الفصل الأول

أسس نظرية الرسومات
GRAPH THEORY FOUNDATIONS

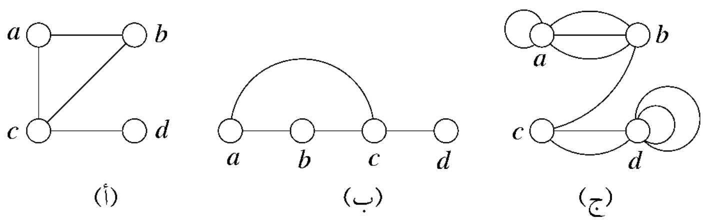
(١,١) تعاريف أساسية

ليكن $G=(V,E)$ زوجاً مرتباً بحيث V مجموعة منتهية غير خالية و E مجموعة عناصرها مجموعات جزئية ثنائية من V ؛ نقول إن G رسم graph (أو رسم بسيط simple graph) **مجموعة رؤوسه** vertex set V و**مجموعة أضلاعه** edge set E. إذا كان $e\in E$ **ضلعاً** edge فإنه يوجد رأسان $u,v\in V$ بحيث $e=\{u,v\}$ ، سنعبر عن e بالرمز uv ونكتب $e=uv$.

يمثل الرسم كما يلي : يمثل كل رأس بدائرة صغيرة أو نقطة ويمثل الضلع $e=uv$ بخط يصل بين الدائرة الممثلة لِ u والدائرة الممثلة لِـ v. وغالباً ما نطابق الرسم بتمثيله، كما نصف أو نعرف الرسم بواسطة الدوائر والخطوط ؛ ويساعد التمثيل على رؤية أوضح للرسم وفهم أعمق لخواصه.

مثال (١,١)

يمكن تمثيل الرسم $G=(V,E)$ حيث $V=\{a,b,c,d\}$ و $E=\{ab,ac,bc,cd\}$ كما في شكل(١,١) (أ) أو في شكل(١,١) (ب).



شكل(١,١).

نلاحظ أن تمثيل الرسم ليس وحيداً، كما أن الأضلاع ليست بالضرورة قطع خطوط مستقيمة. للاختصار نسمي الرسم $G=(V,E)$ بالرسم G.

إذا كان uv ضلعاً في الرسم G ، فإننا نقول إن الضلع uv **يربط** joins الرأسين u و v كما نسمي كلاً من u و v **طرفاً** endpoint للضلع uv. كما نقول إن الرأس u **يجاور** adjacent الرأس v أو **جار** neighbor له. نعرف **درجة الرأس** degree of vertex v بأنها عدد أضلاع الرسم التي يكون v طرفاً لها أو عدد جيران v ونرمز لها بالرمز $\deg(v)$. فمثلاً في مثال (١,١): $\deg(a)=\deg(b)=2$ و $\deg(c)=3$ و $\deg(d)=1$. يسمي الرأس فردياً odd إذا كانت درجته فردية وزوجياً even إذا كانت درجته زوجية ومنعزلاً isolated إذا كانت درجته صفراً.

مفهوم المجموعة المضاعفة multiset تعميم لمفهوم المجموعة. فالمجموعة المضاعفة هي تجمع من العناصر التي ليست بالضرورة مختلفة فمثلاً $\{a,a,a,b,c,c\}$ مجموعة مضاعفة عدد عناصرها 6 ، تكرار a يساوي 3 وتكرار b يساوي 1 وتكرار c يساوي 2.

نسمي الزوج المرتب $G=(V,E)$ **رسماً مضاعفاً** multigraph إذا كانت V مجموعة منتهية غير خالية و E مجموعة مضاعفة عناصرها مجموعات جزئية مضاعفة ثنائية عناصرها من V. إذا كان $e \in E$ ضلعاً فإنه يوجد مجموعة

مضاعفة $\{u,v\}$ من V بحيث $e=\{u,v\}$ ، سنعبر عن e بالرمز uv ونكتب $e=uv$. نسمي الضلع $e=uv$ **ضلعاً مكرراً** multiedge إذا كان تكرار e في E أكبر من 1 ، كما نسمي الضلع $e=uu$ **عروة** loop.

يُمثل الرسم المضاعف كما يلي : يُمثل كل رأس بدائرة صغيرة أو نقطة ويُمثل الضلع $e=uv$ بخط يصل بين الدائرة الممثلة لِ u والدائرة الممثلة لِ v. كما نمثل العروة $e=uu$ بضلع يبدأ من الدائرة الممثلة لِ u وينتهي بها. نعرف درجة الرأس v في الرسم المضاعف بأنها عدد أضلاع الرسم التي يكون v طرفاً لها مضافاً إليه ضعف عدد العرى.

يقال إن الرسم **منتهٍ** finite graph عندما يكون عدد رؤوسه منتهٍ وعدد أضلاعه منتهٍ. يسمى عدد رؤوس الرسم **رتبة** order الرسم ويسمى وعدد أضلاع الرسم **سعة** size (أو حجم) الرسم.

طلباً للاختصار فسنعني بالرسم في هذا الكتاب الرسم البسيط المنتهي ما لم يذكر غير ذلك. من الواضح أن كل رسم بسيط لا يحتوي على عرى أو أضلاع مكررة ويمكن النظر إليه على أنه رسم مضاعف.

مثال (١,٢)

يمكن تمثيل الرسم المضاعف $G=(V,E)$ حيث $V=\{a,b,c,d\}$ و $E=\{aa,ab,ab,ab,bc,cd,cd,dd,dd\}$ كما في شكل(١.١) (ج). وتكون درجات الرؤوس هي : $\deg(a)=5$ و $\deg(b)=4$ و $\deg(c)=3$ و $\deg(d)=6$.

للرسم $G=(V,E)$ نعرف $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ كما يلي :

$$\delta(G)=\min\{\deg(v):v\in V\}$$

$$\Delta(G)=\max\{\deg(v):v\in V\}$$

تعطي المبرهنة التالية علاقة بين عدد الأضلاع في الرسم ومجموع درجات رؤوس ذلك الرسم.

مبرهنة (١,١)

إذا كان $G = (V, E)$ رسماً، فإن $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$.

البرهان

بما أن كل ضلع في الرسم له طرفان، فإن كل ضلع يعد بالضبط مرتين في $\sum_{v \in V} \deg(v)$.

نتيجة (١,١)

عدد الرؤوس الفردية في الرسم $G = (V, E)$ هو عدد زوجي.

البرهان

لتكن V_1 مجموعة الرؤوس الفردية و V_2 مجموعة الرؤوس الزوجية في G. لاحظ أن $V_1 \cap V_2 = \phi$ وأن $V_1 \cup V_2 = V$. من مبرهنة (١,١) نجد أن،

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v)$$

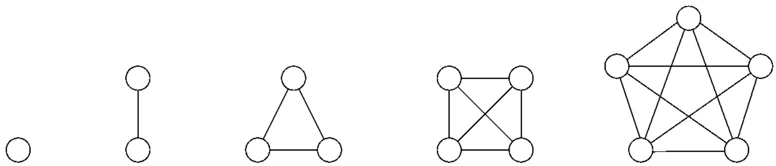
أي،

$$\sum_{v \in V_1} \deg(v) = 2|E| - \sum_{v \in V_2} \deg(v)$$

وبما أن الطرف الأيمن لهذه المساواة عدد زوجي فإن عدد الحدود في الطرف الأيسر يجب أن يكون زوجياً. وينتج من ذلك أن $|V_1|$ عدد زوجي. □

الرسم التام complete graph هو الرسم الذي يتجاور فيه كل رأسين. ويرمز للرسم التام الذي عدد رؤوسه n بالرمز K_n. الشكل(١,٢) يوضح الرسوم K_1 و K_2 و K_3 و K_4 و K_5.

بما أن عدد رؤوس K_n هو n ودرجة كل رأس في K_n تساوي $n-1$ ، فينتج من مبرهنة(١,١) أن $2|E| = n(n-1)$. أي ، $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$ حيث E هي مجموعة أضلاع K_n .

