدأ التراكب للبحث عن حل خاص لـ (1) عندما تكون $f(n)$ على الشكل $f(n)=d_1f_1(n)+\cdots+d_if_i(n)$ حيث $d_1,d_2,\ldots,d_i$ ثوابت وكل من $f_1(n),f_2(n),\ldots,f_i(n)$ على شكل $f(n)$ في الفقرة (أ) أو (ب) أو (ج) أو (د) أعلاه. الأمثلة التالية توضح تلك الحالات المختلفة.

مثال(٤,٥)

أوجد حل المسألة التالية: $a_n+3a_{n-1}=4n^2-2n$ حيث $a_0=-4$.

الحل

نجد بسهولة أن $a_n^{(h)}=c(-3)^n$ حيث c ثابت اختياري. وبما أن 1 ليس جذراً مميزاً، فإنه يمكن الفرض أن $a_n^{(p)}=c_0+c_1n+c_2n^2$ حل خاص. وبالتعويض نحصل على

$$(c_0+c_1n+c_2n^2)+3[c_0+c_1(n-1)+c_2(n-1)^2=4n^2-2n$$

وبمقارنة المعاملات في الطرفين نحصل على نظام المعادلات الخطية التالي:

$$4c_0-3c_1+3c_2=0$$

$$4c_1-6c_2=-2$$

$$4c_2=4$$

وبحـــل هـــذا النظـــام نجـــد أن $c_0 = 0,\ c_1 = 1,\ c_2 = 1$. إذن، $a_n^{(p)} = n + n^2$.
وبالتالي فإن $a_n = c(-3)^n + n + n^2$. الآن، نـستخدم الـشرط الابتـدائي $a_0 = -4$ فنجد أن $c = -4$. إذن، $a_n = -4(-3)^n + n + n^2$ هو الحل المطلوب.

مثال(٤,٦)

أوجد حل المسألة التالية: $a_n - a_{n-1} = n$ حيث $a_0 = 1$.

الحل

واضح أن $a_n^{(h)} = c$ حيث c ثابت اختياري. وبما أن 1 جذر مميز تكراره 1، فإننا نفرض أن $a_n^{(p)} = n(c_0 + c_1 n) = c_0 n + c_1 n^2$ حل خاص. وبالتعويض نجد أن

$$(c_0 n + c_1 n^2) - [c_0(n-1) + c_1(n-1)^2] = n$$

وبمقارنة المعاملات نحصل على

$$c_0 - c_1 = 0$$

$$2c_1 = 1$$

إذن، $c_0 = \frac{1}{2},\ c_1 = \frac{1}{2}$. وبالتالي فإن $a_n^{(p)} = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$.
إذن، $a_n = c + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$. وباســتخدام الــشرط $a_0 = 1$ نجـــد أن $c = 1$. إذن $a_n = 1 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$ هو الحل المطلوب.

مثال(٤,٧)

أوجد حلاً خاصاً للعلاقة الارتدادية التالية: $u_n - 7u_{n-1} + 10u_{n-2} = 3^n$

الحل

يوجد للمعادلة المميـزة $x^2 - 7x + 10 = 0$ جـذران: 2 تكـراره 1 و 5 تكـراره 1.
إذن، 3 لـيس جـذراً مميـزاً. وبالتـالي نفـرض أن $u_n^{(p)} = c3^n$ حيـث c ثابـت.
التعويض يعطينا

$c3^n - 7c3^{n-1} + 10(c3^{n-2}) = 3^n$. إذن $9c - 21c + 10c = 9$ ونجد أن $c = -\frac{9}{2}$

وبالتالي فإن $u_n^{(p)} = -\frac{9}{2}3^n$ حل خاص.

مثال(٤,٨)

أوجد حلاً خاصاً للعلاقة الارتدادية التالية: $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 2^n$.

الحل

بما أن 2 جذر مميز تكراره 2 فإننا نفرض أن $a_n^{(p)} = cn^2 2^n$ حل خاص.

وبالتعويض نجد أن

$$cn^2 2^n - 4c(n-1)^2 2^{n-1} + 4c(n-2)^2 2^{n-2} = 2^n$$

إذن $cn^2 - 2c(n-1)^2 + c(n-2)^2 = 1$ وتعطينا مقارنة المعاملات المعادلة $-2c + 4c = 1$. إذن $c = \frac{1}{2}$ وبالتالي فإن $a_n^{(p)} = \frac{1}{2}n^2 2^n = n^2 2^{n-1}$ حل خاص.

مثال(٤,٩)

اكتب صيغة حل خاص لكل من العلاقات الارتدادية التالية:

(أ) $a_n + 2a_{n-1} = 2^n - n^2$

(ب) $u_n + u_{n-1} = 3n2^n$

(ج) $u_n - 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = (n+1)2^n$

الحل

(أ) نجد حلاً خاصاً لـ $a_n + 2a_{n-1} = 2^n$ على الشكل $a_n^{(p)} = c2^n$ لأن 2 ليس جذراً مميزاً، ونجد حلاً خاصاً لـ $a_n + 2a_{n-1} = -n^2$ على الشكل $a_n^{(p)} = c_0 + c_1 n + c_2 n^2$ لأن 1 ليس جذراً مميزاً؛ ثم نستخدم مبدأ التراكب فنجد أن

$a_n^{(p)} = c2^n + c_0 + c_1 n + c_2 n^2$ هو الحل الخاص المطلوب.

