

## نظرية بوليا للعدّ

### THE POLYA THEORY OF COUNTING

في هذا الفصل، يحتاج القارئ إلى معرفة عامة بمبادئ نظرية الزمر، وإلى إلمام خاص بزمر التباديل وزمر تناظر المضلعات المنتظمة وزمر تناظر المجسمات المنتظمة. لتكن  $N$  علاقة تكافؤ على مجموعة منتهية  $A$ ، ولتكن  $A/N$  مجموعة فصول التكافؤ. غالباً ما نهتم بحساب عدد فصول التكافؤ  $|A/N|$ . إذا كان  $|A| = n$  وكان كل فصل تكافؤ يحتوي على  $m$  عنصراً فإن  $|A/N| = \frac{n}{m}$  لأن  $A/N$  تجزئة للمجموعة  $A$ . أما إذا كانت فصول التكافؤ تحتوي على أعداد مختلفة من العناصر فإن حساب  $|A/N|$  ليس بهذه البساطة. وعندما تكون علاقة التكافؤ ناتجة عن وجود تناظر ما فإن هذا التناظر يربطنا بنظرية الزمر من خلال زمر التباديل؛ ومن ثم نحصل على تقنيات لحساب  $|A/N|$ .

#### (٦,١) المدارات

لتكن  $G$  زمرة تباديل للمجموعة المنتهية  $X$ . نعرف العلاقة  $N$  على  $X$  كما يلي: لكل  $x, y \in X$  فإن  $xNy$  إذا وفقط إذا كان يوجد  $g \in G$

بحيث  $g(x) = y$ . نلاحظ أن  $N$  علاقة تكافؤ على  $X$ . نرمز لفصل التكافؤ للعنصر  $x \in X$  بالرمز  $Gx$  ونلاحظ أن  $Gx = \{g(x) : g \in G\}$ ؛ كما نسمي مدار Orbit العنصر  $x$  ونسمي فصول التكافؤ مدارات  $G$  على  $X$ . فيما يلي نتطلع إلى حساب عدد العناصر في كل مدار وإلى حساب عدد المدارات.

## مبرهنة (٦,١)

لتكن  $G$  زمرة تباديل للمجموعة المنتهية  $X$ . لكل  $x, y \in X$  نعرف المجموعة  $G(x \rightarrow y)$  كما يلي:  $G(x \rightarrow y) = \{g \in G : g(x) = y\}$ . عندئذ،

(أ)  $G(x \rightarrow x)$  زمرة جزئية من  $G$  تسمى الزمرة الجزئية المثبتة

للعنصر  $x$  (أو مُقر stabilizer العنصر  $x$ ) ويرمز لها بالرمز  $G_x$ .

(ب)  $G(x \rightarrow y) = hG_x$  لكل  $h \in G(x \rightarrow y)$

(ج)  $G(x \rightarrow y) = G_y h$  لكل  $h \in G(x \rightarrow y)$

(د) إذا كان  $G_u = G_v$  فإن  $|G_u| = |G_v|$

## البرهان

(أ) إذا كان  $g_1, g_2 \in G_x$  فإن  $(g_1 g_2)(x) = g_1(g_2(x)) = g_1(x) = x$

إذن  $g_1 g_2 \in G_x$ . وبما أن  $G$  منتهية فينتج أن  $G_x$  زمرة جزئية من  $G$ .

(ب) ليكن  $\alpha \in hG_x$ . إذن  $\alpha = h\beta$  حيث  $\beta \in G_x$ . عليه

$$\alpha(x) = (h\beta)(x) = h(\beta(x)) = h(x) = y$$

وبالتالي فإن  $\alpha \in G(x \rightarrow y)$ . إذن  $hG_x \subseteq G(x \rightarrow y)$ .

نفرض الآن أن  $d \in G(x \rightarrow y)$  إذن  $d(x) = y$  وبالتالي فإن  $h^{-1}d \in G_x$  إذن  $h^{-1}d(x) = h^{-1}(y) = x$  حيث  $h^{-1}d = \delta$  عليه  $\delta \in G_x$  إذن  $d = h\delta$  وبالتالي فإن  $d \in hG_x$  إذن  $G(x \rightarrow y) \subseteq hG_x$ .  
 (ج) ليكن  $\alpha \in G_y h$  إذن  $\alpha = \beta h$  حيث  $\beta \in G_y$  عليه  $\alpha(x) = (\beta h)(x) = \beta(h(x)) = \beta(y) = y$  وبالتالي فإن  $\alpha \in G(x \rightarrow y)$  إذن  $G_y h \subseteq G(x \rightarrow y)$ .  
 إذن  $(dh^{-1})(y) = d(h^{-1}(y)) = d(x) = y$  وبالتالي فإن  $dh^{-1} \in G_y$  إذن  $d \in G_y h$  وينتج أن  $G(x \rightarrow y) \subseteq G_y h$ .

(د) بما أن  $Gu = Gv$  فإنه يوجد  $h \in G$  بحيث  $h(u) = v$ . أي،  $h \in G(u \rightarrow v)$  إذن  $G(u \rightarrow v) \neq \phi$ . وبناءً على (ب) و (ج) فإن  $hG_u = G(u \rightarrow v) = G_v h$ . ولما كانت كل من  $G_u, G_v$  زمرة جزئية من  $G$ ، فإن  $|hG_u| = |G_u|, |G_v| = |G_v h|$  وبالتالي فإن  $|G_u| = |G_v|$ .  $\square$   
 تزودنا المبرهنة التالية بصيغة لحساب عدد عناصر المدار.

### مبرهنة (٦,٢)

إذا كانت  $G$  زمرة تبديل للمجموعة المنتهية  $X$  وكان  $x \in X$  فإن

$$|Gx| = \frac{|G|}{|G_x|}$$

### البرهان

لتكن  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ولتكن  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$ . نعرف المجموعة  $S(x) \subseteq G \times X$  كما يلي:  $S(x) = \{(g, y) : g \in G(x \rightarrow y)\}$ . نحسب الآن  $|S(x)|$  بطريقتين.

إن

$$S(x) = \{(g_1, y) : g_1(x) = y\} \cup \dots \cup \{(g_m, y) : g_m(x) = y\}$$

إذن

$$\begin{aligned} |S(x)| &= |\{(g_1, y) : g_1(x) = y\}| + \dots + |\{(g_m, y) : g_m(x) = y\}| \\ &= 1 + \dots + 1 = m = |G| \end{aligned}$$

من ناحية ثانية، إن

$$S(x) = \{(g, x_1) : g(x) = x_1\} \cup \dots \cup \{(g, x_n) : g(x) = x_n\}$$

إذن

$$\begin{aligned} |S(x)| &= |\{(g, x_1) : g(x) = x_1\}| + \dots + |\{(g, x_n) : g(x) = x_n\}| \\ &= |G(x \rightarrow x_1)| + \dots + |G(x \rightarrow x_n)| \end{aligned}$$

ومن (ب) فإن  $G(x \rightarrow y) = hG_x$  حيث  $h \in G(x \rightarrow y)$ . إذن  $G(x \rightarrow x_i) = \phi$ أو  $G(x \rightarrow x_i) = h_i G_x$  حيث  $h_i \in G(x \rightarrow y)$ . ولما كانت  $G_x$  زمرة جزئيةمن  $G$  فإن  $|h_i G_x| = |G_x|$ . وبالتالي فإن:  $|S(x)| = |Gx| |G_x|$ . إذن

$$\square \quad |Gx| = \frac{|G|}{|G_x|} \quad \text{ومنه} \quad |Gx| |G_x| = |G|$$

تزودنا المبرهنة التالية بصيغة مناسبة لحساب عدد المدارات عندما يكون

عدد عناصر زمرة التباديل صغيراً.

مبرهنة (٦,٣)

إذا كانت  $G$  زمرة تباديل للمجموعة المنتهية  $X$  وكان  $t$  هو عدد مدارات  $G$  على

$$X \quad \text{فإن} \quad t = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)| \quad \text{حيث} \quad Fix(g) = \{x \in X : g(x) = x\} \quad \text{وتسمى}$$

المجموعة المثبتة بالتبديل  $g$ .

**البرهان**

لـتكن  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ولـتكن  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$ ، ولـتكن  $D = \{y_1, y_2, \dots, y_t\}$  مجموعة ممثلات لجميع مدارات  $G$  على  $X$ . نعرف المجموعة  $E \subseteq G \times X$  كما يلي:  $E = \{(g, x) : g \in G_x\}$ . نحسب الآن  $|E|$  بطريقتين.

