الفصل الخامس

مبدأ برج الحمام وأعداد رمزي

THE PIGEONHOLE PRINCIPLE AND RAMSEY NUMBERS

(٥,١) مبدأ برج الحمام

إن مبدأ برج الحمام بسيط ولكنه أداة فعّالة عندما نحاول إثبات أنه يوجد حل لمسألة تركيبية. وهذا المبدأ لا يرشدنا إلى كيفية الحصول على حل ولا يعطينا عدد الحلول الممكنة ولكنه يخبرنا أنه يوجد حل، على الأقل، للمسألة المعالجة.

مبرهنة(٥,١) (مبدأ برج الحمام)

إذا وزّعنا m كرة على n صندوقاً وكان $m > n$ ، فإنه يوجد صندوق يحتوي على $1+\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor$ كرة على الأقل.

البرهان

نفرض أن كل صندوق يحتوي على $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor$ كرة على الأكثر. إذن يكون عدد الكرات أصغر من أو يساوي $n\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor \le n\left(\frac{m-1}{n}\right) = m-1$. وهذا يناقض أن عدد الكرات m. □

هنالك صياغات متعددة لهذا المبدأ، ويمكن التعبير عنه بلغة المجموعات كما يلي:

إذا كان $f: A \to B$ تطبيقاً بحيث $|A| = m, |B| = n, m > n$ وإذا رمزنا للصورة العكسية لأي عنصر $y \in B$ بالرمز $f^{-1}(y)$، فإنه يوجد $b \in B$ بحيث $f^{-1}(b) \geq \left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1$.

مثال(٥,١)

إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، فإن كل مجموعة جزئية $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ عدد عناصرها $n+1$ من المجموعة $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ يجب أن تحتوي على:

(أ) عددين أوليين نسبياً. (ب) عددين يقسم أحدهما الآخر.

الحل

(أ) نكون مجموعة الأزواج $A = \{(1,2), (3,4), \ldots, (2n-1, 2n)\}$. لاحظ أن $|A| = n$. إذن يكون لدينا $n+1$ كرة (الأعداد a_i) نريد توزيعها على n صندوقاً (الأزواج $(j, j+1)$). بتطبيق مبدأ برج الحمام نجد أنه يوجد صندوق يحتوي على كرتين على الأقل، وبالتالي يحتوي على كرتين بالضبط. إذن تحتوي المجموعة $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ على عددين متعاقبين $2k-1, 2k$ وهما أوليان نسبياً.

(ب) لكل $1 \leq j \leq n+1$ ليكن $a_j = b_j 2^{i_j}$ حيث b_j عدد فردي، ولتكن $B = \{1, 3, \ldots, 2n-1\}$. لاحظ أن $|B| = n$ وأن $b_j \in B$ لكل j. بما أن عدد عناصر $\{b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}\}$ يساوي $n+1$ وبما $|B| = n$، فإنه يوجد $k \neq m$ بحيث $b_k = b_m$. وبالتالي فإن $a_m = b_m 2^{i_m} = b_k 2^{i_m}$ وبما أن $a_k = b_k 2^{i_k}$، فإن a_k أو a_m يقسم الآخر.

إذا كان عدد الكرات الموزعة يزيد على عدد الصناديق بواحد، فإنه ينتج من مبدأ برج الحمام أنه يوجد صندوق يحتوي على كرتين على الأقل. المبرهنة التالية تعطينا تعميماً بسيطاً لهذه النتيجة.

مبرهنة(٥,٢)

إذا كانت $m_1, m_2, \ldots, m_n$ أعداداً صحيحة موجبة ووزعنا $m_1 + m_2 + \ldots + m_n - n + 1$ كرة على n صندوقاً، فإنه إما أن يحتوي الصندوق الأول على m_1 كرة على الأقل أو أن يحتوي الصندوق الثاني على m_2 كرة على الأقل، ...، أو أن يحتوي الصندوق رقم n على m_n كرة على الأقل.