(ب) بما أن 2 ليس جذراً مميزاً فإننا نفرض أن الحل الخاص المطلوب هو $u_n^{(p)} = (c_0 + c_1 n)2^n$.

(ج) بما أن 2 جذر مميز تكراره 2 فإننا نفرض أن الحل الخاص المطلوب هو $u_n^{(p)} = n^2(c_0 + c_1 n)2^n$.

سنقدم في المثال التالي طريقة يمكن اتباعها لحل العلاقات الارتدادية التي يمكن كتابتها على الشكل $a_n + f(n)a_{n-1} = g(n)$ حيث $f(n) \neq 0$ لكل $n \geq 1$.

مثال(٤,١٠)

أوجد حل المسألة التالية: $a_n - 2na_{n-1} = n,\ n \geq 1$ حيث $a_0 = 2$.

الحل

نبدأ بإيجاد حل للجزء المتجانس $a_n - 2na_{n-1} = 0$ باستخدام التعويض الأمامي أو التعويض الخلفي. نفرض أن $a_n^{(h)} = u_n$ حل للجزء المتجانس بحيث $u_0 = 1$. إذن، $u_n - 2nu_{n-1} = 0$؛ أي، $u_n = 2nu_{n-1}$ و $u_0 = 1$. وبالتالي فإن

$$u_n = 2nu_{n-1} = 2n[2(n-1)u_{n-2}]$$
$$= 2^2 n(n-1)u_{n-2} = 2^3 n(n-1)(n-2)u_{n-3}$$
$$\vdots$$
$$2^n n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)1u_0 = n!2^n$$

والآن نفرض أن الحل المطلوب على الشكل $a_n = u_n v_n$، فيكون $a_0 = u_0 v_0$؛ إذن $v_0 = 2$. كما يكون

$$a_n - 2na_{n-1} = n,\ n \geq 1$$

$$u_n v_n - 2n u_{n-1} v_{n-1} = n$$

$$u_n v_n - u_n v_{n-1} = n$$

$$v_n - v_{n-1} = \frac{n}{u_n} = \frac{n}{n!2^n}$$

$$v_n = v_{n-1} + \frac{n}{n!2^n}$$

وبالتالي فإن

$$v_n = v_{n-2} + \frac{n-1}{(n-1)!2^{n-1}} + \frac{n}{n!2^n} = v_{n-3} + \frac{n-2}{(n-2)!2^{n-2}} + \frac{n-1}{(n-1)!2^{n-1}} + \frac{n}{n!2^n}$$
$$= \cdots = v_0 + \frac{1}{1!2} + \frac{2}{2!2^2} + \cdots + \frac{n}{n!2^n} = 2 + \frac{1}{1!2} + \frac{2}{2!2^2} + \cdots + \frac{n}{n!2^n}$$

ويكون الحل المطلوب هو

$$\square \quad a_n = u_n v_n = n!2^n[2 + \frac{1}{1!2} + \frac{2}{2!2^2} + \cdots + \frac{n}{n!2^n}]$$

وكما هو معلوم، فإنه يمكن استخدام الدوال المولّدة العادية والدوال المولدة الأسية في حل العلاقات الارتدادية. ونقدم الآن بعض الأمثلة على ذلك.

مثال(٤,١١)

استخدم الدوال المولّدة لحل المسألة التالية $a_n = a_{n-1} + n,\ n \geq 1$ حيث $a_0 = 1$.

الحل

نفرض أن الدالة المولّدة للمتتالية (a_n) هي $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. إذن

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n-1} + n) x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

$$=1+x\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n}=1+x\,f(x)+\frac{x}{(1-x)^{2}}$$

وبالتالي فإن

$$f(x)=\frac{1}{1-x}+\frac{x}{(1-x)^{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}+x\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{n}x^{n}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{2}\,x^{n+1}$$

ومن معامل x^n نجد أن $a_n=1+\dfrac{(n+1)n}{2}=1+\dfrac{1}{2}n+\dfrac{1}{2}n^{2}$.

مثال(٤,١٢)

استخدم الدوال المولّدة لحل المسألة التالية: $a_n=2a_{n-1}+4^{n-1},\ n\geq 1$

حيث $a_0=1$.

الحل

نفرض أن الدالة المولّدة للمتتالية (a_n) هي $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. إذن

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}(2a_{n-1}+4^{n-1})x^n$$
$$=1+2x\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(4x)^n=1+2xf(x)+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-4x}-1\right]$$

وبالتالي فإن

$$f(x)=\frac{1-3x}{(1-2x)(1-4x)}$$

وباستخدام الكسور الجزئية نجد أن

$$f(x)=\frac{\frac{1}{2}}{(1-2x)}+\frac{\frac{1}{2}}{1-4x}$$

إذن $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = f(x)$. وبحساب معامل x^n نجد أن $a_n = \frac{1}{2}2^n + \frac{1}{2}4^n$.

مثال(٤,١٣)

استخدم الدوال المولّدة الأسية لحل المسألة التالية: $d_n = nd_{n-1} + (-1)^n,\ n \geq 1$ حيث $d_0 = 1$.