إن

$$E = \{(g_1, x) : g_1 \in G_x\} \cup \dots \cup \{(g_m, x) : g_m \in G_x\}$$

إذن

$$\begin{aligned} |E| &= \left| \{(g_1, x) : g_1 \in G_x\} \right| + \dots + \left| \{(g_m, x) : g_m \in G_x\} \right| \\ &= |Fix(g_1)| + \dots + |Fix(g_m)| = \sum_{g \in G} |Fix(g)| \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

من ناحية ثانية، إن

$$E = \{(g, x_1) : g \in G_{x_1}\} \cup \dots \cup \{(g, x_n) : g \in G_{x_n}\}$$

إذن

$$\begin{aligned} |E| &= \left| \{(g, x_1) : g \in G_{x_1}\} \right| + \dots + \left| \{(g, x_n) : g \in G_{x_n}\} \right| \\ &= |G_{x_1}| + \dots + |G_{x_n}| = \sum_{t \in X} |G_x| \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

من (1) و (2) ينتج أن

$$\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |Fix(g)| \dots \dots \dots (3)$$

وبما أن  $\{G_{y_1}, G_{y_2}, \dots, G_{y_t}\}$  تجزئة للمجموعة  $X$  فإن (3) تعطينا

$$\sum_{x \in G_{y_1}} |G_x| + \dots + \sum_{x \in G_{y_t}} |G_x| = \sum_{g \in G} |Fix(g)|$$

و بالاستناد إلى (د) من مبرهنة (٦,١) نجد أن

$$|Gy_1| |G_{y_1}| + \dots + |Gy_t| |G_{y_t}| = \sum_{g \in G} |Fix(g)|$$

وينتج من مبرهنة (٦,٢) أن  $|Gy_i| |G_{y_i}| = |G|$  لكل  $1 \leq i \leq t$ . وبالتالي فإن

$$|G| + \dots + |G| = \sum_{g \in G} |Fix(g)|$$

$$t |G| = \sum_{g \in G} |Fix(g)|$$

أي

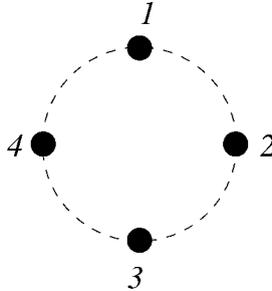
$$t = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|$$

مثال (٦,١)

لدينا طاولة دائرية وثلاث مجموعات  $D_1, D_2, D_3$  من الأطباق التي لها الشكل نفسه ولكن لون أطباق  $D_i$  هو  $C_i$  لكل  $1 \leq i \leq 3$ . نريد إعداد الطاولة لأربعة أشخاص بحيث نوزع طبقاً واحداً لكل شخص. جد عدد النماذج المختلفة للتوزيعات إذا علمت أن تدوير التوزيع لا يعطي توزيعاً مختلفاً.

الحل

لنفرض أن أماكن وضع الأطباق معنونة كما في الشكل المعطى أدناه.



نلاحظ أن عدد التوزيعات الممكنة يساوي  $3^4 = 81$ ، كما نلاحظ أن توزيعين لا يعتبران مختلفين إذا أمكن الحصول على أحدهما من الآخر بوساطة دوران. إذن، عدد النماذج المختلفة للتوزيعات يساوي عدد مدارات الزمرة الدوروية  $C_4 = \langle \sigma \rangle$  حيث نعتبر  $C_4$  زمرة دورانات الشكل المعطى أعلاه مولدة بالدورة  $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$ ، أي، زمرة تبديل لجميع التوزيعات الممكنة. يمكن الآن استخدام مبرهنة (٦,٣) لحساب المطلوب.

نلاحظ أن

$$C_4 = \{id, \sigma = (1\ 2\ 3\ 4), \sigma^2 = (1\ 3)(2\ 4), \sigma^3 = (1\ 4\ 3\ 2)\}$$

نحسب الآن  $|Fix(g)|$  لكل  $g \in G_4$ .

(أ) واضح أن  $|Fix(id)| = 81$

(ب) إن كلاً من  $\sigma$  و  $\sigma^3$  يثبت فقط التوزيعات التي تكون فيها جميع

الأطباق لها اللون نفسه، وبالتالي فإن  $|Fix(\sigma)| = |Fix(\sigma^3)| = 3$

(ج) إن  $\sigma^2$  يثبت فقط التوزيعات التي يكون فيها للطبقين 1 و 3 اللون

نفسه وللطبقين 2 و 4 اللون نفسه، وبالتالي فإن  $|Fix(\sigma^2)| = 3^2 = 9$ .

الآن نطبق مبرهنة (٦,٣) فنجد أن عدد النماذج المختلفة للتوزيعات يساوي

$$\frac{1}{4}[81 + 3 + 3 + 9] = \frac{96}{4} = 24$$

مثال (٦,٢)

لدينا ثلاث خرزات سوداء متطابقة وست خرزات بيضاء متطابقة. نريد تكوين

قلادة من هذه الخرزات. جد عدد النماذج المختلفة للقلادات التي يمكن تشكيلها إذا

علمت أنه يمكن تدوير وقلب القلادة.

## الحل

يمكن النظر إلى خرزات القلادة على أنها موزعة على رؤوس مضلع منتظم عدد رؤوسه 9. بما أن عدد طرق توزيع 3 خرزات سوداء متطابقة على 9 رؤوس يساوي  $\binom{9}{3} = 84$  فإن عدد التشكيلات الممكنة للخرزات يساوي 84. إن تدوير القلادة لا يعطينا قلادة مختلفة، كما أن قلب القلادة لا يعطينا قلادة أخرى. وبالتالي، فإن تشكيلين لا يعتبران مختلفين إذا أمكن الحصول على أحدهما من الآخر بواسطة دوران أو قلب. إذن، عدد النماذج المختلفة للقلادات يساوي عدد مدارات الزمرة الزوجية  $D_9$  عندما نعتبر  $D_9$  كزمرة تباديل لجميع التشكيلات الممكنة. يمكن الآن استخدام مبرهنة (٦,٣) لحساب المطلوب.

باستخدام رموز إثبات مبرهنة (٦,٦) نجد أن

$$D_9 = \{id, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^8, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \dots, \sigma^8\tau\}$$

$$\sigma = (1 \ 2 \ \dots \ 9) \quad \text{حيث}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 9 \\ 1 & 9 & 8 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

نحسب الآن  $|Fix(g)|$  لكل  $g \in D_9$ .

$$(أ) \text{ واضح أن } |Fix(id)| = 84$$

(ب) إن انعكاساً حول محور يمر بمركز المضلع وأحد رؤوسه يثبت 4 تشكيلات؛ فمثلاً الانعكاس حول المحور 01 يثبت التشكيلات التي تكون فيها الخرزات السوداء موزعة على الرؤوس 9,1,2 أو 8,1,3 أو 7,1,4 أو 6,1,4. ونلاحظ أن عدد هذه الانعكاسات يساوي 9.

(ج) كل من الدوران الذي زاويته  $\frac{2\pi}{3}$  راديان والدوران الذي زاويته  $\frac{4\pi}{3}$  راديان يثبت التشكيلات الثلاثة التي تكون فيها الخرزات السوداء موزعة على الرؤوس 7,1,4 أو 8,2,5 أو 9,3,6.

(د) كل من الدورانات غير المذكورة أعلاه لا يثبت أي تشكيل.

الآن نطبق مبرهنة (٦,٣) فنجد أن عدد النماذج المختلفة للقلايدات يساوي

$$\frac{1}{18} [(1)(84) + (9)(4) + (2)(3) + (6)(0)] = \frac{126}{18} = 7$$

ويمكن اعتبار القلايدات التالية ممثلات للنماذج السبعة المختلفة حيث نعيّن القلادة بالرؤوس التي تتوزع عليها الخرزات السوداء:

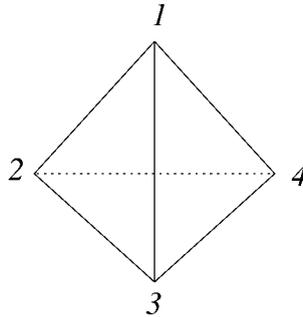
6,1,5 7,1,4 8,1,3 9,1,2 7,1,3 7,1,2 8,1,2

مثال (٦,٣)

لدينا رباعي وجوه منتظم. نريد تلوين أضلاع هذا الرباعي باستخدام الألوان الثلاثة  $c_1, c_2, c_3$ . جد عدد النماذج المختلفة للتلوينات إذا علمت أنه يمكن تدوير الرباعي في الفضاء.

الحل

لنفرض أن رؤوس الرباعي معنونة كما في الشكل التالي:



نلاحظ أن عدد التلوينات الممكنة يساوي  $3^6$ ، كما نلاحظ أن تلوينين لا يعتبران مختلفين إذا أمكن الحصول على أحدهما من الآخر بواسطة دوران. إذن، عدد النماذج المختلفة للتلوينات يساوي عدد مدارات زمرة التناوب  $A_4$  عندما نعتبر  $A_4$  كزمرة دورانات الرباعي على النحو التالي:

بالإضافة إلى التبديل المحايد  $\sigma_1 = id$  فإن كلاً من التبديل  $\sigma_2 = (12)(34)$ ،  $\sigma_3 = (13)(24)$ ،  $\sigma_4 = (14)(23)$  يمكن اعتباره دوراناً في الفضاء بزاوية مقدارها  $\pi$  راديان حول محور يمر بنقطتي المنتصف لضلعين. فمثلاً  $\sigma_2$  يمثل دوراناً حول المحور المار بنقطة منتصف الضلع 12 ونقطة منتصف الضلع 34.