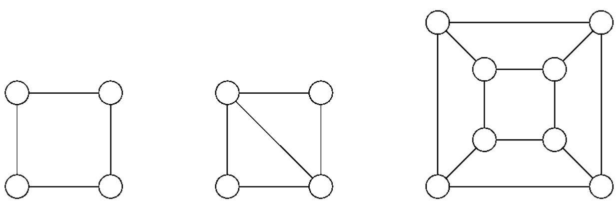


K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

شكل(١,٢).

نقول إن G **رسم صفري** null graph إذا كانت $E(G) = \phi$ ، ونستخدم الرمز N_r للدلالة على الرسم الصفري الذي عدد رؤوسه r. يسمى N_1 **الرسم التافه** trivial graph.

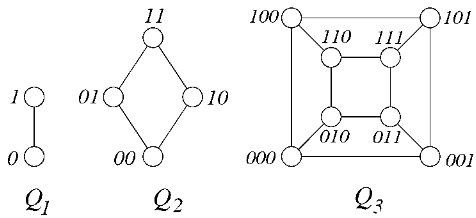
يسمى الرسم $G = (V, E)$ **رسماً منتظماً من النوع** r r-regular إذا كان $\deg(v) = r$ لكل رأس $v \in V$. لاحظ أن الرسم التام K_n رسم منتظم من النوع $n-1$. في شكل(١,٣) الرسم G رسم منتظم من النوع 2 والرسم H رسم غير منتظم بينما الرسم K رسم منتظم من النوع 3.



G H K

شكل(١,٣).

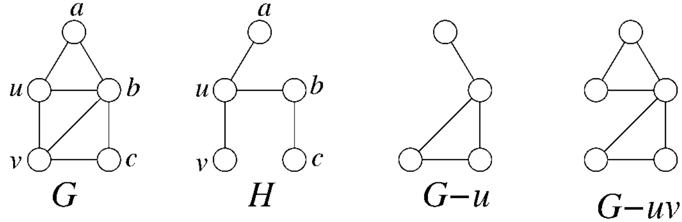
ليكن $k \geq 1$ ، نعرف **المكعب الفوقي** hypercube Q_k بأنه رسم رؤوسه المتتاليات من الطول k المأخوذة من المجموعة $\{0,1\}$ بحيث تتجاور فيه متتاليتان إذا وفقط إذا اختلفتا في موضع واحد فقط. شكل(١,٤) يوضح الرسوم Q_1 و Q_2 و Q_3.



شكل(١,٤).

(١,٢) الرسوم الجزئية

يسمى الرسم $G' = (V', E')$ **رسماً جزئياً** subgraph من الرسم $G = (V, E)$ إذا كان $V' \subseteq V$ و $E' \subseteq E$ ، و يسمى **رسماً جزئياً مولّداً** spanning subgraph للرسم G إذا كان $V' = V$ و $E' \subseteq E$. إذا كان v رأساً في $G = (V, E)$ فإننا نعرف الرسم الجزئي $G - v$ بأنه الرسم الذي رؤوسه $V - \{v\}$ وأضلاعه E بدون الأضلاع التي v طرف لها. إذا كان e ضلعاً في $G = (V, E)$ فإننا نعرف الرسم الجزئي $G - e$ بأنه الرسم الذي رؤوسه V وأضلاعه هي $E - \{e\}$. شكل(١,٥) يوضح بعض الرسوم الجزئية للرسم G.



شكل(١,٥).

إذا كـان u,v رأسـين غـير متجـاورين في $G=(V,E)$ فإننـا نعـرف الرسـم $G+e$ بأنه الرسم الذي رؤوسه V وأضلاعه $E\cup\{e\}$ حيث $e=uv$.

لتكن $\phi\neq S\subseteq V$. نرمز للرسم الجزئي من G **المولَّد** (أو **المحدث**) بوساطة S (subgraph of G induced by S) بـالرمز $<S>$ أو بـالرمز $G[S]$ ونعرفه على أنه الرسم الذي مجموعة رؤوسه S ومجموعة أضلاعه تتكون من أضلاع G التي تصل بين الرؤوس التي في S. بالمثل، إذا كانت $\phi\neq F\subseteq E$ فإننا نرمز للرسم الجزئي من G المحدث (أو المولَّد) بوساطة F بالرمز $<F>$ أو بالرمز $G[F]$ ونعرفه على أنه الرسم الذي مجموعة أضلاعه F ومجموعة رؤوسه تتكون من أطراف الأضلاع التي في F.

(١,٣) الرسوم المترابطة

تسمى المتتالية المتناوبة من الرؤوس والأضلاع $v_1,e_1,v_2,e_2,v_3,\cdots,v_{m-1},e_{m-1},v_m$ **ممراً** path من الرأس v_1 إلى الرأس v_m في الرسم $G=(V,E)$ إذا كانت الرؤوس $v_1,v_2,\cdots,v_m$ مختلفة وكان $e_i=v_iv_{i+1}\in E$ لكل $1\leq i\leq m-1$؛ ونرمز للممر اختصاراً بمتتالية الرؤوس $v_1v_2\cdots v_m$. نعرف **طول الممر** بأنه عدد أضلاعه. في شكل(١,١)(أ) ab ممر من a إلى b طوله واحد و acb ممر من a إلى b طوله اثنان. نرمز بالرمز P_n لممر عدد رؤوسه n.

تسمى المتتالية المتناوبة من الرؤوس والأضلاع $v_1,e_1,v_2,e_2,v_3,\cdots,v_{m-1},e_{m-1},v_m,e_m,v_1$، $m\geq 3$ **دورة** cycle في الرسم $G=(V,E)$ إذا كانت الرؤوس $v_1,v_2,\cdots,v_m$ مختلفة و $e_i=v_iv_{i+1}\in E$ لكل $1\leq i\leq m-1$ و $e_m=v_mv_1\in E$؛ ونرمز للدورة

اختصاراً بمتتالية الرؤوس $v_1v_2\cdots v_mv_1$. نعرف **طول الدورة** بأنه عدد أضلاعها. في شكل(١,١)(أ) $acba$ دورة طولها ثلاثة. نرمز بالرمز C_n لدورة عدد رؤوسها n.

ليكن $k \geq 4$ ، نحصل على **العجلة** wheel W_k بإضافة رأس إلى الدورة C_{k-1} وجعله مجاوراً لجميع رؤوس الدورة. شكل(١,٦) يوضح العجلات W_4, W_5, W_6.

يقال إن الرأسين u, v **مترابطان** connected في الرسم $G = (V, E)$ إذا وجد ممر من u إلى v أو إذا كان $u = v$ ، كما يقال إن الرسم $G = (V, E)$ **مترابط** connected graph إذا كان كل رأسين فيه مترابطين.

لنعرف العلاقة التالية على رؤوس الرسم $G = (V, E)$. الرأس u على علاقة مع الرأس v إذا كان u و v مترابطين.

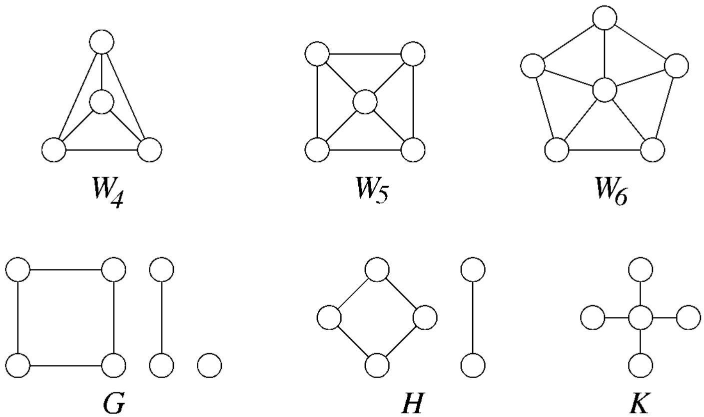
مبرهنة (١,٢)

علاقة الترابط على رؤوس الرسم G هي علاقة تكافؤ.