الحل

نفرض أن الدالة المولّدة الأسية للمتتالية (d_n) هي $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n x^n}{n!}$. إذن

$$f(x) = \frac{d_0}{0!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}[nd_{n-1} + (-1)^n]x^n$$

$$= 1 + x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = 1 + xf(x) + \left[e^{-x} - 1\right]$$

وبالتالي فإن

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = (\sum_{n=0}^{\infty} x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}) \right) x^n$$

وبحساب معامل x^n نجد أن $\frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. إذن $d_n = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

(٤,٤) بناء العلاقات الارتدادية

نختتم موضوع العلاقات الارتدادية بإعطاء بعض الأمثلة التي توضح كيفية بنائها.

مثال(٤,١٤)

لتكن $\{0,1\}$ أبجدية ولترمز a_n لعدد الكلمات التي طول كل منها n والتي لا تحتوي على ثلاثة أصفار متعاقبة، أي لا تحتوي على النسق 000. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n) وعيّن الشروط الابتدائية.

الحل

لتكن $x_1x_2x_3\cdots x_n$ كلمة طولها n ولا تحتوي على النسق 000. إذا كان $x_1=1$ فإن $x_2x_3\cdots x_n$ كلمة طولها $n-1$ ولا تحتوي على النسق 000. أما إذا كان $x_1=0$ فإنه إما أن يكون $x_1x_2=01$ أو أن يكون $x_1x_2=00$. عندما يكون $x_1x_2=01$ فإن $x_3x_4\cdots x_n$ كلمة طولها $n-2$ ولا تحتوي على النسق 000، وعندما يكون $x_1x_2=00$ فلا بد أن يكون $x_3=1$ وبالتالي فإن $x_4x_5\cdots x_n$ تكون كلمة طولها $n-3$ ولا تحتوي على النسق 000. ينتج من النقاش السابق أن $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}$ لكل $n\geq 3$. ومن جهة ثانية فإن $a_0=1$ لأن الكلمة التي طولها صفر، أي الكلمة الخالية، لا تحتوي على النسق 000. وبالمثل فإن $a_1=2$ و $a_2=4$ لأن جميع الكلمات التي طول كل منها 1 أو 2 لا تحتوي على النسق 000.

مثال(٤,١٥)

لتكن $\{0,1,\ldots,9\}$ أبجدية ولترمز a_n لعدد الكلمات التي طول كل منها n والتي تحتوي على عدد زوجي من الأصفار. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n) وعيّن الشروط الابتدائية.

الحل

لتكن $x_1x_2x_3\cdots x_n$ كلمة طولها n و تحتوي على عدد زوجي من الأصفار. إذا كان $x_1 \neq 0$ فإن $x_2x_3\cdots x_n$ كلمة طولها $n-1$ وتحتوي على عدد زوجي من الأصفار. أما إذا كان $x_1 = 0$ فإن $x_2x_3\cdots x_n$ كلمة طولها $n-1$ وتحتوي على عدد فردي من الأصفار. بما أن عدد الكلمات التي طول كل منها $n-1$ يساوي 10^{n-1}، فنجد أن $a_n = 9a_{n-1} + (10^{n-1} - a_{n-1})$. أي، $a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$ لكل $n \geq 1$. كذلك، $a_0 = 1$ لان الكلمة الخالية، لا تحتوي على أصفار.

مثال(٤,١٦)

نقول عن مستقيمات في المستوى إنها في وضع عام عندما تتقاطع زوجاً زوجاً وأي ثلاثة منها لا تلتقي في نقطة. لترمز a_n إلى عدد المناطق الناتجة عن n من المستقيمات التي هي في وضع عام في المستوى. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n) وعيّن الشروط الابتدائية.

الحل

لتكن $L_1, L_2, \cdots, L_n$ مستقيمات في وضع عام في المستوى ولتكن $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ نقاط تقاطع L_n مع $L_1, L_2, \cdots L_{n-1}$ على الترتيب. نلاحظ أن النقاط $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ تقسم L_n إلى n جزءاً. كما نلاحظ أن $L_1, L_2, \cdots L_{n-1}$ في وضع عام في المستوى، وكل جزء من أجزاء L_n يقسم منطقة من المناطق المعينة بالمستقيمات $L_1, L_2, \cdots L_{n-1}$ إلى منطقتين. إذن $a_n = a_{n-1} + n$ لكل $n \geq 1$. كذلك، واضح أن $a_0 = 1$.

مثال(٤,١٧)

لترمز d_n إلى عدد التباديل التامة للمجموعة $\{1,2,\ldots,n\}$. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (d_n) وعين الشروط الابتدائية.

الحل

سنجد ثلاث علاقات ارتدادية مختلفة للمتتالية (d_n).