أما التبديل  $\sigma_5 = (123)$ ،  $\sigma_6 = (134)$ ،  $\sigma_7 = (243)$ ،  $\sigma_8 = (142)$  فإن كلاً منها يمثل دوراناً في الفضاء بزاوية مقدارها  $\frac{2\pi}{3}$  راديان حول محور يمر بأحد الرؤوس ومركز الوجه المقابل لذلك الرأس. فمثلاً  $\sigma_7$  يمثل دوراناً حول المحور المار بالرأس 1 ومركز المثلث 243.

كذلك إن كلاً من التبديل  $\sigma_9 = (132)$ ،  $\sigma_{10} = (234)$ ،  $\sigma_{11} = (124)$ ،  $\sigma_{12} = (143)$  يمثل دوراناً في الفضاء بزاوية مقدارها  $\frac{4\pi}{3}$  راديان حول محور يمر بأحد الرؤوس ومركز الوجه المقابل لذلك الرأس. فمثلاً  $\sigma_{10}$  يمثل دوراناً حول المحور المار بالرأس 1 ومركز المثلث 243.

يمكن الآن استخدام مبرهنة (٦,٣) لحساب المطلوب، ولهذا الغرض نحسب

$$|Fix(g)| \text{ لكل } g \in A_4$$

$$(أ) \text{ واضح أن } |Fix(id)| = 3^6 = 729$$

(ب) إن التبدیل  $\sigma_2 = (12)(34)$  یثبت کلاً من الضلعین 12 و 34 و یبدل الضلعین 13 و 24 کما یبدل الضلعین 23 و 14. إذن

$$|Fix(\sigma_2)| = (3)(3)(3)(3) = 81$$

وبالمثل فإن

$$|Fix(\sigma_3)| = |Fix(\sigma_4)| = 81$$

(ج) إن التبدیل  $\sigma_5 = (123)$  یرسل الضلع 41 إلى الضلع 42 والضلع 42 إلى الضلع 43 والضلع 43 إلى الضلع 41؛ کما أن  $\sigma_5$  یرسل الضلع 12 إلى الضلع 23 والضلع 23 إلى الضلع 31 والضلع 31 إلى الضلع 12. إذن

$$|Fix(\sigma_5)| = (3)(3) = 9$$

وبالمثل فإن  $|Fix(\sigma_i)| = 9$  لكل  $6 \leq i \leq 12$ .

الآن نطبق مبرهنة (٦,٣) فنجد أن عدد النماذج المختلفة للتلوينات يساوي

$$\frac{1}{12} [729 + (3)(81) + (8)(9)] = \frac{1044}{12} = 87$$

### (٦,٢) أدلة الدورات لزمر التباديل

لتكن  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  ولتكن  $S_n$  زمرة تباديل  $X$ . تسمى  $S_n$  زمرة التناظر من الدرجة  $n$ . إذا كان  $\sigma \in S_n$  فإنه يمكن كتابة  $\sigma$  كحاصل ضرب دورات منفصلة؛ ونقول إن نمط  $\sigma$  هو  $[1^{m_1(\sigma)} 2^{m_2(\sigma)} \dots n^{m_n(\sigma)}]$  حيث  $m_i(\sigma)$  هو عدد

دورات  $\sigma$  من الطول  $i$  لكل  $1 \leq i \leq n$ . إذا كان  $\sigma$  تبديلاً من النمط

$$[1^{m_1(\sigma)} 2^{m_2(\sigma)} \dots n^{m_n(\sigma)}]$$

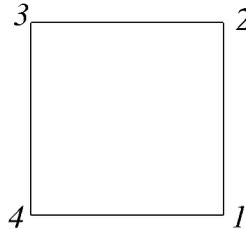
$$M_{\sigma}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{m_1(\sigma)} x_2^{m_2(\sigma)} \dots x_n^{m_n(\sigma)}$$

وإذا كانت  $G$  زمرة جزئية من  $S_n$  فإننا نقرن بها كثيرة الحدود الشكلية

$$\begin{aligned} P_G(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} M_{\sigma}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} x_1^{m_1(\sigma)} x_2^{m_2(\sigma)} \dots x_n^{m_n(\sigma)} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum c(m_1, m_2, \dots, m_n) x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} \end{aligned}$$

حيث  $c(m_1, m_2, \dots, m_n)$  عدد التباديل في  $G$  التي لها النمط  $[1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n}]$  وحيث المجموع الأخير مأخوذ على جميع الأنماط. تسمى  $P_G(x_1, x_2, \dots, x_n)$  دليل الدورات للزمرة  $G$ .

مثال (٦،٤)



إذا اعتبرنا تناظرات المربع الذي رؤوسه 1, 2, 3, 4 والموضح أعلاه، كزمرة

تباديل  $G$  للمجموعة  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  فإنه يمكن حساب  $P_G(x_1, x_2, x_3, x_4)$

كما يلي:

الجدول التالي يعطينا  $M_{\sigma}(x_1, x_2, x_3, x_4)$  لكل  $\sigma \in G$ .

$\sigma$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$M_\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4)$
$id$	4	0	0	0	$x_1^4$
(1234)	0	0	0	1	$x_4^1$
(1432)	0	0	0	1	$x_4^1$
(13)(24)	0	2	0	0	$x_2^2$
(12)(34)	0	2	0	0	$x_2^2$
(14)(23)	0	2	0	0	$x_2^2$
(13)	2	1	0	0	$x_1^2 x_2$
(24)	2	1	0	0	$x_1^2 x_2$

وبالتالي فإن

$$P_G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{8}(x_1^4 + 2x_1^2 x_2 + 3x_2^2 + 2x_4) \quad \square$$

فيما يلي نحسب أدلة الدورات لأصناف معينة من زمر التباديل.

مبرهنة (٦,٤)

(١)  $P_{\{id\}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$  حيث  $id$  هو التبدل المحايد.

$$P_{S_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum \frac{1}{1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n} m_1! m_2! \dots m_n!} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} \quad (٢)$$

حيث المجموع مأخوذ على جميع الأنماط  $[1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n}]$

$$P_{A_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum \frac{1 + (-1)^{m_2 + m_4 + \dots}}{1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n} m_1! m_2! \dots m_n!} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} \quad (3)$$

حيث المجموع مأخوذ على جميع الأنماط  $[1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n}]$  وحيث  $A_n$  هي زمرة التناوب من الدرجة  $n$ .

### البرهان

(١) واضح أن التبدل المحايد  $id$  من النمط  $[1^n]$  وبالتالي فإن

$$P_{\{id\}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{1} x_1^n = x_1^n$$

(٢) نعلم من نظرية الزمر أنه إذا كان  $\sigma, \tau \in S_n$  فإن  $\sigma, \tau$  مترافقان إذا

و فقط إذا كان  $\sigma, \tau$  من النمط نفسه. كما نعلم أنه إذا كان  $\sigma$  من النمط

$[1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n}]$  فإن عدد عناصر فصل الترافق للتبديل  $\sigma$  يساوي

$$\frac{n!}{1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n} m_1! m_2! \dots m_n!} \text{ وبالتالي فإن}$$

$$\begin{aligned} P_{S_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{1}{|S_n|} \sum c(m_1, m_2, \dots, m_n) x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} \\ &= \frac{1}{n!} \sum \frac{n!}{1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n} m_1! m_2! \dots m_n!} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} \\ &= \sum \frac{1}{1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n} m_1! m_2! \dots m_n!} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{A_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{1}{|A_n|} \sum_{\sigma \in A_n} x_1^{m_1(\sigma)} x_2^{m_2(\sigma)} \dots x_n^{m_n(\sigma)} \quad (3) \\ &= \frac{2}{n!} \sum c(m_1, m_2, \dots, m_n) x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} \end{aligned}$$

حيث  $c(m_1, m_2, \dots, m_n)$  عدد التباديل في  $A_n$  التي لها النمط  $[1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n}]$  وحيث المجموع مأخوذ على جميع الأنماط. بملاحظة

أن  $A_n$  تتكون من التباديل الزوجية، وبفرض أن  $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  نجد أن

$$P_{A_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{2}{n!} \sum \frac{n!}{1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n} m_1! m_2! \dots m_n!} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$$

حيث المجموع مأخوذ على الأنماط  $[1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n}]$  التي يكون فيها عدداً زوجياً  $m_2 + m_4 + m_6 + \dots + m_{2k}$ .

إذن

$$P_{A_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum \frac{1 + (-1)^{m_2 + m_4 + \dots + m_{2k}}}{1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n} m_1! m_2! \dots m_n!} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$$

حيث المجموع مأخوذ على جميع الأنماط.

### مبرهنة (٦,٥)

إذا كانت  $C_n = \langle \sigma \rangle$  هي الزمرة الدوروية المولدة بالدورة  $\sigma = (1 2 \dots n)$  فإن

$$P_{C_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) x_d^{\frac{n}{d}}$$

حيث  $\varphi$  هي دالة أويلر.