البرهان

نفرض أن الصندوق رقم k يحتوي على $m_k - 1$ كرة على الأكثر، لكل $1 \le k \le n$.

إذن يكون عدد الكرات أصغر من أو يساوي

$(m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \ldots + (m_n - 1) = m_1 + m_2 + \ldots + m_n - n$ وهذا يناقض أن عدد الكرات يساوي $m_1 + m_2 + \ldots + m_n - n + 1$.

مثال(٥,٢)

إذا كانت $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ متتالية من الأعداد الحقيقية المختلفة، فإنه توجد متتالية جزئية متزايدة طولها $n+1$ أو توجد متتالية جزئية متناقصة طولها $n+1$.

الحل

لكل $1 \le i \le n^2 + 1$ نفرض أن t_i يساوي طول أطول متتالية جزئية متزايدة تبدأ بالعدد a_i. إذا كان أي t_i أكبر من أو يساوي $n+1$ فإننا نحصل على المطلوب. لذلك نفرض أن $1 \le t_i \le n$ لكل i. إذن يكون لدينا $n^2 + 1$ كرة (الأعداد t_i) نريد

توزيعها على n صندوقاً (الأعداد $1,2,\ldots,n$). بتطبيق مبدأ برج الحمام نجد أنه يوجد صندوق يحتوي على $\left\lfloor \frac{n^2+1-1}{n} \right\rfloor +1 = n+1$ كرة على الأقل. أي، يوجد على الأقل $n+1$ من الأعداد t_i بحيث تكون متساوية. سنثبت أن الأعداد a_i المصاحبة لهذه الأعداد t_i تكوّن متتالية جزئية متناقصة. نفرض أن $t_i = t_j$ حيث $i<j$. سنثبت أن $a_i > a_j$. إذا كان $a_i \le a_j$، فإن $a_i < a_j$ لأن حدود المتتالية المعطاة مختلفة. إذن المتتالية الجزئية المكونة من a_i متبوعاً بأطول متتالية جزئية تبدأ بالعدد a_j تعطينا متتالية جزئية متزايدة طولها t_j+1. إذن $t_i \ge t_j + 1$، وهذا يناقض الفرض أن $t_i = t_j$.

تمارين (٥,١)

١– نقول إن A نقطة شبكية عندما تكون إحداثياتها أعداداً صحيحة.

(أ) إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_5$ خمس نقاط شبكية مختلفة في المستوى، فأثبت أنه توجد بينها نقطتان بحيث تكون نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي تصلهما شبكية.

(ب) إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_9$ تسع نقاط شبكية مختلفة في الفضاء $\mathbb{R}^3$، فأثبت أنه توجد بينها نقطتان بحيث تكون نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي تصلهما شبكية.

٢– أثبت أنه إذا رتبت الأعداد $1,2,\ldots,36$ عشوائيا بشكل دائري، فإنه توجد ثلاثة أعداد متعاقبة يكون مجموعها أكبر من أو يساوي 56.

٣- تم تشغيل جهاز تكييف لمدة 300 ساعة خلال فترة 15 يوماً. أثبت أنه توجد ثلاثة أيام متعاقبة شغل خلالها الجهاز لمدة 60 ساعة على الأقل.

٤- عمل سائق سيارة لمدة 81 ساعة خلال فترة 10 أيام. أثبت أنه يوجد يومان متعاقبان عمل خلالهما السائق لمدة 17 ساعة على الأقل.

٥- لتكن $\sim$ علاقة تكافؤ معرفة على $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ كما يلي: $(a,b)\sim(c,d)$ إذا وفقط إذا كان $a\equiv c \bmod n$ و $b\equiv d \bmod n$. جد أقل عدد من الأزواج المرتبة بحيث ينتمي زوجان مرتبان على الأقل إلى فصل التكافؤ نفسه.

٦- تتكون الأبجدية الإنجليزية من 21 حرفاً صحيحاً و 5 حروف علّة.