البرهان

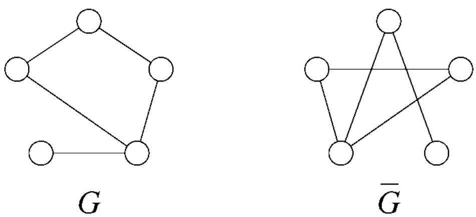
متروك كتمرين للقارئ.

تسمى الرسوم المحدثة بفصول التكافؤ لهذه العلاقة **المركبات المترابطة** connected components للرسم G ، نسميها اختصاراً المركبات. نلاحظ أن المركبة رسم جزئي مترابط أعظمي maximal connected subgraph وأن الرسم المترابط يحتوي على مركبة واحدة فقط. في شكل(١,٦) الرسم G رسم غير مترابط له ثلاث مركبات والرسم H غير مترابط له مركبتان في حين أن الرسم K رسم مترابط.



شكل(١,٦).

للرسم $G=(V,E)$ نعرف رسماً نسميه **متمم** complement G ونرمز له بالرمز $\bar{G}=(V,E')$ أو بالرمز G^c بحيث يكون الرأسان متجاورين في $\bar{G}$ إذا وفقط إذا كانا غير متجاورين في G. إذا كان $|V|=n$ ، فمن السهل ملاحظة أن $K_n=(V,E\cup E')$ وأن $E\cap E'=\phi$. شكل(١,٧) يعطي مثالاً على G و $\bar{G}$.



شكل(١,٧).

مبرهنة (١,٣)

لأي رسم $G=(V,E)$ ، إما G أو $\bar{G}$ مترابط.

البرهان

لإثبات المبرهنة يكفي برهان أنه إذا كان G غير مترابط فإن $\bar{G}$ مترابط. لنفرض أن G رسم غير مترابط مركباته $C_1,C_2,\ldots,C_m$ ، $m \geq 2$. افرض أن x,y رأسان في G ، نريد إثبات وجود ممر بينهما في $\bar{G}$. ليكن $x \in C_i, y \in C_j$. لدينا حالتان: $i \neq j$ أو $i = j$. إذا كانت $i \neq j$ ، فإن xy ليس ضلعاً في G ومنه xy ضلع في $\bar{G}$ وعليه فإن xy ممر من x إلى y في $\bar{G}$. إذا كان $i = j$ ، فإنه يوجد $z \in C_k$ حيث $k \neq i$. بما أن xz, yz ليسا ضلعين في G ، فإنهما ضلعان في $\bar{G}$ ومنه xzy ممر من x إلى y في $\bar{G}$. □

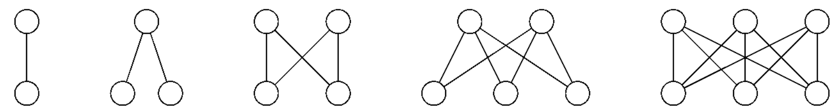
نرمز للمسافة distance **بين الرأسين** u و v في الرسم $G = (V, E)$ بالرمز $d(u,v)$ ونعرفها بأنها طول أقصر ممر بين u و v إذا كان u و v مرتبطين. كما نعرف $d(u,v) = \infty$ إذا كان لا يوجد ممر بين u و v. ونعرف $d(v,v) = 0$ لكل رأس v في الرسم G. على سبيل المثال $d(a,b) = 1$ و $d(a,d) = 2$ في شكل(١,١)(أ).

ليكن $G = (V, E)$ رسماً مترابطاً وليكن $v \in V$. يسمى $\varepsilon(v) = \max\{ d(u,v) : u \in V \}$ **الاختلاف المركزي** eccentricity للرأس v ؛ ويسمى $r(G) = \min\{\varepsilon(v) : v \in V\}$ **نصف قطر** radius الرسم G ، كما يسمى $d(G) = \max\{\varepsilon(v) : v \in V\}$ **قطر** diameter الرسم G. تسمى المجموعة $C(G) = \{ v \in V : \varepsilon(v) = r(G)\}$ **مركز** center الرسم G.

(١,٤) الرسوم ثنائية التجزئة

يسمى الرسم $G = (V, E)$ **رسماً ثنائي التجزئة** bipartite graph إذا أمكن تجزئة رؤوسه إلى جزئين منفصلين X,Y كل منهما غير خالٍ بحيث إذا كان

$uv \in E$ فإن $u \in X$ و $v \in Y$ أو العكس. عادةً ما نرمز للرسم G بالرمز $G=(X,Y,E)$ أو بالرمز $G=(X\cup Y,E)$. يسمى الرسم ثنائي التجزئة $G=(X,Y,E)$ **رسماً ثنائي التجزئة تاماً** complete bipartite graph إذا كان $xy \in E$ لكل $x \in X$ و $y \in Y$ ، كما نرمز له بالرمز $K_{m,n}$ حيث $|X|=m$ و $|Y|=n$. شكل(١,٨) يوضح بعض الرسوم ثنائية التجزئة التامة.



$K_{1,1}$ $K_{1,2}$ $K_{2,2}$ $K_{2,3}$ $K_{3,3}$

شكل(١,٨).

يمكن إثبات أن الدورة الثلاثية $abca$ ليست رسماً ثنائي التجزئة بطريقة البرهان بالتناقض كما يلي :

افرض أن الدورة الثلاثية $abca$ رسم ثنائي التجزئة. عليه الرؤوس مجزئة إلى مجموعتين منفصلتين X,Y كل منهما غير خالية. دون فقد للعمومية بالإمكان فرض أن $a \in X$. عليه $b \in Y$ لأن ab ضلع. ومنه $c \notin X$ لأن ac ضلع. كذلك $c \notin Y$ لأن bc ضلع وهذا يناقض فرضنا أن الدورة abc رسم ثنائي التجزئة.

مبرهنة (١,٤)

إذا كان $G=(X,Y,E)$ رسماً ثنائي التجزئة، فإن

$$|E| = \sum_{x \in X} \deg(x) = \sum_{y \in Y} \deg(y)$$

البرهان

لاحظ أن كل ضلع xy يساهم بالضبط في $\sum_{x\in X}\deg(x)$ بواحد، ويساهم بالضبط في $\sum_{y\in Y}\deg(y)$ بواحد أيضاً. □

في الرسم $K_{m,n}=(X,Y,E)$ لاحظ أن $\deg(x)=n$ لكل $x\in X$. من مبرهنة(١,٤)، $|E|=\sum_{x\in X}\deg(x)=mn$.

المبرهنة التالية تعطي تمييزاً للرسوم ثنائية التجزئة.

مبرهنة (١,٥)

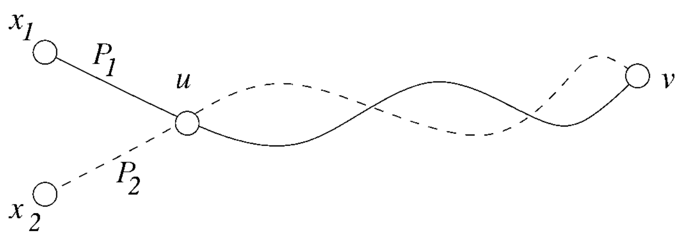
الرسم $G=(V,E)$ رسم ثنائي التجزئة إذا وفقط إذا كان لا يحتوي على دورة طولها فردي.

البرهان

دون فقد للعمومية بالإمكان فرض أن $G=(V,E)$ رسم مترابط. افرض أن الرسم $G=(V,E)=(X,Y,E)$ رسم ثنائي التجزئة و أن $v_1v_2\cdots v_mv_1$ دورة في G. بالإمكان فرض أن $v_1\in X$ ؛ عليه $v_2\in Y$ لأن $v_1v_2\in E$. كذلك $v_3\in X$ لأن $v_2v_3\in E$. بالاستمرار بالطريقة نفسها نجد أن $v_i\in X$ إذا كان i فردياً و $v_i\in Y$ إذا كان i زوجياً لكل $1\le i\le m$. عليه m زوجي ومنه طول الدورة زوجي. عليه، G لا يحتوي على دورة طولها فردي.