### البرهان

ليكن  $d | n$ . بما أن  $C_n$  زمرة دوروية رتبته  $n$  فإننا نعلم من نظرية الزمر أن  $C_n$

تحتوي بالضبط  $\varphi(d)$  عنصراً رتبة كل منها  $d$ . وهذه العناصر هي التباديل  $\sigma^{\frac{kn}{d}}$

حيث  $1 \leq k \leq d$  و  $\gcd(k, d) = 1$ . سنبين الآن أن كلاً من هذه التباديل يمكن

كتابته كحاصل ضرب  $\frac{n}{d}$  من الدورات المنفصلة التي طول كل منها  $d$ .

ليكن  $1 \leq i \leq n-1$  وليكن  $m$  طول أقصر دورة عندما نكتب  $\sigma^i$  كحاصل ضرب دورات منفصلة؛ ولنفرض أن  $x$  ينتمي إلى إحدى الدورات التي طولها  $m$ . نلاحظ أن

$$\sigma^{im}(x) = (\sigma^i)^m(x) = x$$

من ناحية ثانية، إذا كان  $y \in \{1, 2, \dots, n\}$  فإن كلاً من  $x$  و  $y$  ينتمي

إلى الدورة  $\sigma = (1 \ 2 \ \dots \ n)$  وبالتالي فإنه يوجد  $r$  بحيث  $\sigma^r(x) = y$ . إذن

$$(\sigma^i)^m(y) = \sigma^{im}(y) = \sigma^{im}\sigma^r(x) = \sigma^r\sigma^{im}(x) = \sigma^r(x) = y$$

وبالتالي فإن  $y$  تنتمي إلى إحدى دورات  $\sigma^i$  التي طولها يقسم  $m$ . ولكن  $m$  يساوي طول أقصر دورات  $\sigma^i$ ؛ عليه فإن طول الدورة التي تنتمي إليها  $y$  يساوي  $m$ . إذن جميع دورات  $\sigma^i$  لها الطول نفسه وهو  $m$ . وبالتالي فإنه إذا كانت رتبة  $\sigma^i$  تساوي  $d$  فإن  $m = d$  وينتج أنه يمكن كتابة  $\sigma^i$  كحاصل ضرب  $\frac{n}{d}$  من الدورات المنفصلة التي طول كل منها  $d$ .

إذن

$$P_{C_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{|C_n|} \sum c(m_1, m_2, \dots, m_n) x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) x_d^{\frac{n}{d}}.$$

**مبرهنة (٦,٦)**

لتكن  $D_n$  زمرة زوجية رتبته  $2n$ . إذا اعتبرنا  $D_n$  زمرة تباديل فإن

$$P_{D_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2} P_{C_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) + \begin{cases} \frac{1}{4} \left( x_2^{\frac{n}{2}} + x_1^2 x_2^{\frac{n-1}{2}} \right), & n = 2k \\ \frac{1}{2} x_1 x_2^{\frac{n-1}{2}}, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

حيث  $C_n$  زمرة دوروية رتبتهـا  $n$ .

### البرهان

ليكن لدينا مضلع منتظم عدد رؤوسه  $n$  ومركزه  $0$ ، ولنرقم رؤوسه باتجاه عقارب الساعة بالأرقام  $1, 2, \dots, n$ . إن الدوران بزاوية مقدارها  $\frac{2\pi}{n}$  راديان حول المركز  $0$  يقابل الدورة  $\sigma = (1\ 2\ 3\ \dots\ n)$  كما أن الانعكاس حول المحور الذي يمر بالمركز

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & n & n-1 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

والرأس  $1$  يقابل التبديل

ونعلم من نظرية الزمر أن

$$D_n = \{id, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1}, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \dots, \tau\sigma^{n-1}\}$$

إن كتابة التباديل التي تنتمي إلى  $D_n$  كحاصل ضرب دورات منفصلة يعتمد

على نوعية  $n$  من حيث كونه عدداً زوجياً أو فردياً؛ وهذا ما سنقدمه فيما يلي:

(أ) نفرض الآن أن  $n$  عدد زوجي وأن  $n = 2k \geq 4$ .

إذن

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & k+1 & k+2 & \dots & 2k \\ 1 & 2k & 2k-1 & \dots & k+2 & k+1 & k & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (2\ 2k)(3\ 2k-1) \dots (k\ k+2)$$

لأن المحور الذي يمر بالرأس 1 والمركز 0 يمر أيضاً بالرأس  $k+1$ .  
وبحساب  $\tau\sigma, \tau\sigma^2, \dots$  نجد أن

$$\begin{aligned}\tau\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2k \\ 2k & 2k-1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\ &= (1 \ 2k)(2 \ 2k-1) \dots (k \ k+1) \\ \tau\sigma^2 &= \begin{pmatrix} 1 & & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & 2k \\ 2k-1 & 2k-2 & \dots & k & k-1 & \dots & 2k \end{pmatrix} \\ &= (1 \ 2k-1)(2 \ 2k-2) \dots (k-1 \ k+1)\end{aligned}$$

إذن تتكون  $D_n$  من التالي:

١-  $n$  تبديلاً مقابلاً للدورانات وهي تكون الزمرة الدوروية

$$C_n = \langle \sigma \rangle = \{id, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1}\}$$

٢-  $k = \frac{n}{2}$  تبديلاً مقابلاً للانعكاسات التي محاورها الأقطار وهي

تكون

$$A = \{\tau, \tau\sigma^2, \tau\sigma^4, \dots, \tau\sigma^k\}$$
 المجموعة

٣-  $k = \frac{n}{2}$  تبديلاً مقابلاً للانعكاسات التي محاورها المنصفات

العمودية للأضلاع المتقابلة وهي تكون المجموعة

$$B = \{\tau\sigma, \tau\sigma^3, \tau\sigma^5, \dots, \tau\sigma^{2k-1}\}$$

نحسب الآن دليل الدورات فنجد أن

$$P_{D_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{|D_n|} \sum_{\alpha \in D_n} x_1^{m_1(\alpha)} x_2^{m_2(\alpha)} \dots x_n^{m_n(\alpha)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2n} \sum_{\alpha \in C_n} x_1^{m_1(\alpha)} x_2^{m_2(\alpha)} \dots x_n^{m_n(\alpha)} + \frac{1}{2n} \left[ \sum_{\alpha \in A} x_1^{m_1(\alpha)} x_2^{m_2(\alpha)} \dots x_n^{m_n(\alpha)} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\alpha \in B} x_1^{m_1(\alpha)} x_2^{m_2(\alpha)} \dots x_n^{m_n(\alpha)} \right] \\
 &= \frac{1}{2} P_{C_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) + \frac{1}{2n} \left[ \frac{n}{2} x_1^2 x_2^{\frac{n-1}{2}} + \frac{n}{2} x_2^{\frac{n}{2}} \right] \\
 &= \frac{1}{2} P_{C_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) + \frac{1}{4} \left[ x_1^2 x_2^{\frac{n-1}{2}} + x_2^{\frac{n}{2}} \right]
 \end{aligned}$$

(ب) نفرض الآن أن  $n$  عدد فردي وأن  $n = 2k + 1 \geq 3$

إذن

$$\begin{aligned}
 \tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2k+1 \\ 1 & 2k+1 & 2k & \dots & 2 \end{pmatrix} \\
 &= (2 \ 2k+1)(3 \ 2k) \dots (k+1 \ k+2) \\
 \tau\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k+1 & \dots & 2k+1 \\ 2k+1 & 2k & \dots & k+1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\
 &= (1 \ 2k+1)(2 \ 2k) \dots (k \ k+2)
 \end{aligned}$$

إذن  $D_n$  تتكون من التالي :

(i)  $n$  تبديلاً مقابلًا للدورات وهي تكون الزمرة الدوروية

$$C_n = \langle \sigma \rangle = \{id, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1}\}$$

(ii)  $n$  تبديلاً مقابلًا للانعكاسات التي محاورها تمر بالمركز 0 وبالرؤوس

و هي تكون المجموعة

$$A = \{\tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \dots, \tau\sigma^{n-1}\}$$

نحسب الآن دليل الدورات فنجد أن

$$P_{D_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2n} \sum_{\alpha \in C_n} x_1^{m_1(\alpha)} x_2^{m_2(\alpha)} \dots x_n^{m_n(\alpha)} + \frac{1}{2n} \sum_{\alpha \in A} x_1^{m_1(\alpha)} x_2^{m_2(\alpha)} \dots x_n^{m_n(\alpha)} \\ &= \frac{1}{2} P_{C_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) + \frac{1}{2} x_1 x_2^{\frac{n-1}{2}} \end{aligned}$$

### (٦,٣) التلوينات غير المتكافئة

لتكن  $X$  مجموعة بحيث  $|X| = n$  ولتكن  $G$  زمرة تبديل لـ  $X$ .  
ولتكن  $C$  مجموعة بحيث  $|C| = r$ . تسمى  $C$  مجموعة ألوان وتسمى كل دالة  $w : X \rightarrow C$  تلويناً؛ كما يرمز لمجموعة التلوينات بالرمز  $\Omega = C^X$ .  
نلاحظ أن عدد التلوينات يساوي  $|\Omega| = r^n$ .