(أ) واضح أن $d_1 = 0$, $d_2 = 1$. لتكن $X = \{1,2,\ldots,n\}$ حيث $n \geq 3$، وليكن $x_1 x_2 \cdots x_n$ تبديلاً تاماً للمجموعة X. إذن $x_1 \neq 1$، وبالتالي فإن مجموعة التباديل التامة التي فيها $x_1 = 2$، ومجموعة التباديل التامة التي فيها $x_1 = 3$، ...، ومجموعة التباديل التامة التي فيها $x_1 = n$، تكون تجزئة لمجموعة التباديل التامة للمجموعة X. واضح أن كلاً من أجزاء هذه التجزئة يحتوي على العدد نفسه من التباديل التامة للمجموعة X. ليكن a_n هو عدد التباديل التامة للمجموعة X والتي فيها $x_1 = 2$. إذن $d_n = (n-1)\, a_n$. ولحساب a_n فإننا نعتبر مجموعة التباديل التامة التي لها الشكل: $2x_2 x_3 \cdots x_n;\ x_2 \neq 2,\ x_3 \neq 3, \ldots,\ x_n \neq n$

توجد تجزئة لهذه المجموعة إلى جزأين: الأول يتكون من التباديل التامة التي فيها $x_2 = 1$ والثاني يتكون من التباديل التامة التي فيها $x_2 \neq 1$. إن عدد التباديل التامة في الجزء الأول هو d_{n-2} لأنه يساوي عدد التباديل التامة $x_3 x_4 \cdots x_n$ للمجموعة $\{3,4,\ldots,n\}$ التي فيها $x_3 \neq 3,\ x_4 \neq 4, \ldots,\ x_n \neq n$. أما

عدد التباديل التامة في الجزء الثاني فهو d_{n-1} لأنه يساوي عدد التباديل التامة $x_2 x_3 \cdots x_n$ للمجموعة $\{1,3,4,\ldots,n\}$ التي فيها

$x_2 \neq 1, x_3 \neq 3, x_4 \neq 4, \ldots, x_n \neq n$. إذن $a_n = d_{n-2} + d_{n-1}$ وبالتالي فإن $d_n = (n-1)[d_{n-2} + d_{n-1}],\ \ n \geq 3$. وإذا اصطلحنا على وضع $d_0 = 1$ فإنه يمكن كتابة العلاقة الارتدادية والشروط الابتدائية على الشكل $d_n = (n-1)[d_{n-2} + d_{n-1}],\ \ n \geq 2$ حيث $d_0 = 1,\ d_1 = 0$.

(ب) ضع $a_n = d_n - nd_{n-1}$ لكل $n \geq 1$. باستخدام $d_n = (n-1)[d_{n-2} + d_{n-1}]$ نجد أن $a_n = d_n - nd_{n-1} = -1[d_{n-1} - (n-1)d_{n-2}]$. إذن $a_n = -a_{n-1}$ لكل $n \geq 2$ و $a_1 = -1$ ؛ وينتج أن $a_n = (-1)^n$ لكل $n \geq 1$. إذن $n \geq 1$ $d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$ حيث $d_0 = 1$.

(ج) ليكن σ تبديلاً للمجموعة $A = \{1,2,\ldots,n\}$ ولتكن $B = \{x \in A : \sigma(x) \neq x\}$. إذن σ تعطينا تبديلاً تاماً للمجموعة B التي هي مجموعة جزئية من A. ونصطلح على أن σ تعطينا التبديل التام الوحيد للمجوعة الخالية عندما تكون $B = \phi$. وبالتالي يمكن تعريف تباديل المجموعة $A = \{1,2,\ldots,n\}$ كما يلي: نختار مجموعة جزئية $B \subseteq A$ ثم نختار تبديلاً تاماً τ للمجموعة B ثم نعرّف تبديلاً σ للمجموعة A بوضع $\sigma(x) = \tau(x)$ لكل $x \in B$ و $\sigma(x) = x$ لكل $x \notin B$. وإذا كان $|B| = k$ فإن عدد طرق اختيار B يساوي $\binom{n}{k}$. إذن، بحساب عدد تباديل A مباشرة وعن طريق التباديل التامة للمجموعات الجزئية من A نجد أن $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k = n!$.

وبالتالي فإن $n \geq 1$, $d_n = n! - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} d_k$ حيث $d_0 = 1$. □

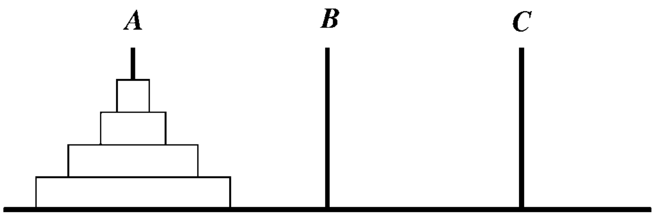
نقدم الآن المسألة المعروفة بأحجية أبراج هانوي.

مثال(٤,١٨)

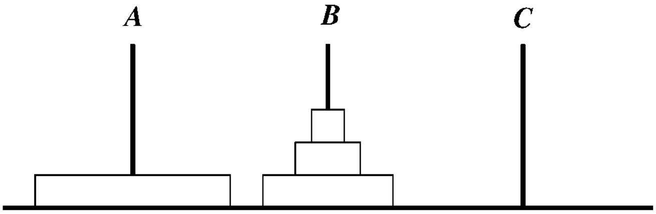
توجد ثلاثة أوتاد رأسية A,B,C على لوحة أفقية. ويوجد n من الأقراص المثقوبة حول مراكزها، وهذه الأقراص مختلفة من حيث الأقطار ومرتبة على الوتد A بحيث تتناقص أطوال أقطار الأقراص من أسفل إلى أعلى. نريد نقل الأقراص إلى الوتد C شرط أن نحمل في النقلة الواحدة قرصاً واحداً وشرط أن لا نضع قرصاً فوق آخر إذا كان الأول أكبر من الثاني قطراً وشرط أن نستخدم الأوتاد A,B,C فقط. المطلوب إيجاد المتتالية (a_n) حيث a_n ترمز إلى أصغر عدد ممكن من النقلات التي تفي بغرضنا عندما يكون عدد الأقراص يساوي n.