لإثبات الاتجاه الآخر، افرض أن G لا يحتوي على دورة طولها فردي. اختر رأساً v في G وعرف المجموعتين A,B كما يلي: A هي مجموعة الرؤوس التي المسافة بين أي منها و v عدد فردي و B هي مجموعة الرؤوس التي المسافة بين أي

منها و v عدد زوجي. من السهل ملاحظة أن $A \cap B = \phi$ وأن $A \cup B = V$. نريد إثبات أن G رسم ثنائي التجزئة. لإثبات ذلك يكفي أن نبرهن أنه لا يوجد رأسان متجاوران في A أو رأسان متجاوران في B . افرض أن x_1, x_2 رأسان في A (البرهان مشابه لو كان x_1, x_2 رأسين في B). افرض أن P_1 هو أقصر ممر من v إلى x_1 و P_2 هو أقصر ممر من v إلى x_2 وليكن u آخر رأس يتقاطع فيه P_1 و P_2 (انظر شكل(١,٩)). بما أن P_1 هو أقصر ممر من v إلى x_1 و P_2 هو أقصر ممر من v إلى x_2 ، فإن طول جزء الممر P_1 من v إلى u يساوي طول جزء الممر P_2 من v إلى u. عليه طول جزء الممر P_1 من u إلى x_1 وطول جزء الممر P_2 من u إلى x_2 سيكونان إما فرديين معاً أو زوجيين معاً. عليه، x_1 لا يجاور x_2 لأن G لا يحتوي على دورات طولها فردي. عليه $G = (A, B, E)$ رسم ثنائي التجزئة.



شكل(١,٩).

(١,٥) تمثيل الرسم بمصفوفة

يعتبر تمثيل الرسم بمصفوفة إحدى الطرائق المشهورة للتعبير عن الرسم وذلك لغرض التعامل معه في برامج الحاسب الآلي. وهذه الطريقة ليست الطريقة الوحيدة لتمثيل الرسم في الحاسب الآلي فهناك ما يسمى بطريقة قائمة التجاور adjacency list وطريقة القائمة (الموصولة) المترابطة linked list.

ليكن $G=(V,E)$ رسماً بحيث $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$. نعرف **مصفوفة التجاور** adjacency matrix $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ للرسم G كما يلي :

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & ,v_iv_j\in E\\ 0 & ,v_iv_j\notin E\end{cases}$$

على سبيل المثال مصفوفة التجاور للرسم الموضح في شكل(١،١)(أ) هي :

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

حيث $v_1=a,\ v_2=b,\ v_3=c,\ v_4=d$.

نلاحظ أن $A=A^t$ ، حيث A^t هي منقول transpose المصفوفة A. كما نلاحظ أن $\deg(v_i)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$ ومنه $2|E|=\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}$.

تسمى المتتالية المتناوبة من الرؤوس والأضلاع $W=v_1,e_1,v_2,e_2,v_3,\cdots,v_{m-1},e_{m-1},v_m$ **مساراً** walk من الرأس v_1 إلى الرأس v_m في الرسم $G=(V,E)$ إذا كان $e_i=v_iv_{i+1}\in E$ لكل $1\le i\le m-1$. كما نعرف **طول المسار** W بأنه عدد أضلاع W ، أي $m-1$. ويقال إن المسار W مغلق إذا كان $v_1=v_m$. يسمى المسار **طريقاً** trail إذا كانت أضلاعه مختلفة. ويسمى الطريق المغلق **دارةً** circuit.

مبرهنة (١,٦)

إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة التجاور للرسم G الذي رؤوسه $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ وكانت $A^m=[a_{ij}^{(m)}]$ ، فإن $a_{ij}^{(m)}$ يساوي عدد المسارات المختلفة التي طولها m من الرأس v_i إلى الرأس v_j.

البرهان

نستخدم الاستقراء على m. عندما $m=1$ ، لاحظ أن المسار ذا الطول 1 من الرأس v_i إلى الرأس v_j يعينه الضلع v_iv_j ، عليه يوجد مسار من الرأس v_i إلى الرأس v_j طوله 1 إذا كان v_i, v_j متجاورين. ومنه عدد المسارات من الرأس v_i إلى الرأس v_j التي طولها 1 يساوي a_{ij}.

افرض أن المبرهنة صحيحة لكل الأعداد الصحيحة الموجبة التي أقل من m. نريد إثبات صحة المبرهنة للعدد m.

لاحظ أن أي مسار طوله m من الرأس v_i إلى الرأس v_j يتعين تماماً بتعيين مسار طوله $m-1$ من الرأس v_i إلى رأس ما v_k وتعيين ضلع طرفيه v_j, v_k. من فرضية الاستقراء، عدد المسارات من الرأس v_i إلى الرأس v_k التي طولها $m-1$ يساوي $a_{ik}^{(m-1)}$. عليه، عدد المسارات من الرأس v_i إلى الرأس v_j التي طولها m يساوي $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(m-1)} a_{kj}$ والذي يساوي حسب تعريف ضرب المصفوفات $a_{ij}^{(m)}$.

مبرهنة (١,٧)

لتكن $A=[a_{ij}]$ مصفوفة التجاور للرسم G الذي رؤوسه $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ولتكن $B=[b_{ij}]$ هي المصفوفة المعرفة على النحو التالي : $B = A^1 + A^2 + \cdots + A^{n-1}$. عندئذ G رسم مترابط إذا وفقط إذا كان $b_{ij} \neq 0$ لكل $i \neq j$.

البرهان

لنفرض أن $A^k = [a_{ij}^{(k)}]$ لكل $k = 1, 2, \ldots, n-1$ عندئذ : $b_{ij} = a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + \cdots + a_{ij}^{(n-1)}$. نعلم من مبرهنة(١,٦) أن $a_{ij}^{(k)}$ يساوي عدد المسارات المختلفة التي طولها k من الرأس v_i إلى الرأس v_j. ومن ثم فإن b_{ij}

يساوي عدد المسارات المختلفة من v_i إلى v_j التي طولها أصغر من أو يساوي $n-1$.

لنفرض الآن أن G رسم مترابط. وليكن $v_i, v_j \in V(G)$ بحيث $v_i \neq v_j$. عنئذ يوجد ممر من v_i إلى v_j. بما أن $|V| = n$ فإن طول أي ممر من v_i إلى v_j هو على الأكثر $n-1$. وبما أن كل ممر هو مسار لذا فإنه يوجد على الأقل مسار واحد من v_i إلى v_j. وعليه فإن $b_{ij} \neq 0$.

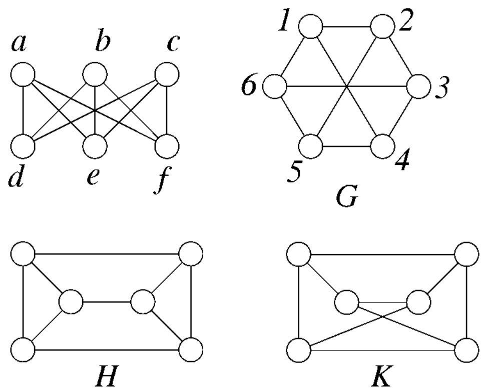
ولبرهان العكس، نفرض أن $b_{ij} \neq 0$ لكل $i \neq j$ ولذا نجد على الأقل مساراً واحداً (ومن ثم على الأقل ممراً واحداً) من v_i إلى v_j. وعليه فإن G مترابط.

(١,٦) التماثل في الرسوم

نقول إن الرسم $G_1 = (V_1, E_1)$ **يساوي** الرسم $G_2 = (V_2, E_2)$ ونكتب $G_1 = G_2$ إذا كان $V_1 = V_2$ و $E_1 = E_2$، وخلاف ذلك نقول إن G_1 و G_2 مختلفان ونكتب $G_1 \neq G_2$.