لتكن  $S_\Omega$  زمرة تبديل  $\Omega$ . الآن، نعرف الدالة  $\wedge : G \rightarrow S_\Omega$ . لكل  $w \in \Omega$ ،  $g \in G$ ، فإننا نرمز لصورة  $g$  بالرمز  $\hat{g}$  ونضع  $\hat{g}(w) = w \circ g^{-1}$  لكل  $w \in \Omega$ . حيث  $w \circ g^{-1}$  هو تحصيل  $w$  على  $g^{-1}$ . نلاحظ أنه إذا كان  $\hat{g}(w_1) = \hat{g}(w_2)$  فإن  $w_1 \circ g^{-1} = w_2 \circ g^{-1}$  وبالتالي فإن  $(w_1 \circ g^{-1}) \circ g = (w_2 \circ g^{-1}) \circ g$ ،  $w_1 \circ (g^{-1} \circ g) = w_2 \circ (g^{-1} \circ g)$ ،  $w_1 = w_2$  تعطينا  $w_1 \circ (g^{-1} \circ g) = w_2 \circ (g^{-1} \circ g)$ ،  $w_1 = w_2$  عليه  $\hat{g}$  دالة متباينة. وبما أن  $\Omega$  مجموعة منتهية فينتج أن  $\hat{g}$  شاملة وبالتالي فإن  $\hat{g} \in S_\Omega$ .

### مبرهنة (٦,٧)

$\wedge : G \rightarrow S_\Omega$  تشاكل أحادي، وبالتالي فإن  $G \cong \text{Im } \wedge = \hat{G}$  هي صورة  $\wedge$ .

### البرهان

سنثبت أولاً أن  $\wedge : G \rightarrow S_\Omega$  تشاكل. نلاحظ أنه لكل  $w \in \Omega$  ولكل  $g_1, g_2 \in G$

فإن

$$\begin{aligned}\widehat{g_1 g_2}(w) &= w \circ (g_1 g_2)^{-1} = w \circ (g_2^{-1} g_1^{-1}) \\ &= (w \circ g_2^{-1}) \circ g_1^{-1} = (\widehat{g_2}(w)) \circ g_1^{-1} \\ &= \widehat{g_1}(\widehat{g_2}(w)) = (\widehat{g_1 g_2})(w)\end{aligned}$$

وبالتالي فإن  $\widehat{g_1 g_2} = \widehat{g_1} \widehat{g_2}$  . إذن  $\wedge: G \rightarrow S_\Omega$  تشاكل.

سنثبت الآن أن  $\wedge: G \rightarrow S_\Omega$  أحادي. لنفرض أن  $g_1, g_2 \in G$  وأن

$$g_1 \neq g_2 . \text{ إذن } g_1^{-1} \neq g_2^{-1} \text{ وبالتالي فإنه يوجد } x_0 \in X \text{ بحيث}$$

$$w_0: X \rightarrow C \text{ من ناحية ثانية، فإنه يوجد تلوين } w_0: X \rightarrow C \text{ بحيث}$$

$$g_1^{-1}(x_0) \neq g_2^{-1}(x_0) . \text{ إذن } w_0(g_1^{-1}(x_0)) \neq w_0(g_2^{-1}(x_0)) \text{ أي}$$

$$\widehat{g_1}(w_0) \neq \widehat{g_2}(w_0) . \text{ عليه } \widehat{g_1} \neq \widehat{g_2} \text{ وبالتالي فإن } \wedge: G \rightarrow S_\Omega \text{ أحادي.}$$

### ملاحظات

$$(١) \quad G \cong \widehat{G} \text{ ولكن } G \text{ زمرة تباديل لمجموعة عدد عناصرها } |X| = n$$

$$\text{بينما } \widehat{G} \text{ زمرة تباديل لمجموعة عدد عناصرها } |\Omega| = r^n .$$

$$(٢) \quad \widehat{G} \text{ زمرة تباديل لـ } \Omega \text{ وإذا كان } w_1, w_2 \in \Omega \text{ في المدار نفسه فإنه}$$

$$\text{يوجد } \widehat{g} \in \widehat{G} \text{ بحيث } \widehat{g}(w_1) = w_2 . \text{ أي، } w_1 \circ g^{-1} = w_2 \text{ وبالتالي فإن}$$

$$w_1 = w_2 \circ g . \text{ وبالعكس، إذا كان } w_1 = w_2 \circ g \text{ فإن } w_1 \circ g^{-1} = w_2$$

وبالتالي فإن  $w_1, w_2$  لهما المدار نفسه.

### تمهيدية (٦,١)

إذا كان  $g \in G$  وإذا كُتِبَ  $g$  كحاصل ضرب دورات منفصلة فإن  $\widehat{g}(w) = w$  إذا

و فقط إذا كان  $g$  ثابتاً على كل دورة من الدورات المنفصلة.

## البرهان

لنفرض أن  $g$  قد كتبت كحاصل ضرب دورات منفصلة وأن  $(x_1 x_2 \dots x_t)$  إحدى هذه الدورات. لكل  $1 \leq i \leq t-1$  فإن  $x_i = g^{-1}(x_{i+1})$  تعطينا

$$w(x_i) = w(g^{-1}(x_{i+1})) = (\widehat{g}(w))(x_{i+1}) = w(x_{i+1})$$

لأن  $\widehat{g}(w) = w$ . إذن  $w(x_1) = \dots = w(x_t)$ . أي،  $w$  ثابت على الدورة  $(x_1 x_2 \dots x_t)$ .

من ناحية ثانية، إذا كان  $w(x_1) = \dots = w(x_t)$  فإن  $x_1 = g^{-1}(x_2)$  و  $w(x_1) = w(x_2)$  تعطينا  $w(x_1) = w(g^{-1}(x_2)) = (\widehat{g}(w))(x_2)$ . وبالمثل  $w(x) = (\widehat{g}(w))(x)$  لكل  $x \in X$ . إذن  $\widehat{g}(w) = w$ . □

$\widehat{G}$  زمرة تباديل لمجموعة التلوينات  $\Omega$ . نقول إن التلوينين  $g_1, g_2 \in \Omega$

متكافئان إذا كانا ينتميان إلى أحد مدارات  $\widehat{G}$  على  $\Omega$ .

المبرهنة التالية تزودنا بطريقة لحساب عدد التلوينات غير المتكافئة.

## مبرهنة (٦,٨)

إذا كانت  $G$  زمرة تباديل للمجموعة  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  وكان  $P_G(x_1, x_2, \dots, x_n)$  دليل دوراتها فإن عدد التلوينات غير المتكافئة  $w: X \rightarrow C$  يساوي  $P_G(r, r, \dots, r)$  حيث عدد الألوان  $|C| = r$ .

## البرهان

ليكن  $\sigma \in G$  تبديلاً من النمط  $[1^{m_1(\sigma)} 2^{m_2(\sigma)} \dots n^{m_n(\sigma)}]$  وليكن  $m_1(\sigma) + m_2(\sigma) + \dots + m_n(\sigma) = k$ . إذا كان  $w: X \rightarrow C$  تلويناً بحيث

$\widehat{\sigma}(w) = w$  فإن تمهيدية (٦,١) تفيد بأن  $w$  ثابت على كل دورة عند كتابة  $\sigma$

كحاصل ضرب دورات منفصلة . وبالتالي فإن

$$\begin{aligned} |Fix(\widehat{\sigma})| &= |\{w \in \Omega : \widehat{\sigma}(w) = w\}| \\ &= |\{w \in \Omega : \sigma \text{ ثابت على دورات } w\}| \\ &= r^k = r^{m_1(\sigma) + m_2(\sigma) + \dots + m_n(\sigma)} = r^{m_1(\sigma)} r^{m_2(\sigma)} \dots r^{m_n(\sigma)} \\ &= M_\sigma(r, r, \dots, r) \end{aligned}$$

من ناحية ثانية فإن مبرهنة (٦,٧) تفيد بأن  $|\widehat{G}| = |G|$ . إذن عدد مدارات  $\widehat{G}$

على  $\Omega$  يساوي

$$\frac{1}{|\widehat{G}|} \sum_{\sigma \in \widehat{G}} |Fix(\widehat{\sigma})| = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} M_\sigma(r, r, \dots, r) = P_G(r, r, \dots, r)$$

باستخدام دليل الدورات، يمكن حساب عدد التلوينات غير المتكافئة؛ وهذا

هو مضمون مبرهنة (٦,٨). سنقدم فيما يلي تعميماً يعطينا عدد التلوينات غير المتكافئة التي استخدمت فيها الألوان المختلفة أعداداً معيّنة من المرات.

فيما يلي، نفرض أن  $X$  هي المجموعة المراد تلوينها وأن  $|X| = n$  وأن

$$C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$$

ليكن  $w : X \rightarrow C$  تلويناً وليكن  $n_i$  هو عدد عناصر  $X$  التي تأخذ اللون  $c_i$ ،

$1 \leq i \leq r$ . نلاحظ أن  $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$ . نقرن بالتلوين  $w : X \rightarrow C$  وحيد

الحد الشكلي

$$ind(w) = c_1^{n_1} c_2^{n_2} \dots c_r^{n_r} \text{ ونسمي } ind(w) \text{ مؤشر } w.$$

إذا كانت  $A \subseteq \Omega = C^X$  فإننا نضع  $f_A(c_1, c_2, \dots, c_r) = \sum_{w \in A} \text{ind}(w)$

ونسمي  $f_A$  الدالة المولدة لأعداد التلوينات التي تنتمي إلى  $A$  والتي استخدمت فيها الألوان المختلفة أعداداً معينة من المرات.