الحل

يبين الشكل التالي أن n من الأقراص المختلفة مرتبة على الوتد A بينما الوتدان B و C خاليان من الأقراص.



أولاً، ننقل جميع الأقراص ما عدا القرص الأكبر من الوتد A إلى الوتد B. وبالطبع فإن القرص الأكبر يترك ثابتاً في مكانه أثناء إجراء عمليات النقل. إن عدد النقلات الأمثل لإنجاز المهمة السابقة يساوي a_{n-1}. ويبين الشكل التالي الأقراص في الوضع الجديد.



الآن، ننقل القرص الأكبر من الوتد A إلى الوتد C وننجز هذه المهمة بنقلة واحدة. ثم ننقل الأقراص الأخرى من الوتد B إلى الوتد C، وننجز هذه المهمة بعدد من النقلات يساوي a_{n-1}. ويمكن برهان أن الخوارزمية السابقة هي الخوارزمية المثلى لنقل جميع الأقراص من الوتد A إلى الوتد C. إذن $a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1}$، وبالتالي فإن $a_n = 2a_{n-1} + 1$ لكل $n \geq 2$. كذلك $a_1 = 1$؛ وإذا اصطلحنا على أن $a_0 = 0$ فيكون

$a_n = 2a_{n-1} + 1,\ n \geq 1$ حيث $a_0 = 0$.

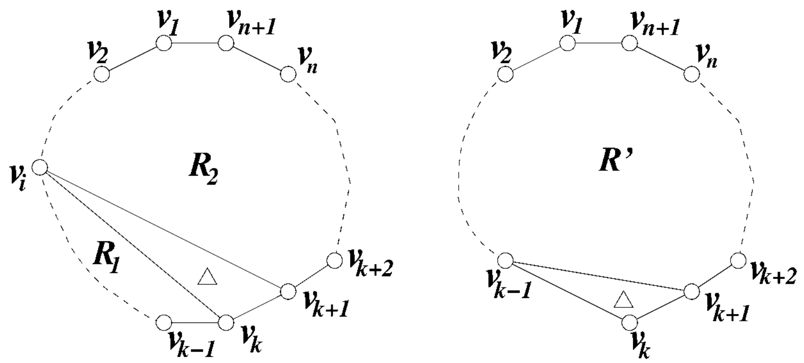
تظهر أعداد كتلان Catalan numbers في كثير من مسائل العد. ولتقديم هذه الأعداد فإننا نختار مقاربة هندسية. إذا كانت لدينا منطقة مضلعة محدبة، وقسمناها إلى مناطق مثلثة مستخدمين أقطاراً غير متقاطعة زوجاً زوجاً داخلها، فإننا نسمي مجموعة المناطق المثلثة **مثالثة** Triangulation للمنطقة المضلعة.

مثال(٤,١٩)

لكل عدد صحيح $n \geq 2$، لترمز t_n إلى عدد مثالثات منطقة مضلعة محدبة عدد أضلاعها $n+1$. ولنعرف $t_0 = 0, t_1 = 1$. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (t_n)، ثم أوجد صيغة جبرية مختصرة للحد العام t_n.

الحل

نجد بسهولة أن $t_2 = 1$. نفرض الآن أن $n \geq 3$ ، ولتكن R منطقة محدبة عدد أضلاعها $n+1$ ورؤوسها النقاط $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ كما يوضح الشكل التالي:



نختار ضلعاً $[v_k v_{k+1}]$ ، مثلاً، ونثبته. إذا كانت T مثالثة للمنطقة R ، فإن $[v_k v_{k+1}]$ يكون ضلعاً لمنطقة مثلثة Δ من مناطق T ويكون أحد الرؤوس $v_i,\ i \neq k,\ i \neq k+1$ رأساً لـ Δ. واضح أن Δ تقسم المنطقة المتبقية من R إلى منطقتين مضلعتين محدبتين R_1 و R_2 عندما يكون $i \neq k+2$ و $i \neq k-1$. أما إذا كان $i = k+2$ أو $i = k-1$ فإن R تنقسم إلى Δ وإلى منطقة مضلعة محدبة أخرى R'. ومن هنا فإن عدد أضلاع R_1 يساوي $j+1$ وعدد أضلاع R_2 يساوي $n-j+1$ حيث j يساوي أحد الأعداد $2,3,\ldots,n-2$ ،وعدد أضلاع R' يساوي n. واضح أن T تعطينا مثالثات لكل من R' و R_2 و R_1 ، وإذا كان لدينا مثالثات لكل من R' و R_2 و R_1 ، فإننا نحصل على مثالثة للمنطقة R. وبما أن عدد أضلاع R' و R_2 و R_1 يساوي n و $n-j+1$ و $j+1$ على الترتيب فإن عدد مثالثات R' و R_2 و