نقول إن الرسم $G_1 = (V_1, E_1)$ **متماثل** isomorphic مع الرسم $G_2 = (V_2, E_2)$ ونكتب $G_1 \cong G_2$ إذا وجد تقابل $f : V_1 \to V_2$ يحقق الشرط: $uv \in E_1$ إذا وفقط إذا كان $f(u)f(v) \in E_2$ وحينئذٍ يسمى f تماثل رسوم graph isomorphism. في الحقيقة، إذا كان الرسمان متماثلين فالفرق الواضح بينهما هو فقط في تسمية الرؤوس. إذا لم يوجد تماثل بين الرسمين G_1 و G_2 فنقول إنهما غير متماثلين ونكتب $G_1 \ncong G_2$.

على سبيل المثال في شكل(١,١٠) نجد أن $G \cong K_{3,3}$ وذلك لوجود التقابل $g: V\left(K_{3,3}\right) \to V\left(G\right)$ الموضح في الجدول الموجود في شكل(١,١٠) والذي يحقق الشرط : uv ضلع في $K_{3,3}$ إذا وفقط إذا كان $g(u)g(v)$ ضلعاً في G.



x	g(x)
a	1
b	3
c	5
d	2
e	4
f	6

شكل(١,١٠).

النتيجة التالية تفيدنا فقط في إثبات أن الرسمين غير متماثلين، أما لإثبات التماثل فيجب إيجاد التقابل والتحقق من شرطه، مباشرةً أو باستخدام مصفوفات التجاور، لجميع الأضلاع.

لتكن $V_1 = V_2 = \{a,b,c,d\}$ وليكن $G_1 = \left(V_1, E_1\right)$ و $G_2 = \left(V_2, E_2\right)$ الرسمين الموضحين في شكل(١,١١). نلاحظ أن $G_1 \neq G_2$ لأن $E_1 \neq E_2$. كما نلاحظ أن $G_1 \cong G_2$ بوساطة التقابل $f: V_1 \to V_2$ الذي يحقق الشرط : $uv \in E_1$ إذا وفقط إذا كان $f(u)f(v) \in E_2$ وهذا ما يوضحه تساوي مصفوفتي التجاور $A\left(G_1\right)$ و $A\left(G_2\right)$ واللتان كونتا بالترتيبين a,b,c,d لرؤوس الرسم G_1 و c,d,a,b لرؤوس الرسم G_2.

$$A(G_1)=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix},\ A(G_2)=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}$$

على الرغم من عدم تساوي الرسمين G_1 و G_2 نلاحظ أن لهما خواص كثيرة مشتركة بسبب تماثلهما. من السهل برهان أن علاقة تماثل الرسوم هي علاقة تكافؤ على المجموعة المكونة من جميع الرسوم (انظر تمرين١٩). كل خاصة مشتركة لجميع عناصر فصل تكافؤ تسمى **لامتغير تماثل** isomorphism invariant. النتيجة التالية تعطينا بعض لامتغيرات التماثل كما يمكن استخدام هذه النتيجة لاكتشاف عدم تماثل رسمين.

نتيجة (١,٢)

إذا كان $G_1=(V_1,E_1)$ و $G_2=(V_2,E_2)$ رسمين متماثلين فإن :

١- $|V_1|=|V_2|$ و $|E_1|=|E_2|$.

٢- إذا وجد في الرسم G_1 ممر (دورة) من طول معين، فإنه يوجد في الرسم G_2 ممر (دورة) من الطول نفسه.

٣- عدد الدورات في الرسم G_1 من طول معين، يساوي عدد الدورات في الرسم G_2 من الطول نفسه.

٤- إذا كانت $d_1,d_2,\ldots,d_n$ هي درجات رؤوس الرسم G_1 ، فإنها هي كذلك درجات رؤوس الرسم G_2.

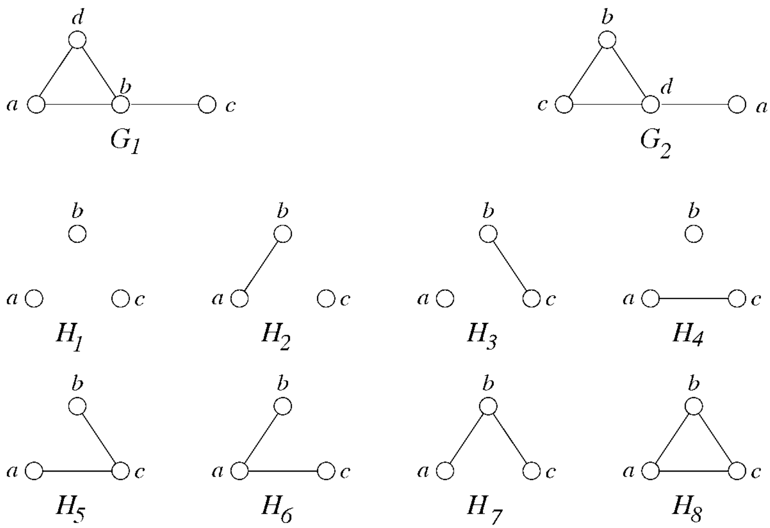
البرهان

البرهان نتيجة مباشرة من تعريف التماثل. □

على سبيل المثال $H \not\cong K$ في شكل(١,١٠) لأن الرسم H يحتوي على مثلث (أي دورة طولها ثلاثة) بينما الرسم K لا يحتوي على أي مثلث.

نلاحظ أن لامتغيرات التماثل لفصل تكافؤ رسم معطى G تكون مستقلة تماماً عن أسماء رؤوس G. وغالباً ما نسمي G رسماً **مُعلَّماً** labeled عندما نهتم بأسماء رؤوسه، ونسميه رسماً **غير معلم** unlabeled عندما لا نهتم بأسماء رؤوسه ونعتبره ممثلاً لفصل تكافئه.

يوضح شكل(١,١١) كل الرسوم المعلمة ذات الثلاثة رؤوس : $H_1, H_2, \ldots, H_8$.
لاحظ أن فصول التكافؤ في هذا الشكل هي :
$\{\{H_1\}, \{H_2, H_3, H_4\}, \{H_5, H_6, H_7\}, \{H_8\}\}$.



شكل(١,١١).

لاحظ أن إيجاد عدد الرسوم المختلفة المعلمة التي عدد رؤوسها n سهل كما في تمرين٧ في نهاية هذا الفصل، في حين أن إيجاد عدد الرسوم المختلفة غير المعلمة

وغير المتماثلة التي عدد رؤوسها n يحتاج في الحالة العامة إلى نظرية بوليا في العد ويمكن الرجوع إلى كتب نظرية التركيبات بشأن ذلك.

(١,٧) العمليات على الرسوم

توجد عدة طرائق لإنشاء رسوم جديدة من رسوم معطاة. وتفيد هذه الطرائق في توصيف بنية رسم ما بدلالة رسوم أبسط، كما تساعد في التعبير عن الرسوم بترميز موجز.

إذا كان G_1, G_2 رسمين بحيث $V(G_1) \cap V(G_2) = \phi$ فإن $G_1 \cup G_2$ ، $G_1 + G_2$ و $G_1 \times G_2$ ترمز إلى **اتحاد** union G_1 و G_2 ، **مضموم** join G_1 و G_2 ، **حاصل ضرب** product أو جُداء G_1 و G_2 على الترتيب. وهذه رسوم معرفة كما يلي :

(أ) $V\left(G_1 \cup G_2\right) = V\left(G_1\right) \cup V\left(G_2\right)$

$$E\left(G_1 \cup G_2\right) = E\left(G_1\right) \cup E\left(G_2\right)$$

وإذا كان $G_1 \cong G_2 \cong G$ فإن $2G$ تدل على $G_1 \cup G_2$.