(أ) أثبت أن أي تبديل لحروف هذه الأبجدية يجب أن يحتوي على 4 حروف صحيحة متعاقبة.

(ب) أثبت أن أي توزيع لحروف هذه الأبجدية على محيط دائرة يجب أن يحتوي على 5 حروف صحيحة متعاقبة.

٧- تدرب لاعب شطرنج لمدة 77 يوماً. وكان يلعب مباراة واحدة في اليوم على الأقل، لكنه لم يلعب أكثر من 132 مباراة طوال فترة التدريب. اثبت أنه توجد أيام متعاقبة خاض خلالها اللاعب 21 مباراة بالضبط.

٨- إذا كان $G=(V,E)$ رسماً (بسيطاً منتهياً) بحيث $|V|\geq 2$، فأثبت أنه يوجد رأسان $x,y\in V$ بحيث $\deg(x)=\deg(y)$.

٩- إذا كانت C_{10} دورة في رسم ما، وإذا عنونت رؤوسها عشوائياً بالأعداد $1,2,\ldots,10$، فأثبت أنه توجد 3 رؤوس متعاقبة مجموع عناوينها أكبر من أو يساوي 17.

١٠- إذا كانت $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ نقاطاً في المستوى بحيث $n \geq 2$ ، وإذا كانت أي ثلاث منها غير متسامتة (أي، لا يمر بها مستقيم) وإذا كانت n^2+1 من القطع المستقيمة تصل بين هذه النقاط،فأثبت أن الشكل يحتوي على مثلث. [إرشاد: استخدم الاستقراء الرياضي على n و مبدأ برج الحمام].

١١- إذا صبغت أضلاع الرسم التام K_6 باللونين الأحمر والأزرق، فأثبت أنه توجد دورة ثلاثية بحيث يكون لإضلاعها اللون عينه.

١٢- إذا كان f تبديلاً ينتمي إلى زمرة التناظر $(S_n, \circ)$ ، فأثبت أنه يوجد عددان صحيحان موجبان i, j بحيث $f^i = f^j$ ، ثم استنتج أنه يوجد عدد صحيح موجب k بحيث f^k يساوي التبديل المحايد.

١٣- إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، فأثبت أنه يوجد عدد صحيح موجب m يقبل القسمة على n بدون باقٍ ويحتوي تمثيله العشري على الرقمين $7,0$ فقط.

١٤- لتكن $a_1, a_2, \dots, a_m$ متتالية من الأعداد الصحيحة الموجبة بحيث تحتوي بالضبط على n من الحدود المختلفة. إذا كان $m \geq 2^n$ ، فأثبت أنه توجد متتالية جزئية حدودها متعاقبة في المتتالية الأصلية بحيث يكون حاصل ضرب حدودها مربعاً كاملاً.

١٥- إذا كانت $a_1, a_2, \dots, a_{mn+1}$ متتالية من الأعداد الحقيقية المختلفة، فأثبت أنه إما توجد متتالية جزئية متزايدة طولها $n+1$ أو توجد متتالية جزئية متناقصة طولها $m+1$.

١٦- لتكن $a_1, a_2, \dots, a_{mn+1}$ متتالية من الأعداد الصحيحة الموجبة بحيث $a_1 < a_2 < \dots < a_{mn+1}$. أثبت أنه إما توجد متتالية جزئية عدد حدودها $m+1$

بحيث أي حد من حدودها لا يقسم أي حد آخر أو توجد متتالية جزئية عدد حدودها $n+1$ بحيث يقسم كل حد من حدودها الحد الذي يليه.