R_1 يساوي t_{n-1} و t_{n-j} و t_j على الترتيب. وبالتالي، عدد مثالثات R يساوي $t_j t_{n-j}$ عندما يكون $i \neq k+2$ و $i \neq k-1$ ؛ كما أن عدد مثالثات R يساوي t_{n-1} عندما يكون $i = k+2$ أو $i = k-1$. إذن، t_n ، أي عدد مثالثات R ، يحقق العلاقة $t_n = t_{n-1} + t_2 t_{n-2} + t_3 t_{n-3} + \cdots + t_{n-2} t_2 + t_{n-1}$ لكل $n \geq 3$. وبما أن $t_0 = 0, t_1 = 1$ فإن t_n تحقق لكل $n \geq 3$ العلاقة

$$t_n = t_0 t_n + t_1 t_{n-1} + t_2 t_{n-2} + \cdots + t_{n-2} t_2 + t_{n-1} t_1 + t_n t_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

ولما كانت $t_2 = 1$ فإن (*) تتحقق لكل $n \geq 2$. ونخلص إلى أن المتتالية (t_n) تحقق

$$t_n = t_0 t_n + t_1 t_{n-1} + t_2 t_{n-2} + \cdots + t_n t_0 \,, \;\; n \geq 2$$

$$t_0 = 0, \; t_1 = 1$$

ولإيجاد t_n نستخدم طريقة الدوال المولدة. في الحقيقة ، لتكن $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n$ هي الدالة المولدة للمتتالية (t_n). عندئذٍ،

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n = t_0 + t_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} t_n x^n = t_0 + t_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (t_0 t_n + t_1 t_{n-1} + \cdots + t_n t_0) x^n$$

$$= t_0 + t_1 x + f(x) f(x) + t_0 t_0 - (t_0 t_1 + t_1 t_0) x = x + (f(x))^2$$

إذن $(f(x))^2 - f(x) + x = 0$

ومنه $f(x) = \dfrac{1 \mp \sqrt{1-4x}}{2}$ وبما أن $f(0) = t_0 = 0$ ، فإن $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$.

والآن نجد مفكوك $f(x)$ باستخدام متسلسلة ذات الحدين كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-4x)^{\frac{1}{2}}\ =\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4x)^n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^n\binom{\frac{1}{2}}{n}x^n$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n4^n\binom{\frac{1}{2}}{n}x^n]=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}4^n\binom{\frac{1}{2}}{n}x^n$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}4^n\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}4^n\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\cdots(\frac{-2n+3}{2})}{n!}x^n$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}4^n\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\frac{1.3.5\cdots(2n-3)}{n!}x^n$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\frac{1.2.3\cdots(2n-3)(2n-2)}{2.4.6\cdots(2n-2)}x^n=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!2^{n-1}}x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n$$

إذن $t_n=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ لكل $n\geq 1$. وتسمى المتتالية (c_n) ، حيث $c_n=t_{n+1}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ لكل $n\geq 0$ ، متتالية أعداد كتلان.

تمارين

١- تسمى الكلمات التي حروفها من الأبجدية $\{0,1\}$ كلمات ثنائيـة. لترمـز a_n إلى عدد الكلمات الثنائية التي طول كل منهـا n والـتي تحتـوي علـى النـسق 00. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n) ، أوجد الشروط الابتدائية ، ثم أوجد الحل.

٢- لترمز b_n إلى عدد الكلمات الثنائية التي طول كل منها n والتي تحتوي على النسق 000. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (b_n)، أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل.

٣- لتكن $A=\{1,2,\ldots,n\}$ عندما $n>0$ و $A=\phi$ عندما $n=0$. ولترمز a_n إلى عدد المجموعات الجزئية من A التي لا تحتوي على عددين صحيحين متعاقبين. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n)، أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل.

٤- تسمى الكلمة التي حروفها من الأبجدية $\{0,1,2,3\}$ كلمة رباعية. لترمز a_n إلى عدد الكلمات الرباعية التي طول كل منها n والتي تحتوي على عدد زوجي من الحرف 0. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n)، أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل.

٥- لترمز a_n إلى عدد الكلمات الرباعية التي طول كل منها n والتي تحتوي على عدد زوجي من الحرف 0 وعدد زوجي من الحرف 3. أوجد نظاماً من العلاقات الارتدادية يربط (a_n) بأمثالها من المتتاليات المعرفة بناءً على زوجية أو فردية تكرار الحروف في كلماتها. أوجد الشروط الابتدائية.

٦- (أ) أوجد الحل لتمرين (١) بعد استبدال (تحتوي) بِـ (لا تحتوي).

(ب) أوجد علاقة بين المتتالية (a_n) المعطاة في (أ) ومتتالية فيبوناتشي (b_n).

(ج) استند إلى (ب) واستخدم عدد الكلمات الثنائية التي طول كل منها n والتي تكرار الحرف 0 فيها يساوي k لإثبات أن

$$f_{n+1} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \binom{n+1-k}{k}, \;\; n \geq 1$$

٧- أوجد الحل لتمرين (٢) بعد استبدال (تحتوي) بـ (لا تحتوي).

٨- تسمى الكلمة التي حروفها من الأبجدية $\{0,1,2\}$ كلمة ثلاثية. أوجد الحلول للتمارين (١)، (٢)، (٦أ)، (٧) عندما تكون الكلمات ثلاثية.