### مبرهنة (٦,٩)

لتكن  $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$  تجزئة لـ  $X$  حيث  $1 \leq i \leq k$  و  $|X_i| = m_i$  و  $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$  ولتكن

$$B = \{w \in \Omega : 1 \leq i \leq k \text{ لكل } X_i \text{ على } w \text{ ثابت}\}$$

عندئذٍ،

$$f_B(c_1, c_2, \dots, c_r) = (c_1^{m_1} + c_2^{m_1} + \dots + c_r^{m_1})(c_1^{m_2} + c_2^{m_2} + \dots + c_r^{m_2}) \dots (c_1^{m_k} + c_2^{m_k} + \dots + c_r^{m_k})$$

### البرهان

ليكن  $w: X \rightarrow C$  تلويناً معطى، ولنفرض أن  $w$  يعين اللون  $c_{j_i}$  لجميع عناصر  $X_i$  لكل  $1 \leq i \leq k$ . نلاحظ أننا نحصل على  $\text{ind}(w)$  في مفكوك  $(c_1^{m_1} + \dots + c_r^{m_1}) \dots (c_1^{m_k} + \dots + c_r^{m_k})$  وذلك باختيار الحد  $C_{j_i}^{m_i}$  من القوس رقم  $i$  لكل  $1 \leq i \leq k$ . ومن ناحية ثانية فإن اختيار حد من كل قوس يعين تلويناً ينتمي

إلى  $B$ . وبالتالي فإن

$$(c_1^{m_1} + \dots + c_r^{m_1}) \dots (c_1^{m_k} + \dots + c_r^{m_k}) = \sum_{w \in B} \text{ind}(w) = f_B(c_1, c_2, \dots, c_r) \quad \square$$

الآن، لغرض الإعداد لإثبات مبرهنة بوليا فإننا نقدم تعميماً لمبرهنة (٦,٣).

## مبرهنة (٦,١٠)

لتكن  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$  زمرة تباديل للمجموعة  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ولتكن

$\psi$  دالةً ثابتةً على كل مدار من مدارات  $G$  على  $X$ ؛ أي،

$$\psi(g(x)) = \psi(x) \quad \forall g \in G, x \in X$$

لتكن  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_t\}$  مجموعة ممثلات لجميع مدارات  $G$  على  $X$ .

عندئذٍ،

$$\sum_{x \in D} \psi(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{x \in \text{Fix}(g)} \psi(x)$$

## البرهان

ضع  $E = \{(g, x) : g(x) = x\} \subseteq G \times X$  سنحسب  $\sum_{(g, x) \in E} \psi(x)$  بطريقتين.

$$\begin{aligned} \sum_{(g, x) \in E} \psi(x) &= \sum_{(g_1, x) \in E} \psi(x) + \dots + \sum_{(g_m, x) \in E} \psi(x) \\ &= \sum_{x \in \text{Fix}(g_1)} \psi(x) + \dots + \sum_{x \in \text{Fix}(g_m)} \psi(x) \\ &= \sum_{k=1}^m \left( \sum_{x \in \text{Fix}(g_k)} \psi(x) \right) = \sum_{g \in G} \left( \sum_{x \in \text{Fix}(g)} \psi(x) \right) \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

من ناحية ثانية فإن

$$\begin{aligned} \sum_{(g, x) \in E} \psi(x) &= \sum_{(g, x_1) \in E} \psi(x_1) + \dots + \sum_{(g, x_n) \in E} \psi(x_n) \\ &= \sum_{g \in G_{x_1}} \psi(x_1) + \dots + \sum_{g \in G_{x_n}} \psi(x_n) \\ &= |G_{x_1}| \psi(x_1) + \dots + |G_{x_n}| \psi(x_n) \\ &= \sum_{x \in Gd_1} |G_x| \psi(x) + \dots + \sum_{x \in Gd_t} |G_x| \psi(x) \\ &= |Gd_1| |G_{d_1}| \psi(d_1) + \dots + |Gd_t| |G_{d_t}| \psi(d_t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |G| \psi(d_1) + \dots + |G| \psi(d_t) \\
&= |G| (\psi(d_1) + \dots + \psi(d_t)) \\
&= |G| \sum_{k=1}^t \psi(d_k) = |G| \sum_{x \in D} \psi(x) \dots\dots\dots (2)
\end{aligned}$$

حيث تم الاستناد إلى مبرهنة (٦,١) ومبرهنة (٦,٢).

من (1) و (2) نجد أن

$$|G| \sum_{x \in D} \psi(x) = \sum_{g \in G} \left( \sum_{x \in \text{Fix}(g)} \psi(x) \right)$$

وبالتالي فإن

$$\sum_{x \in D} \psi(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left( \sum_{x \in \text{Fix}(g)} \psi(x) \right)$$

**مبرهنة (٦,١١) (مبرهنة بوليا)**

لتكن  $G$  زمرة تبديل للمجموعة  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  ،  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$  مجموعة

ألوان ،  $\Omega = C^X$  مجموعة التلوينات ،  $\wedge : G \rightarrow S_\Omega$  الدالة المعرفة بالقاعدة

$\hat{g}(w) = w \circ g^{-1}$  لكل  $w \in \Omega$  . ولتكن  $D$  مجموعة ممثلات مدارات  $\hat{G}$  على

$\Omega$  . عندئذٍ، إن الدالة المولدة لأعداد التلوينات غير المتكافئة للمجموعة  $X$  هي

$$f_D(c_1, c_2, \dots, c_r) = P_G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$., \alpha_i = c_1^i + c_2^i + \dots + c_r^i \quad 1 \leq i \leq n$$

حيث

**البرهان**

يمكن النظر إلى  $ind$  كدالة ثابتة على كل مدار من مدارات  $\hat{G}$  على  $\Omega$  ؛

وبالاستناد إلى مبرهنة (٦,١٠) نجد أن

$$\begin{aligned} f_D(c_1, \dots, c_r) &= \sum_{w \in D} \text{ind}(w) \\ &= \frac{1}{|\widehat{G}|} \sum_{\widehat{g} \in \widehat{G}} \left( \sum_{w \in \text{Fix}(\widehat{g})} \text{ind}(w) \right) \\ &= \frac{1}{|\widehat{G}|} \sum_{\widehat{g} \in \widehat{G}} f_{\text{Fix}(\widehat{g})}(c_1, c_2, \dots, c_r) \end{aligned}$$

نعلم من تمهيدية (٦,١) أنه إذا كان  $g \in G$  وإذا كتب  $g$  كحاصل ضرب دورات منفصلة فإن  $w$  ثابت على كل دورة من هذه الدورات إذا وفقط إذا كان

$$w \in \text{Fix}(\widehat{g})$$

و بتطبيق مبرهنة (٦,٩) نجد أن

$$f_{\text{Fix}(\widehat{g})}(c_1, c_2, \dots, c_r) = (c_1^{m_1} + \dots + c_r^{m_1}) \dots (c_1^{m_k} + \dots + c_r^{m_k})$$

حيث  $m_1, \dots, m_k$  هي أطوال دورات  $g$  المنفصلة. وإذا كانت  $g$  من النمط

$$[1^{t_1} 2^{t_2} \dots n^{t_n}]$$

$$\begin{aligned} f_{\text{Fix}(\widehat{g})}(c_1, \dots, c_r) &= \alpha_1^{t_1} \alpha_2^{t_2} \dots \alpha_n^{t_n} \\ &= M_g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \end{aligned}$$

وبما أن  $G \cong \widehat{G}$  فإن

$$\begin{aligned} f_D(c_1, \dots, c_r) &= \sum_{w \in D} \text{ind}(w) \\ &= \frac{1}{|\widehat{G}|} \sum_{\widehat{g} \in \widehat{G}} M_g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} M_g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ &= P_G(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \end{aligned}$$

## ملاحظات

(١) نلاحظ أن معامل  $c_1^{k_1} c_2^{k_2} \dots c_r^{k_r}$  في مفكوك  $P_G(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  يساوي عدد التلوينات غير المتكافئة بحيث ألوان عناصر  $X$  كما يلي:  $k_1$  عنصراً تأخذ اللون  $c_1$ ،  $k_2$  عنصراً تأخذ اللون  $c_2$ ، ...،  $k_r$  عنصراً تأخذ اللون  $c_r$ . ولحساب هذا المعامل فإننا لا نحتاج إلى إيجاد المفكوك الكامل لـ  $P_G(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  وإنما لإيجاد الحدود ذات الصلة بالمعامل.