(ب) $V\left(G_1 + G_2\right) = V\left(G_1\right) \cup V\left(G_2\right)$

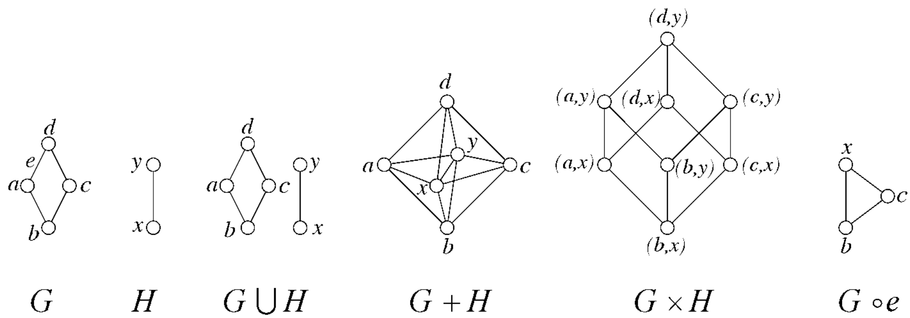
$$E\left(G_1 + G_2\right) = E\left(G_1\right) \cup E\left(G_2\right) \cup A$$

حيث $A = \left\{xy : x \in V\left(G_1\right), y \in V\left(G_2\right)\right\}$.

(ج) $V\left(G_1 \times G_2\right) = V\left(G_1\right) \times V\left(G_2\right)$

ويكون الرأسان $\left(x_1, y_1\right), \left(x_2, y_2\right)$ متجاورين في الرسم $G_1 \times G_2$ إذا وفقط إذا كان $x_1 = x_2,\ y_1 y_2 \in E\left(G_2\right)$ أو $x_1 x_2 \in E\left(G_1\right), y_1 = y_2$.

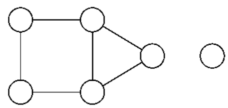
ليكن G رسماً وليكن $e = x_1x_2 \in E(G)$. الرمز $G \circ e$ يدل على الرسم الناتج عن **تقليص** contraction الضلع e ونحصل عليه كما يلي : نحذف الضلع e والرأسين x_1, x_2 ثم نضيف رأساً جديداً x_3 ونجعل x_3 مجاوراً لرؤوس G المجاورة للرأس x_1 أو للرأس x_2. ويلاحظ أنه يمكن أن ينتج عن عملية التقليص أضلاع مكررة أو عرى ؛ وعند التعامل مع التقليص يحذف التكرار أو العرى عندما لا يؤثر ذلك على ما يُدرس. شكل(١،١٢) يوضح الرسمين G, H والرسوم $G \circ e$, $G \times H$, $G + H$, $G \cup H$.



شكل(١،١٢).

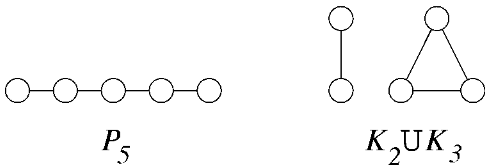
(١،٨) متتاليات الدرجات ومجموعات الدرجات

تعيّن درجات الرؤوس في رسم G متتاليات من الأعداد الصحيحة غير السالبة تسمى **متتاليات درجات** degree sequences للرسم G. فمثلاً، تكون المتتالية غير المتزايدة $s = (3,3,2,2,2,0)$ متتالية درجات G حيث G معطى في شكل(١،١٣).



شكل(١,١٣).

كذلك تعيّن درجات الرؤوس مجموعة تسمى **مجموعة درجات** degree set للرسم G. وتكون $D = \{0,2,3\}$ مجموعة درجات الرسم المعطى في شكل(١,١٣). ونلاحظ أن $(2,2,2,1,1)$ تكون متتالية درجات P_5 كما تكون متتالية درجات $K_2 \cup K_3$ كما هو مبين في شكل(١,١٤).



شكل(١,١٤).

لتكن $s = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$ متتالية درجات الرسم G. بناءً على مبرهنة (١,١) فإن $\sum_{i=1}^{n} d_i$ عدد زوجي. ويمكن طرح السؤال التالي : إذا كانت $s = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$ متتالية غير متزايدة من الأعداد الصحيحة غير السالبة بحيث إن $\sum_{i=1}^{n} d_i$ عدد زوجي فهل يوجد رسم G بحيث تكون s متتالية درجات G؟ المبرهنة التالية تجيب عن هذا السؤال بنعم عندما نسمح بوجود العرى والأضلاع المكررة.

مبرهنة (١,٨)

متتالية الأعداد الصحيحة غير السالبة $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ تكون متتالية درجات لرسم مضاعف إذا وفقط إذا كان $\sum_{i=1}^{n} d_i$ زوجياً.

البرهان

إذا كانت $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ متتالية درجات لرسم فإن $\sum_{i=1}^{n} d_i$ زوجي وفق مبرهنة (١,١). افرض الآن أن $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ متتالية أعداد صحيحة غير سالبة بحيث إن $\sum_{i=1}^{n} d_i$ زوجي. بما أن $\sum_{i=1}^{n} d_i$ زوجي فإن عدد الأعداد الفردية من بين الأعداد $d_1, d_2, \cdots, d_n$ زوجي. لتكن هذه الأعداد الفردية هي $d_{i_1}, d_{i_2}, \cdots d_{i_{2k}}$. ننشئ رسماً مضاعفاً G يحقق المطلوب كما يلي: نبدأ بإنشاء الرؤوس الفردية $v_1, v_2, \cdots, v_{2k}$ بحيث $v_1v_2, v_3v_4, \cdots, v_{2k-1}v_{2k} \in E(G)$، ثم نضيف عرى عند الرؤوس $v_1, v_2, \cdots, v_{2k}$ بحيث تكون $\deg v_j = d_{i_j}$. واضح أنه يمكن استخدام العرى لإنشاء الرؤوس الزوجية. □

نلاحظ أن الإثبات الإنشائي لمبرهنة (١,٨) استخدم العرى ولم يستخدم الأضلاع المكررة، ونلاحظ أنه لا يوجد رسم بلا عرى ومتتالية درجاته $s = (2, 0, 0)$. سيكون هدفنا القريب الحصول على تمييز لمتتاليات درجات الرسوم البسيطة، ونترك للتمارين مسألة تمييز متتاليات درجات الرسوم التي لا تحتوي على عرى.

تسمى متتالية من الأعداد الصحيحة غير السالبة $s = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$ **متتالية رسمية** graphical sequence إذا وجد رسم بسيط G بحيث تكون s متتالية درجات G. كذلك، تسمى مجموعة من الأعداد الصحيحة غير السالبة D **مجموعة رسمية** graphical set إذا وجد رسم بسيط H بحيث تكون D مجموعة درجات H. ويسمى G **تجسيداً** realization لِـ s كما يسمى H **تجسيداً** لِـ D.

تزوّدنا المبرهنة التالية بشرط لازم وكافٍ حتى تكون متتالية s متتالية رسمية، كما تعطينا ضمنياً خوارزمية لتجسيد s عندما تكون s رسمية.

مبرهنة (١,٩)

لتكن $s=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ متتالية غير متزايدة من الأعداد الصحيحة غير السالبة بحيث $d_1 \geq 1, n \geq 2$. عندئذٍ، s متتالية رسمية إذا وفقط كانت $s_1=(d_2-1,d_3-1,\cdots,d_{d_1+1}-1,d_{d_1+2},\cdots,d_n)$ متتالية رسمية.

البرهان

نفرض أولاً أن s_1 متتالية رسمية. إذن يوجد تجسيد G_1 لِ s_1؛ وتوجد عنونة لرؤوس $v_2,v_3,\cdots,v_n$ لرؤوس G_1 بحيث

$$\deg v_i=\begin{cases} d_i-1 & 2\leq i\leq d_1+1 \\ d_i & d_1+2\leq i\leq n \end{cases}$$

ونحصل على تجسيد G لِ s بعد إضافة رأس وأضلاع إلى G_1 كما يلي:

$$V(G)=V(G_1)\cup\{v_1\}$$
$$E(G)=E(G_1)\cup\{vv_i : 2\leq i\leq d_1+1\}$$

وعليه فإن s متتالية رسمية.