٩- يقال عن مجموعة الدوائر إنها في وضع عام في مستوى إذا كانت تقع في المستوى بحيث تتقاطع زوجاً زوجاً في نقطتين ولا تتقاطع ثلاثاً ثلاثاً في أية نقطة. لترمز a_n إلى عدد المناطق الناشئة عن n من الدوائر التي هي في وضع عام في المستوى. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n)، أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل.

١٠- أوجد الحل لمسألة أبراج هانوي عندما يكون عدد الأوتاد أربعة.

١١- أوجد الحل للتمرين (٥) عندما تكون الكلمات ثنائية.

١٢- أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n)، أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل عندما يكون

(أ) $a_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$

(ب) $a_n = 1\times 2 + 2\times 3 + \cdots + n(n+1)$

(ج) $a_n = 1 + 3 + 9 + \cdots + 3^n$

١٣- تسمى دائرة على سطح كروي دائرة كبرى إذا كان مركزها هو مركز الكرة نفسه. لترمز a_n إلى عدد المناطق على السطح الكروي الناتجة عن n من الدوائر الكبرى التي لا تتقاطع ثلاثاً ثلاثاً في أية نقطة. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n)، أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل.

١٤- لترمز a_n إلى عدد تباديل المجموعة $\{1,2,\ldots,n\}$ التي يجعل كل منها كل عدد في موضعه الطبيعي أو في الموضع الذي يسبق مباشرة موضعه الطبيعي أو في الموضع الذي يلي مباشرة موضعه الطبيعي. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n) ، أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل.

١٥- يستطيع روبت (أي، إنسان آلي) أن يتحرك إلى الأمام بخطوات كل منها متر أو متران. لترمز a_n إلى عدد الطرق التي يقطع بها هذا الروبت مساراً طوله n متراً. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n) ، أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل.

١٦- إذا كانت $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ و $A^n=\begin{bmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{bmatrix}$ فأوجد علاقات ارتدادية تربط بين المتتاليات (a_n) ، (b_n) ، (c_n) ، (d_n) واستخدم تلك العلاقات لحساب A^{100}.

١٧- لتكن $B_n=\{1,2,\ldots,n\}$ ، ولتكن $a_n=|A_n|$ حيث $A_n=\{(a,b,c)\in B_n\times B_n\times B_n : a<b<c, b-a=c-b\}$. أثبت أن $a_{2n+1}=a_{2n}+n$ وأوجد علاقة مشابهة تربط بين a_{2n} و a_{2n-1} ، ثم أثبت أن المتتالية (a_n) تحقق العلاقة $a_n=a_{n-2}+n-2$. أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل.

١٨- لتكن المصفوفة $A_n=[a_{ij}]$ مصفوفة من النوع $n\times n$ بحيث كل عنصر قطري فيها يساوي 2 وكل عنصر يقع فوق أو تحت القطر مباشرة يساوي 1 بينما كل عنصر آخر يساوي صفراً. إذا كانت $d_n=\det(A_n)$ ، فأوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (d_n) ، أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل.

١٩– لدينا $2n$ نقطة $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ موزعة على محيط دائرة بحيث تكون رؤوس مضلع منتظم. لترمز a_n إلى عدد تجزئات المجموعة $\{P_1, P_2, \ldots, P_{2n}\}$ إلى أزواج بحيث لا تتقاطع الأوتار المعينة بأزواج التجزئة زوجاً زوجاً. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n)، أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل وقارنه بأعداد كتلان.

٢٠– لترمز a_n إلى عدد تجزئات المجموعة $\{1,2,\ldots,n\}$ بحيث تكون أجزاء التجزئة أزواجاً أو مجموعات أحادية. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n)، أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل مستخدماً طريقة الدوال المولدة الأسية.

٢١– أوجد الحل العام لكل من العلاقات الارتدادية التالية؛ وإذا كانت الجذور المميزة أعداداً مركبة فاكتب الحل العام معتبراً الثوابت الاختيارية أعداداً مركبة.

(أ) $a_n - 4a_{n-1} + 3a_{n-2} = 0$

(ب) $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$

(ج) $a_n + 3a_{n-2} = 0$

(د) $a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0$

(هـ) $a_n + 10a_{n-1} + 32a_{n-2} + 32a_{n-3} = 0$

(و) $a_n + 3a_{n-1} + 3a_{n-2} + a_{n-3} = 0$

(ز) $4a_n - 20a_{n-1} + 17a_{n-2} - 4a_{n-3} = 0$

(ح) $a_n + 6a_{n-1} + 12a_{n-2} + 8a_{n-3} = 0$

(ط) $a_n - 3a_{n-1} + 4a_{n-2} - 4a_{n-3} + 3a_{n-4} - a_{n-5} = 0$

٢٢- أوجد حل كل من المسائل التالية؛ وإذا كانت الجذور المميزة أعداداً مركبة فاستخدم الصيغة المثلثية للأعداد المركبة لكتابة الحل في شكل بسيط.

(أ) $a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} = 0$ حيث $a_0 = 0, a_1 = 3$.

(ب) $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$ حيث $a_0 = 1, a_1 = 6$.

(ج) $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 0$ حيث $a_0 = 0, a_1 = 2$.

(د) $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$ حيث $a_0 = 1, a_1 = 1$.