(٢) نلاحظ أنه إذا وضعنا 1 مكان  $c_i$  لكل  $1 \leq i \leq r$  فإننا نحصل على  $f_D(1, 1, \dots, 1) = P_G(r, r, \dots, r)$  وهذا يعطينا عدد التلوينات

غير المتكافئة. □

استُخدمت مبرهنة (٦,٣) ومبرهنة بوليا لحل مسائل تركيبية مهمة في الكيمياء وفي تصميم الدارات المنطقية، ويمكن العودة إلى المراجع للاطلاع على ذلك. وسنكتفي هنا بإعطاء بعض الأمثلة العامة ومثال من نظرية الرسومات لنوضح كيفية معالجة بعض المسائل التطبيقية والنظرية.

## مثال (٦,٥)

بالإشارة إلى مثال (٦,١) فإنه يمكن حساب المطلوب وزيادة باستخدام مبرهنة بوليا. من مبرهنة (٦,٥) نجد أن

$$P_{C_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4} [x_1^4 + x_2^2 + 2x_4]$$

إذن

$$\begin{aligned} P_{C_4} &= (3, 3, 3, 3) = \frac{1}{4} [3^4 + 3^2 + 2(3)] \\ &= \frac{96}{4} = 24 \end{aligned}$$

هو عدد النماذج المختلفة للتوزيعات.

ولبيان المعلومات الإضافية التفصيلية التي يمكن الحصول عليها من مبرهنة

بوليا فإننا نحسب

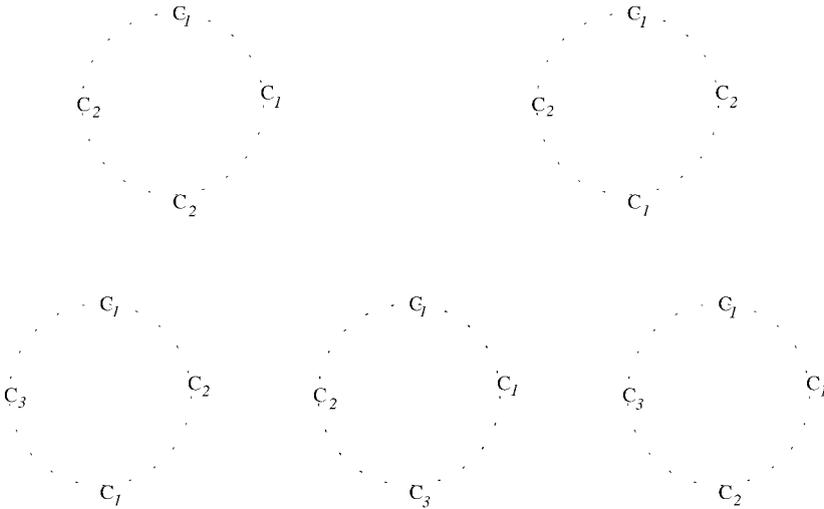
$$\begin{aligned}
 P_{C_4} & (c_1 + c_2 + c_3, c_1^2 + c_2^2 + c_3^2, c_1^3 + c_2^3 + c_3^3, c_1^4 + c_2^4 + c_3^4) \\
 &= \frac{1}{4} \left[ (c_1 + c_2 + c_3)^4 + (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)^2 + 2(c_1^4 + c_2^4 + c_3^4) \right] \\
 &= c_1^4 + c_2^4 + c_3^4 + c_1^3 c_2 + c_1^3 c_3 + c_1 c_2^3 + c_2^3 c_3 \\
 &\quad + c_1 c_3^3 + c_2 c_3^3 + 2c_1^2 c_2^2 + 2c_1^2 c_3^2 + 2c_2^2 c_3^2 \\
 &\quad + 3c_1^2 c_2 c_3 + 3c_1 c_2^2 c_3 + 3c_1 c_2 c_3^2
 \end{aligned}$$

ومن هنا نجد أنه يوجد نموذجان مختلفان بحيث يكون طبقان لهما اللون

$c_1$  وطبقان لهما اللون  $c_2$ ؛ كما يوجد ثلاثة نماذج مختلفة بحيث يكون طبقان لهما

اللون  $c_1$  وطبق له اللون  $c_2$  وطبق له اللون  $c_3$  وهلم جراً.

ويمكن اعتبار التوزيعات، الموضحة في الشكل أدناه، ممثلات لتلك النماذج المختلفة



## مثال (٦,٦)

بالإشارة إلى مثال (٦,٢) فإنه يمكن حساب عدد النماذج المختلفة للقلادات وبيان المعلومات التفصيلية المتعلقة بذلك باستخدام مبرهنة بوليا. من مبرهنة (٦,٦) نجد أن دليل الدورات للزمرة  $D_9$  هو

$$\begin{aligned} P_{D_9}(x_1, \dots, x_9) &= \frac{1}{2} P_{C_9}(x_1, \dots, x_9) + \frac{1}{2} x_1 x_2^4 \\ &= \frac{1}{18} [x_1^9 + 2x_3^3 + 6x_9] + \frac{1}{2} x_1 x_2^4 \end{aligned}$$

وبالتالي فإن

$$\begin{aligned} P_{D_9}(x_1, \dots, x_9) &= \frac{1}{18} [(c_1 + c_2)^9 + 2(c_1^3 + c_2^3)^3 + 6(c_1^9 + c_2^9)] + \frac{1}{2} (c_1 + c_2)(c_1^2 + c_2^2)^4 \end{aligned}$$

وإذا اعتبرنا  $c_1$  هو اللون الأسود و  $c_2$  هو اللون الأبيض فإن عدد النماذج المختلفة للقلادات يساوي معامل  $c_1^3 c_2^6$  في مفكوك  $P_{D_9}(\alpha_1, \dots, \alpha_9)$ . ومنه نجد أن هذا العدد يساوي

$$\begin{aligned} & \frac{1}{18} \left( \binom{9}{3} + 2(3) \right) + \frac{1}{2} (4) \\ &= \frac{1}{18} \left[ \frac{(9)(8)(7)}{(3)(2)} + 6 \right] + 2 = \frac{1}{18} [90] + 2 = 7 \end{aligned}$$

## مثال (٦,٧)

بالإشارة إلى مثال (٦,٣) فإنه يمكن حساب عدد النماذج المختلفة للتلوينات وبيان المعلومات التفصيلية المتعلقة بذلك باستخدام مبرهنة بوليا. ولهذا الغرض، لتكن

$$E = \{12, 13, 14, 23, 24, 34\}$$

هي مجموعة أضلاع رباعي الوجوه المنتظم المعطى. نجد الآن عناصر الزمرة

عناصر الزمرة  $A_4 = \{\overline{\sigma_i} : 1 \leq i \leq 12\}$  التي تتكون من تباديل للمجموعة  $E$  مُحَدَّثَة بواسطة

عناصر الزمرة  $A_4$ .

$$\overline{\sigma_1} = id$$

$$\overline{\sigma_2} = \overline{(12)(34)} = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \\ 12 & 24 & 23 & 14 & 13 & 34 \end{pmatrix}$$

$$= (13 \ 24)(14 \ 23)$$

$$\overline{\sigma_3} = \overline{(13)(24)} = (12 \ 34)(14 \ 23)$$

$$\overline{\sigma_4} = \overline{(14)(23)} = (12 \ 34)(13 \ 24)$$

$$\overline{\sigma_5} = \overline{(1 \ 2 \ 3)} = (12 \ 23 \ 13)(14 \ 24 \ 34)$$

$$\overline{\sigma_6} = \overline{(1 \ 3 \ 4)} = (12 \ 23 \ 24)(13 \ 34 \ 14)$$

$$\overline{\sigma_7} = \overline{(2 \ 3 \ 4)} = (12 \ 13 \ 14)(23 \ 34 \ 24)$$

$$\overline{\sigma_8} = \overline{(1 \ 4 \ 2)} = (12 \ 14 \ 24)(13 \ 34 \ 23)$$

$$\overline{\sigma_9} = \overline{(1 \ 3 \ 2)} = (12 \ 13 \ 23)(14 \ 34 \ 24)$$

$$\overline{\sigma_{10}} = \overline{(2 \ 3 \ 4)} = (12 \ 13 \ 14)(23 \ 34 \ 24)$$

$$\overline{\sigma_{11}} = \overline{(1 \ 2 \ 4)} = (12 \ 24 \ 14)(13 \ 23 \ 34)$$

$$\overline{\sigma_{12}} = \overline{(1 \ 4 \ 3)} = (12 \ 24 \ 23)(13 \ 14 \ 34)$$

إذن، دليل الدورات للزمرة  $A_4$  هو

$$P_{A_4}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{12} [x_1^6 + 3x_1^2 x_2^2 + 8x_3^2]$$

وبالتالي، فإن عدد التلوينات المختلفة يساوي

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12} [3^6 + 3(3^2)(3^2) + 8(3^2)] \\ &= \frac{3^2}{12} [3^4 + 3(3^2) + 8] = \frac{3}{4} [81 + 27 + 8] \\ &= \frac{3}{4} \times 116 = 87 \end{aligned}$$

ويمكن الحصول على المعلومات التفصيلية من

$$P_{A_4}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6)$$

حيث

$$\alpha_i = c_1^i + c_2^i + c_3^i, \quad 1 \leq i \leq 6$$

ونحصل بعد التعويض على

$$\begin{aligned} P_{A_4}(\alpha_1, \dots, \alpha_6) = \\ \frac{1}{12} [(c_1 + c_2 + c_3)^6 + 3(c_1 + c_2 + c_3)^2 (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)^2 + 8(c_1^3 + c_2^3 + c_3^3)^2] \end{aligned}$$

مثال (٦,٨)

جد عدد الرسوم البسيطة غير المتماثلة التي عدد رؤوسها  $n$  وعدد أضلاعها  $m$ .