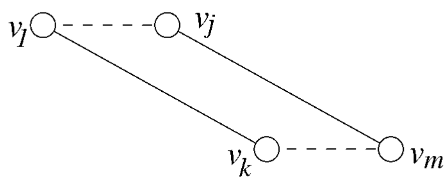
نفرض الآن أن s متتالية رسمية. إذن توجد تجسيدات لِ s، ونختار من بينها الرسم G، بحيث $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$، $\deg v_i=d_i$ لكل $1\leq i\leq n$، ومجموع درجات الرؤوس المجاورة لِ v_1 أكبر ما يمكن. ندّعي أن v_1 مجاور لرؤوس درجاتها: $d_2,d_3,\cdots,d_{d_1+1}$. وللحصول على تناقض، نفرض أن درجات الرؤوس المجاورة لِ v_1 غير ذلك. إذن يوجد $j<k$ بحيث $\deg v_j=d_j>d_k=\deg v_k$، v_1 مجاور لِ v_k و v_1 غير مجاور لِ v_j. بما أن

$\deg v_j > \deg v_k$ فإنه يوجد رأس v_m بحيث يكون v_m مجاوراً لِـ v_j وغير مجاور لِـ v_k. الآن، ننشئ رسماً G' من G كما يلي:

ضع $V(G') = V(G)$، وضع

$$E(G') = \left(E(G) \setminus \{v_1v_k, v_jv_m\}\right) \cup \{v_1v_j, v_kv_m\}$$

كما هو موضح في شكل(١,١٥). نلاحظ أن G' تجسيد لِـ s ولكن مجموع درجات الرؤوس المجاورة لِـ v_1 في G' أكبر من المجموع المقابل في G. وهذا يناقض اختيارنا لِـ G. إذن v_1 مجاور في G للرؤوس درجاتها: $d_2, d_3, \cdots, d_{d_1+1}$. إذن $G - v_1$ تجسيد لِـ s_1، وعليه فإن s_1 متتالية رسمية. □



شكل(١,١٥).

قبل استخدام مبرهنة (١,٩) في حل المثال التالي؛ نذكّر بأنه في أي رسم بسيط $G = (V, E)$ يكون مجموع درجات الرؤوس عدداً زوجياً، ولكل $v \in V$ يكون $0 \le \deg v \le |V| - 1$؛ كما أنه إذا وجد رأس x بحيث $\deg x = 0$ فإنه لا يوجد رأس y بحيث $\deg y = |V| - 1$ عندما $|V| \ge 2$. وعليه يمكن الاستفادة من هذه الملاحظة البسيطة في الحكم على بعض المتتاليات بأنها غير رسمية.

مثال (١,٣)

(أ) أثبت أن $s = (6, 6, 5, 4, 3, 3, 1)$ متتالية غير رسمية.

(ب) أثبت أن $s = (4, 4, 3, 2, 2, 1)$ متتالية رسمية وجد تجسيداً لها.

الحل

نطبق مبرهنة (١,٩) ونستخدم الرمز s'_i للدلالة على المتتالية الناتجة من المتتالية s_{i-1} ، كما نستخدم الرمز s_i للدلالة على المتتالية غير المتزايدة الناتجة من إعادة ترتيب حدود s'_i كلما لزم ذلك.

(أ)

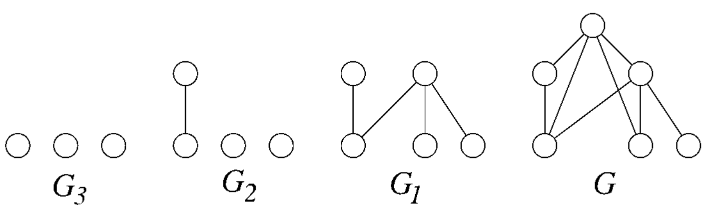
$$s=(6,6,5,4,3,3,1)$$
$$s'_1=(5,4,3,2,2,0)=s_1$$
$$s'_2=(3,2,1,1,-1)=s_2$$

إذن s_2 غير رسمية ؛ وعليه s غير رسمية.

(ب)

$$s=(4,4,3,2,2,1)$$
$$s'_1=(3,2,1,1,1)=s_1$$
$$s'_2=(1,0,0,1)$$
$$s_2=(1,1,0,0)$$
$$s'_3=(0,0,0)=s_3$$

ولما كانت s_3 متتالية رسمية فإن s رسمية أيضاً. ونحصل على تجسيد G لِـ s بعد إيجاد تجسيدات G_3,G_2,G_1 لِـ s_3,s_2,s_1 على الترتيب، كما هو موضح في شكل(١,١٦).



شكل(١,١٦).

وتجدر الإشارة إلى أنه كان بالإمكان التوقف عند s_2 لو لاحظنا أن s_2 متتالية رسمية، كما أن التجسيد G غير وحيد. ومن ناحية ثانية، فإن القارئ يستطيع بسهولة التحقق من أن كلاً من $2P_3$ و $P_2 \cup P_4$ تجسيد للمتتالية $(2,2,1,1,1,1)$، وأنه يمكن إنشاء $P_2 \cup P_4$ باستخدام الخوارزمية السابقة ولكنه لا يمكن إنشاء $2P_3$ بواسطة تلك الخوارزمية.

تعيّن المبرهنة التالية المجموعات الرسمية التي عناصرها أعداد موجبة، كما تعطينا طريقة لإيجاد تجسيدات لتلك المجموعات. وعليه فإن مسألة تحديد المجموعات الرسمية تعتبر محلولة لأن درجة كل رأس منعزل تساوي صفراً.

مبرهنة (١٫١٠)

لكل مجموعة من الأعداد الصحيحة الموجبة $D = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ بحيث $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ و $n \geq 1$، فإنه يوجد تجسيد G لِـ D بحيث $|V(G)| = a_n + 1$.

البرهان

نستخدم الاستقراء الرياضي على n. إذا كانت $n = 1$ فإن الرسم التام K_{a_1+1} يحقق المطلوب، وإذا كانت $n = 2$ فإن الرسم $G = K_{a_1} + \bar{K}_{a_2 - a_1 + 1}$ يحقق المطلوب.

الآن، نفرض أن $m \geq 2$ وأنه لكل مجموعة من الأعداد الصحيحة الموجبة $\{b_1, b_2, \cdots, b_i\}$ بحيث $b_1 < b_2 < \cdots < b_i$ و $1 \leq i \leq m$ يوجد تجسيد عدد رؤوسه يساوي $b_i + 1$. لتكن $D = \{a_1, a_2, \cdots, a_{m+1}\}$ مجموعة من الأعداد الصحيحة الموجبة بحيث $a_1 < a_2 < \cdots < a_{m+1}$. نلاحظ أن مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $\{a_2 - a_1, a_3 - a_1, \cdots, a_m - a_1\}$ تحقق $a_2 - a_1 < a_3 - a_1 < \cdots < a_m - a_1$، وبالاستناد

إلى فرضية الاستقراء نجد أنه يوجد لهذه المجموعة تجسيد H بحيث $|V(H)| = a_m - a_1 + 1$. الآن، إن الرسم $G = K_{a_1} + \left(H \cup \bar{K}_{a_{m+1}-a_m}\right)$ تجسيد لـِ D وهذا ينهي البرهان.

تمارين

١- كم عدد أضلاع رسم مجموع درجات رؤوسه 48 ؟

٢- كم عدد أضلاع رسم منتظم من النوع 2 عدد رؤوسه 14 ؟

٣- رسم عدد أضلاعه ٦٠ ، ما أقل عدد ممكن لرؤوسه؟

٤- هل يوجد رسم درجات رؤوسه 3,2,2,2,2 ؟

٥- هل علاقة التجاور بين الرؤوس في الرسوم متعدية؟

٦- أعط مثالاً لرسم مترابط لا يحتوي على دورات وعدد رؤوسه أربعة.