(هـ) $a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} - a_{n-3} = 0$ حيث $a_0 = 2, a_1 = 1, a_2 = 1$.

(و) $a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$ حيث $a_0 = 1, a_1 = 2$.

(ز) $a_n - 2\cos(\alpha)a_{n-1} + a_{n-2} = 0$ حيث $a_0 = 1, a_1 = \cos(\alpha)$.

(ح) $a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$ حيث
$a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 15$.

(ط) $a_n - a_{n-4} = 0$ حيث $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -1, a_3 = 1$.

(ي) $a_n - 7a_{n-1} + 16a_{n-2} - 12a_{n-3} = 0$ حيث
$a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 0$.

(ك) $a_n - 2a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$ حيث $a_0 = 2, a_1 = 0$.

(ل) $a_n + a_{n-2} = 0$ حيث $a_0 = 0, a_1 = 3$.

(م) $a_n + 4a_{n-2} = 0$ حيث $a_0 = 1, a_1 = 1$.

(ن) $a_n + 2a_{n-2} + a_{n-4} = 0$ حيث $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$.

٢٣- أوجد حلاً خاصاً لكل من العلاقات الارتدادية التالية

(أ) $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 3n + 2$

ب) $a_n + 3a_{n-1} = 4^n$

ج) $a_n - a_{n-1} = 2n^2 - n - 1$

د) $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = n + 2^n$

هـ) $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = (-2)^n$

و) $a_n + a_{n-1} - 2a_{n-2} = n - 2$

ز) $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 27(5^n)$

ح) $4a_{n+2} - a_n = 3\cos(n\frac{\pi}{2})$ [إرشاد: ضع $a_n^{(p)} = c_1 \cos(n\frac{\pi}{2}) + c_2 \sin(n\frac{\pi}{2})$]

٢٤- أوجد الحل لكل من المسائل التالية:

أ) $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 3$ **حيث** $a_0 = 1, a_1 = 1$.

ب) $a_n - 2a_{n-1} = n^2$ **حيث** $a_0 = 1$.

ج) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 2^n$ **حيث** $a_0 = 1, a_1 = 2$.

د) $a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 5(2^{n+1})$ **حيث** $a_0 = 2, a_1 = -1$.

هـ) $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2$ **حيث** $a_0 = 1, a_1 = 0$.

و) $a_n + 2a_{n-1} = 2^n - n^2$ **حيث** $a_0 = 1$.

ز) $a_n - 2a_{n-1} = 2^{n-1}$ **حيث** $a_0 = 2$.

ح) $a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} = 8(3^{n-2}) + 3(2^{n-2})$ **حيث** $a_0 = -3, a_1 = -15$.

ط) $a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = 2^n$ **حيث** $a_0 = 1, a_1 = 2$.

٢٥- أوجد الحل لكل من المسائل التالية:

(أ) $a_n + na_{n-1} = n!$ حيث $a_0 = 1$.

(ب) $a_n - 2na_{n-1} = n$ حيث $a_0 = 2$.

(ج) $a_n - 2^{-n} a_{n-1} = 1$ حيث $a_0 = 1$.

(د) $a_n^3 - 2a_{n-1}^3 = 1$ حيث $a_0 = 1$.

(هـ) $a_{n+2}^2 - 5a_{n+1}^2 + 6a_n^2 = 7n$ حيث $a_0 = 1, a_1 = 1$.

(و) $a_n^2 - 2a_{n-1} = 0$ حيث $a_0 = 4$. [إرشاد: ضع $b_n = \log_2 a_n$]

(ز) $na_n + (n-1)a_{n-1} = 2^n$ حيث $a_0 = 273$.

(ح) $a_n - na_{n-1} = n!$ حيث $a_0 = 2$.

٢٦- استخدم الدوال المولدة لحل المسائل التالية:

(أ) $a_n - a_{n-1} = n$ حيث $a_0 = 1$.

(ب) $a_n - 2a_{n-1} = 4^{n-1}$ حيث $a_0 = 1$.

(ج) $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 2^n + n$ حيث $a_0 = 1, a_1 = 1$.

(د) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$ حيث $a_0 = 0, a_1 = 1$.

(هـ) $a_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1}, b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$ حيث $a_0 = 1, b_0 = 0$.

(و) $a_{n+1} = 2a_n + b_n + c_n, b_{n+1} = b_n - c_n + 4^n, c_{n+1} = c_n - b_n + 4^n$ حيث $a_0 = 1, b_0 = 0, c_0 = 0$.

(ز) $a_{n+1} = 5a_n + 6b_n + 1, b_{n+1} = -6a_n - 7b_n - 1$ حيث $a_0 = \frac{3}{2}, b_0 = \frac{-3}{2}$.

[ملاحظة: الحل ممكن بطريقة الحذف حيث نجد a_{n+2} من العلاقة الأولى ثم نعوض عن b_{n+1} وعن b_n فنحصل على علاقة للمتتالية (a_n) فقط.]

(ح) $a_0a_n + a_1a_{n-1} + a_2a_{n-2} + \cdots + a_na_0 = 2^n a_n$ حيث $a_0 = 1, a_1 = 1$.

(ط) $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$ حيث $a_0 = 1, a_1 = 1$.

(ي) $a_n = 2a_{n-1} + \frac{2^n}{n}$ حيث $a_0 = 1$.