١٧- مثلث متطابق الأضلاع، طول ضلعه 2سم. ما هو أكبر عدد من النقاط التي يمكن اختيارها من بين النقاط التي تقع داخل المثلث وعلى أضلاعه بحيث تكون المسافة بين كل زوج من النقاط المختارة أكبر من 1 سم؟

١٨- مربع طول ضلعه 2سم. ما هو أكبر عدد من النقاط التي يمكن اختيارها من بين النقاط التي تقع داخل المربع وعلى أضلاعه بحيث تكون المسافة بين كل زوج من النقاط المختارة أكبر من $\sqrt{2}$ سم؟

١٩- لتكن $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_6\}\subset\mathbb{Z}^+$ مجموعة مؤلفة من 6 أعداد صحيحة موجبة مختلفة بحيث $\max(A)\leq 14$. لكل $\phi\subset X\subseteq A$، نجد مجموع الأعداد المنتمية إلى X. أثبت أن الأعداد الناتجة لا يمكن أن تكون مختلفة.

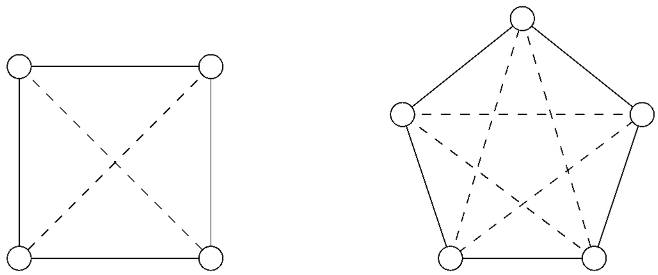
٢٠- لتكن $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_5\}\subset\mathbb{Z}^+$ مجموعة مؤلفة من 5 أعداد صحيحة موجبة مختلفة بحيث $\max(A)\leq 9$. لكل $\phi\subset X\subseteq A$، نجد مجموع الأعداد المنتمية إلى X. أثبت أن الأعداد الناتجة لا يمكن أن تكون مختلفة.

(٥,٢) أعداد رمزي

إذا صبغت أضلاع الرسم التام K_6 باللونين الأحمر والأزرق، فإنه يمكن استخدام مبدأ برج الحمام لإثبات أنه توجد دورة ثلاثية أحادية اللون. في الحقيقة، نختار أي رأس v في K_6 فيكون $\deg(v)=5$. إذن، لدينا 5 كرات (الأضلاع الساقطة على v) نريد توزيعها على صندوقين (اللونين الأحمر والأزرق). ينتج من

مبدأ برج الحمام أنه يوجد على الأقل $\left\lfloor \frac{5-1}{2} \right\rfloor + 1 = 3$ أضلاع أحادية اللون ساقطة على v. أي، توجد ثلاثة أضلاع، ولتكن $\{v,a\},\{v,b\},\{v,c\}$ ، لها اللون نفسه، وليكن الأحمر مثلاً. الآن، إذا كان أحد أضلاع الدورة الثلاثية التي رؤوسها a,b,c مصبوغاً باللون الأحمر فإننا نحصل على مثلث أحمر وإلا فإننا نحصل على مثلث أزرق.

نلاحظ أنه يمكن صبغ أضلاع كل من K_4 و K_5 باللونين الأحمر والأزرق بحيث لا نحصل على مثلث أحادي اللون. على سبيل المثال، إذا مثلنا اللون الأحمر بخط متصل و اللون الأزرق بخط متقطع، فإن كلاً من الرسمين التاليين لا يحتوي على مثلث أحادي اللون.



K_5 $\quad$ K_4

كما نلاحظ أنه إذا صبغنا أضلاع K_n بلونين، فإنه لكل $n \geq 6$ لا بد أن يحتوي K_n على مثلث أحادي اللون، لأن K_n يحتوي على نسخة من K_6 لكل $n \geq 6$.

مما سبق نستنتج أنه إذا صبغنا أضلاع K_n بلونين، فإن أصغر عدد n يضمن لنا احتواء K_n على مثلث أحادي اللون يساوي 6. ونقول إن العدد 6 له خاصة رمزي من النوع $(3,3)$ والعدد 5 ليس له هذه الخاصة كما نقول إن العدد 6 أحد أعداد رمزي. وأكثر تحديداً نقول إن 6 هو عدد رمزي من النوع $(3,3)$ ونكتب $R(3,3)=6$.