الحل

نفرض أن مجموعة الرؤوس هي  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  وأن مجموعة الأضلاع هي مجموعة جزئية من المجموعة  $E = \{\{i, j\} : i, j \in V, i \neq j\}$  التي عدد عناصرها

$$|E| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

لتكن  $G_n$  هي مجموعة جميع الرسوم البسيطة التي مجموعة رؤوسها هي  $V$  ومجموعة أضلاعها هي مجموعة جزئية من  $E$ . نعرف الدالة  $\rho: S_V = S_n \rightarrow S_E$  كما يلي:

$$\text{لكل } \sigma \in S_V \text{ فإن } \rho(\sigma) = \rho_\sigma \text{ حيث } \rho_\sigma: E \rightarrow E \text{ يحقق}$$

$$\rho_\sigma(\{i, j\}) = \{\sigma(i), \sigma(j)\} \text{ لكل } \{i, j\} \in E.$$

ويمكن أن يثبت القارئ بسهولة أن  $\rho_\sigma \in S_E$  وأن  $\rho: S_V \rightarrow S_E$  تشاكل أحادي. وبالتالي فإن  $S_V \cong \rho(S_V)$ . ونلاحظ أن زمرة تبديل لمجموعة عدد عناصرها

$$|V| = n \text{ بينما } \rho(S_V) \text{ زمرة تبديل لمجموعة عدد عناصرها } \binom{n}{2}. |E| =$$

نعتبر الآن مجموعة التلوينات  $\Omega = C^X$  حيث  $X = E$  و  $C = \{T, F\}$ .

نلاحظ فيما يلي أنه يوجد تقابل بين المجموعة  $\Omega$  والمجموعة  $G_n$ . إذا كان  $w: X = E \rightarrow C$  تلويناً فإننا نقرن به الرسم البسيط الذي مجموعة رؤوسه  $V$  والذي يكون فيه  $e$  ضلعاً إذا وفقط إذا كان  $w(e) = T$ . أما إذا كان  $H = (V, E(H)) \in G_n$  فإننا نقرن به التلوين  $w: E \rightarrow C$  المعرف كما يلي:

لكل  $e \in E$  فإن

$$w(e) = \begin{cases} T, & e \in E(H) \\ F, & e \notin E(H) \end{cases}$$

أخيراً، نلاحظ أن  $\widehat{\rho(S_V)}$  زمرة تبديل للمجموعة  $X = E$  وأن رسمين من المجموعة  $G_n$  يتماثلان إذا وفقط إذا كان التلوينان المقابلان للرسمين متكافئان. وبالتالي فإن أعداد الرسوم غير المتماثلة هي أعداد التلوينات غير المتكافئة والتي تعطى بالدالة المولدة

$$f_D(T, F) = P_{\rho(S_n)}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{|E|})$$

حيث

$$\alpha_i = T^i + F^i \quad \forall 1 \leq i \leq |E|$$

على سبيل المثال، عندما  $n = 4$  فإن

$$f_D(T, F) = P_{\rho(S_4)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$$

وبحساب دليل الدورات نجد أن

$$P_{\rho(S_4)}(x_1, \dots, x_6) = \frac{1}{24} [x_1^6 + 9x_1^2x_2^2 + 8x_3^2 + 6x_2x_4]$$

إذن

$$f_D(T, F) = P_{\rho(S_n)}(\alpha_1, \dots, \alpha_6)$$

$$= T^6 + T^5F + 2T^4F^2 + 3T^3F^3 + 2T^2F^4 + TF^5 + F^6$$

إذن عدد الرسوم غير المتماثلة هو

$$f_D(1,1) = 1+1+2+3+2+1+1 = 11$$

والجدول التالي يصنفها حسب عدد الأضلاع:

عدد الأضلاع	6	5	4	3	2	1	0
عدد الرسوم غير المتماثلة	1	1	2	3	2	1	1

## تمارين

- ١- جد عدد التلوينات المختلفة لرؤوس مثلث عندما يكون  
 (أ) المثلث ليس متطابق الأضلاع وليس متساوي الساقين وعدد الألوان المتاحة  
 يساوي 2.  
 (ب) المثلث ليس متطابق الأضلاع ولكنه متساوي الساقين وعدد الألوان المتاحة  
 يساوي 2.  
 (ج) المثلث متطابق الأضلاع وعدد الألوان المتاحة يساوي  $r$ .
- ٢- جد عدد النماذج المختلفة لتلوينات رؤوس مثلث متطابق الأضلاع إذا كان عدد  
 الألوان المتاحة هو 5 وكانت التلوينات تستخدم لونين على الأقل.
- ٣- جد عدد النماذج المختلفة لتلوينات رؤوس مربع إذا كان عدد الألوان المتاحة  
 يساوي  
 (أ) 2  
 (ب)  $r$
- ٤- جد عدد النماذج المختلفة لتلوينات أضلاع مربع إذا كان عدد الألوان المتاحة هو  
 6 وكانت ألوان الأضلاع مختلفة.
- ٥- جد عدد التلوينات المختلفة لأضلاع مربع عندما يكون عد الألوان المتاحة يساوي  
 $r$ .
- ٦- جد عدد التلوينات المختلفة لرؤوس مستطيل طوله لا يساوي عرضه، عندما يكون  
 عدد الألوان المتاحة يساوي  
 (أ) 2  
 (ب)  $r$

٧- جد عدد الأقراص الدائرية الملونة المختلفة عندما يقسم أحد وجهي القرص إلى خمسة قطاعات متطابقة ويلون قطاعان باللون  $c_1$  وقطاعان باللون  $c_2$  وقطاع واحد باللون  $c_3$ .

٨- جد عدد القلادات المختلفة التي يمكن تكوينها من خرزتين لهما اللون  $c_1$  وخرزتين لهما اللون  $c_2$  وخرزة واحدة لها اللون  $c_3$ .

٩- جد عدد القلادات المختلفة التي يمكن تكوينها من 3 خرزات سوداء و 13 خرزة بيضاء.

١٠- (أ) لدينا رقعة مستطيلة مقسمة إلى ٤ مستطيلات متطابقة بحيث تكون شريطاً

له الشكل التالي :



جد عدد النماذج المختلفة لتلوينات مستطيلات الشريط عندما يكون عدد الألوان المتاحة يساوي 2.

(ب) جد عدد النماذج المختلفة عندما يتكون الشريط من 5 مستطيلات متطابقة.

(ج) جد عدد النماذج المختلفة عندما يكون عدد المستطيلات المتطابقة  $n$  وعدد الألوان المتاحة  $r$ .

- ١١- لدينا رقعة مربعة مقسمة إلى 4 مربعات متطابقة. جد عدد النماذج المختلفة لتلوينات مربعات الرقعة عندما يكون عدد الألوان المتاحة يساوي 2.
- ١٢- لدينا رقعة مربعة مقسمة إلى 9 مربعات متطابقة. جد عدد النماذج المختلفة لتلوينات مربعات الرقعة عندما يكون عدد الألوان المتاحة يساوي 2.
- ١٣- لدينا رقعة مربعة مقسمة إلى مربعات متطابقة عددها  $n^2$ . جد عدد النماذج المختلفة لتلوينات مربعات الرقعة عندما يكون عدد الألوان المتاحة يساوي  $r$ .
- ١٤- جد عدد التلوينات المختلفة لرؤوس رباعي وجوه منتظم عندما يكون عدد الألوان المتاحة يساوي  $n$ .
- ١٥- جد عدد التلوينات المختلفة لوجوه رباعي وجوه منتظم عندما يكون عدد الألوان المتاحة يساوي  $n$ .
- ١٦- جد عدد التلوينات المختلفة لرؤوس مكعب عندما يكون عدد الألوان المتاحة يساوي  $n$ .
- ١٧- جد عدد التلوينات المختلفة لوجوه مكعب بحيث تلون ثلاثة وجوه باللون  $c_1$  ويلون وجهان باللون  $c_2$  ويلون وجه واحد باللون  $c_3$ .
- ١٨- جد عدد التلوينات المختلفة لرؤوس ثماني وجوه منتظم عندما يكون عدد الألوان المتاحة يساوي 3.
- ١٩- جد عدد العلاقات الثنائية على مجموعة رباعية والتي ليست متكافئة تحت تأثير التباديل المحدثة بتباديل المجموعة.
- ٢٠- جد عدد علاقات التكافؤ على مجموعة رباعية والتي ليست متكافئة تحت تأثير التباديل المحدثة بتباديل المجموعة.