تعريف(٥,١)

لتكن i,j,m أعداداً صحيحة موجبة بحيث $i \geq 2,\ j \geq 2$. نقول إن m له خاصة رمزي من النوع (i,j) إذا تحقق ما يلي: كلما صبغنا أضلاع K_m باللونين الأحمر والأزرق، فإنه إما أن يحتوي K_m على K_i أحمر اللون أو أن يحتوي K_m على K_j أزرق اللون.

تعريف (٥,٢)

ليكن i,j عددين صحيحين بحيث $i \geq 2,\ j \geq 2$. يسمى أصغر عدد صحيح موجب له خاصة رمزي من النوع (i,j) بعدد رمزي من النوع (i,j) ويرمز له بالرمز $R(i,j)$.

نهدف الآن إلى إثبات أن العدد $R(i,j)$ موجود لكل $i \geq 2,\ j \geq 2$، وسنصل إلى ذلك عبر النتائج التالية.

تمهيدية(٥,١)

(أ) إذا كان n له خاصة رمزي من النوع (i,j) وكان $m>n$ فإن m له خاصة رمزي من النوع (i,j).

(ب) إذا كان n ليس له خاصة رمزي من النوع (i,j) وكان $m<n$ فإن m ليس له خاصة رمزي من النوع (i,j).

(ج) إذا كان $i \geq k$ ووجد $R(i,j)$، فإن $R(i,j) \geq R(k,j)$.

(د) $R(i,j) = R(j,i)$ كلما وجد $R(i,j)$.

(هـ) $R(2,k) = 2$ لكل $k \geq 2$.

البرهان

نترك البرهان كتمرين بسيط للقارئ.

تمهيدية(٥,٢)

إذا كان i,j عددين صحيحين بحيث $i \geq 3,\ j \geq 3$ ووجد $R(i-1,j)$ و $R(i,j-1)$، فإن $R(i,j)$ موجود ويحقق $R(i,j) \leq R(i,j-1) + R(i-1,j)$.

البرهان

ضع $n = R(i,j-1) + R(i-1,j)$. يكفي أن نثبت أن n له خاصة رمزي من النوع (i,j). اصبغ كل ضلع في K_n إما باللون الأحمر أو باللون الأزرق، وافرض أن v أحد رؤوس K_n. عرّف مجموعتي الرؤوس المنفصلتين D,F كما يلي: $x \in D$ إذا كان الضلع $\{v,x\}$ أحمر اللون و $x \in F$ إذا كان الضلع $\{v,x\}$ أزرق اللون. وبالتالي فإن

$$|D|+|F| = |D \cup F| = n-1 = R(i,j-1) + R(i-1,j) - 2 + 1$$

إذن، بتطبيق مبرهنة(٥,٢)، ينتج أنه إما أن يكون $|D| \geq R(i,j-1)$ أو $|F| \geq R(i-1,j)$. افرض أن $m = |D| \geq R(i,j-1)$ [البرهان مشابه في الحالة الأخرى]. إذن K_m يحتوي على K_i أحمر اللون أو على K_{j-1} أزرق اللون.

ومن $m<n$ ، ينتج أن K_n يحتوي على K_i أحمر اللون أو على K_{j-1} أزرق اللون. في الحالة الثانية، يحتوي K_n على الرسم التام $K_{j-1}+v$ الذي هو أزرق اللون. إذن، n له خاصة رمزي من النوع (i,j) . □

إن النتيجة المباشرة لمبرهنة رمزي التالية هي أن عدد رمزي $R(i,j)$ موجود لكل $i\geq 2,\ j\geq 2$.

مبرهنة(٥,٣)(مبرهنة رمزي)

إذا كان i,j عددين صحيحين بحيث $i\geq 2,\ j\geq 2$ ، فإنه يوجد عدد صحيح موجب له خاصة رمزي من النوع (i,j) .

البرهان

نستخدم الاستقراء الرياضي على n حيث $n=i+j$. من تمهيدية (٥,١) ينتج أن $R(3,2)=R(2,3)=R(2,2)=2$ ، وبالتالي فإن المطلوب صحيح عندما $n=4,n=5$. الآن نفرض أن المطلوب صحيح عند n ونثبت صحته عند $n+1$. افرض أن $n+1=i+j$. إذن، $(i-1)+j=n$,$i+(j-1)=n$. من فرضية الاستقراء ينتج أنه يوجد عدد صحيح موجب له خاصة رمزي من النوع $(i-1,j)$ كما يوجد عدد صحيح موجب له خاصة رمزي من النوع $(i,j-1)$. وبالتالي فإن كلاً من $R(i-1,j)$ و $R(i,j-1)$ موجود. الآن، بتطبيق تمهيدية (٥,٢)، نجد أن $R(i,j)$ موجود؛ أي أن المطلوب صحيح عند $n+1$. □

في بداية هذا البند استخدمنا تلوينات أضلاع K_m لتعريف خواص رمزي. ولغرض تعميم وتطوير الأفكار السابقة، فإن تعريف خاصة رمزي من نوع ما يصاغ بلغة المجموعات على النحو التالي.

تعريف (٥,٣)

لتكن i, j, m أعداداً صحيحة موجبة بحيث $i \geq 2,\ j \geq 2$. نقول إن m له خاصة رمزي من النوع $(i, j; 2)$ إذا تحقق ما يلي: إذا كانت V مجموعة عدد عناصرها m، وكانت $P = \{X, Y\}$ تجزئة لمجموعة المجموعات الجزئية من V التي عدد عناصر كل منها 2؛ فإنه إما أن توجد مجموعة جزئية I من V بحيث عدد عناصر I يساوي i وبحيث تكون مجموعة المجموعات الجزئية من I التي عدد عناصر كل منها 2 محتواة في X، أو أن توجد مجموعة جزئية J من V بحيث عدد عناصر J يساوي j وبحيث تكون مجموعة المجموعات الجزئية من J التي عدد عناصر كل منها 2 محتواة في Y.

وبناءً على ما سبق، نرمز لعدد رمزي من النوع $(i, j; 2)$ بالرمز $R(i, j; 2)$.
وبهدف التعميم لتكن $i_1, i_2, \ldots, i_n, k$ أعداداً صحيحة موجبة بحيث $i_j \geq k,\ n \geq 2$ لكل $1 \leq j \leq n$. نقول إن العدد الصحيح الموجب m له خاصة رمزي من النوع $(i_1, i_2, \ldots, i_n; k)$ إذا تحقق ما يلي: إذا كانت V مجموعة عدد عناصرها m، وكانت $P = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ تجزئة لمجموعة المجموعات الجزئية من V التي عدد عناصر كل منها k؛ فإنه يوجد j بحيث توجد مجموعة جزئية I_j من V بحيث عدد عناصر I_j يساوي i_j وبحيث تكون مجموعة المجموعات الجزئية من I_j التي عدد عناصر كل منها k محتواة في X_j. ويرمز لعدد رمزي من النوع $(i_1, i_2, \ldots, i_n; k)$ بالرمز $R(i_1, i_2, \ldots, i_n; k)$. ويمكن العودة إلى المراجع للإطلاع على المراجع التي تبين وجود هذه الأعداد؛ وسنكتفي هنا بعرض الحالة البسيطة التي تجعلنا نلاحظ أن نظرية رمزي تعميم عميق لمبدأ برج الحمام.

مبرهنة (٥,٤)

$$R(i_1,i_2,\ldots,i_n;1)=i_1+i_2+\cdots+i_n-(n-1)$$

البرهان

ضع $m=i_1+i_2+\cdots+i_n-(n-1)=i_1+i_2+\cdots+i_n-n+1$. سنثبت أولاً أن m له خاصة رمزي من النوع $(i_1,i_2,\ldots,i_n;1)$. لتكن V مجموعة عدد عناصرها m، ولتكن $P=\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$ تجزئة لمجموعة المجموعات الجزئية من V التي عدد عناصر كل منها 1؛ بالاستناد إلى مبرهنة(٥,٢) نجد أنه يوجد j بحيث $|X_j|\geq i_j$. إذن، X_j تحتوي على مجموعات جزئية عدد عناصر كل منها يساوي i_j، وباختيار أي من هذه المجموعات الجزئية على أنها I_j، نستنتج أن m له الخاصة المطلوبة. إذن، $R(i_1,i_2,\ldots,i_n;1)\leq m$. وللحصول على المساواة نثبت أن $m-1$ ليس له خاصة رمزي من النوع $(i_1,i_2,\ldots,i_n;1)$. في الحقيقة، إن $m-1=i_1+i_2+\cdots+i_n-n=(i_1-1)+(i_2-1)+\cdots+(i_n-1)$؛ وإذا كانت V مجموعة عدد عناصرها $m-1$، وكانت $P=\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$ تجزئة لمجموعة المجموعات الجزئية من V التي عدد عناصر كل منها 1 بحيث تحقق $|X_j|=i_j-1$ لكل $1\leq j\leq n$، فإنه لا توجد X_j بحيث تحتوي على مجموعة جزئية I_j عدد عناصرها i_j. □

وننهي هذا البند بالإشارة إلى أن هناك بعض النتائج التي تعطي حدوداً عليا أو حدوداً سفلى لأعداد رمزي. ولكن حساب هذه الأعداد أمر في غاية الصعوبة، كما أن المعروف منها قليل جداً.

تمارين (٥,٢)

١- أثبت تمهيدية(٥,١).

٢- إذا كانت i, j, k أعداداً صحيحة موجبة بحيث $i \geq k,\ j \geq k$ ، فأثبت أن

(أ) $R(i,k;k) = i$

(ب) $R(k,j;k) = j$

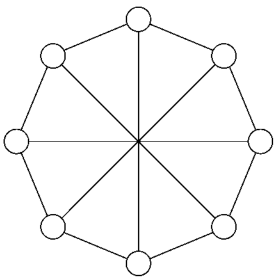
٣- ليكن i, j عددين صحيحين بحيث $i \geq 3,\ j \geq 3$. إذا كان كل من $R(i, j-1)$ و $R(i-1, j)$ عدداً زوجياً، فأثبت أن

$R(i,j) \leq R(i,j-1) + R(i-1,j) - 1$.

٤- أثبت أن $R(3,4) = 9$ كنتيجة لما يلي:

(أ) استخدم تمرين ٣ لبيان أن $R(3,4) \leq 9$.

(ب) اصبغ الرسم أدناه باللون الأحمر وبقية أضلاع الرسم K_8 باللون الأزرق، ثم استنتج أن العدد 8 ليس له خاصة رمزي من النوع $(3,4)$.



٥- أثبت أن $R(3,5) = 14$ كنتيجة لما يلي:

(أ) استخدم تمهيدية(٥,٢) وتمهيدية(٥,١) (هـ) وتمرين ٤ لبيان أن $R(3,5) \leq 14$.

(ب) أثبت أن العدد 13 ليس له خاصة رمزي من النوع $(3,5)$، وذلك باستخدام التلوين التالي لأضلاع الرسم K_{13}. لتكن $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_{13}\}$ هي مجموعة رؤوس K_{13}. لكل $1\le i,j\le 13$ اصبغ الضلع $\{v_i,v_j\}$ باللون الأحمر إذا كان $|i-j|\in\{1,5,8,12\}$ واصبغ الأضلاع المتبقية باللون الأزرق.

إذا كان i,j عددين صحيحين بحيث $i\ge 2, j\ge 2$، فأثبت أن $R(i,j)\le\binom{i+j-2}{i-1}$.