٧- لتكن $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$.

(أ) جد عدد الرسوم المختلفة التي مجموعة رؤوس كل منها هي V وعدد أضلاعها m حيث $0 \le m \le \binom{n}{2}$.

(ب) جد عدد الرسوم المختلفة التي مجموعة رؤوس كل منها هي V.

(ج) كم عدد الرسوم الجزئية للرسم $K_{m,n}$ عندما يعلم؟

٨- إذا $\delta(G) \ge 2$ فأثبت أن G يحتوي على دورة.

٩- إذا $\delta(G) \ge k$ فأثبت أن G يحتوي على ممر طوله على الأقل k.

١٠- إذا $\delta(G) \ge k \ge 2$ فأثبت أن G يحتوي على دورة طولها على الأقل $k+1$.

١١- أعط مثالاً لرسم له خمسة رؤوس ومركبتان.

١٢- أعط مثالاً لرسم بخمسة رؤوس درجة كل منها اثنان.

١٣- أثبت أن عدد أضلاع الرسم المنتظم من النوع r الذي عدد رؤوسه n يساوي $\frac{nr}{2}$.

١٤- كم عدد أضلاع $\bar{K}_{m,n}$ ؟

١٥- ليكن $G=(V,E)$ رسماً بحيث $|V|=n$ و $|E|>\frac{n^2}{4}$. أثبت أن G لا يمكن أن يكون ثنائي التجزئة.

١٦- إذا كان G رسماً لا يحتوي على دورات طولها فردي فاستخدم الاستقراء الرياضي على عدد الأضلاع لإثبات أن G رسم ثنائي التجزئة.

١٧- ما هو أقل عدد من الأضلاع التي يجب حذفها من K_n ليصبح غير مترابط؟

١٨- أثبت أنه إذا وجد مسار بين رأسين في رسم فإنه يوجد بينهما ممر.

١٩- أثبت أن علاقة تماثل الرسوم هي علاقة تكافؤ على المجموعة المكونة من جميع الرسوم.

٢٠- يسمى الرسم G رسماً **متمماً لنفسه** self-complement إذا كان $G\cong\bar{G}$ ، أعط مثالاً لرسم متمم لنفسه عدد رؤوسه أربعة وآخر عدد رؤوسه خمسة.

٢١- إذا كان G رسماً متمماً لنفسه عدد رؤوسه n ، فأثبت أنه إما $n\equiv 0 \bmod 4$ وإما $n\equiv 1 \bmod 4$.

٢٢- ليكن G رسماً عدد رؤوسه ستة. أثبت أنه إما G وإما $\bar{G}$ يحوي مثلثاً. [إرشاد: اختر رأساً $v \in V(G)$ ثم أثبت أنه إما في G وإما في $\bar{G}$، v يجاور على الأقل ثلاثة رؤوس.]

٢٣- أعط مثالاً يوضح أن النتيجة في تمرين ٢٢ ليست صحيحة عندما يكون عدد الرؤوس خمسة.

٢٤- أثبت أنه إذا وجد في رسم رأسان فقط درجة كل منهما عدد فردي فإنهما ينتميان إلى المركبة نفسها.

٢٥- أثبت أن $\left|V\left(Q_k\right)\right| = 2^k$.

٢٦- أثبت أن Q_k رسم منتظم من النوع k.

٢٧- أثبت أن $\left|E\left(Q_k\right)\right| = k\,2^{k-1}$.

٢٨- أثبت أن Q_k رسم ثنائي التجزئة.

٢٩- أثبت أن $Q_k \cong Q_{k-1} \times K_2$ لكل $k \geq 2$.

٣٠- أثبت أن $C\left(K_n\right) = V\left(K_n\right)$.

٣١- ما هو أقل عدد من الأضلاع التي يجب حذفها من K_5 لنحصل على رسم ثنائي التجزئة؟

٣٢- لتكن $X = \{1,2,\ldots,k\}$. نعرف الرسم T_k بأنه رسم رؤوسه $P(X)$ (مجموعة المجموعات الجزئية من X). لأي مجموعتين $A,B \in P(X)$ يكون AB ضلعاً في T_k إذا وفقط إذا كان $A \subset B$ و $|B| = |A| + 1$. أثبت أن $T_k \cong Q_k$.

٣٣- (أ) جد مصفوفة التجاور للرسم F_1 المعطى في شكل(١،١٤).

(ب) جد عدد المسارات التي طولها 4 من الرأس a إلى الرأس b في الرسم F_1 المعطى في شكل(١,١٤).

٣٤- ارسم الرسم الذي مصفوفة التجاور له هي :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

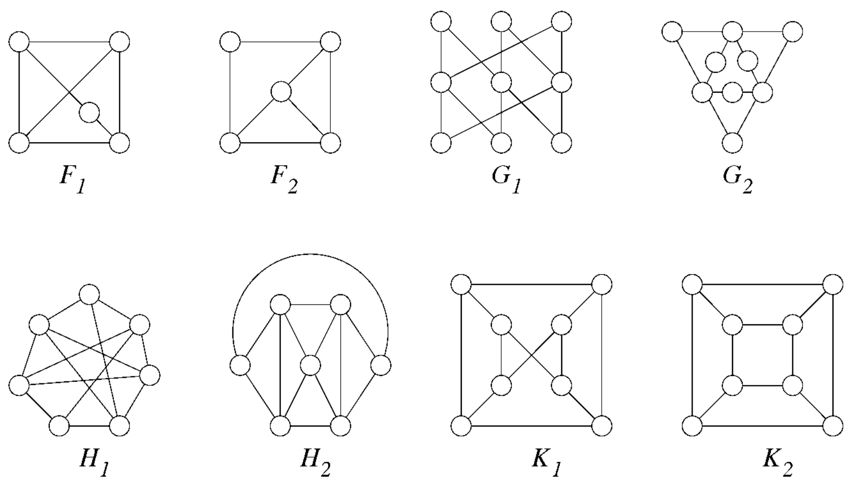
٣٥- في أي رسم عدد رؤوسه على الأقل 2 ، أثبت أنه يوجد على الأقل رأسان درجتاهما متساويتان؟

٣٦- في شكل(١,١٤) هل $F_1 \cong F_2$ ؟ علل إجابتك.

٣٧- في شكل(١,١٤) هل $G_1 \cong G_2$ ؟ علل إجابتك.

٣٨- في شكل(١,١٤) هل $H_1 \cong H_2$ ؟ علل إجابتك.

٣٩- في شكل(١,١٤) هل $K_1 \cong K_2$ ؟ علل إجابتك.



شكل(١,١٤).

٤٠- كل تماثل من الرسم G إلى نفسه يسمى **تماثلاً ذاتياً** automorphism للرسم G. لتكن $Aut(G)$ **مجموعة التماثلات الذاتية** للرسم G.

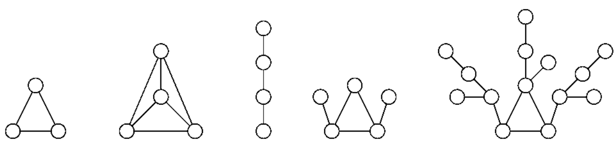
(أ) أثبت أن $(Aut(G),\circ)$ زمرة، حيث $\circ$ هي عملية تحصيل الدوال. تسمى هذه الزمرة **زمرة التماثلات الذاتية** the automorphism group للرسم G.

(ب) إذا كان $G=(V,E)$، $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ فأثبت أن $Aut(G)$ زمرة جزئية من زمرة التاظر S_V.

(ج) أثبت أن $Aut(G)=Aut(\bar{G})$.

(د) جد زمرة التماثلات الذاتية للرسم $K_{2,2}$ وللرسم $K_{2,3}$ ولكل رسم من الرسوم الموضحة في شكل(١,١٥).

(هـ) جد $Aut(K_n)$، $Aut(P_n)$، $Aut(C_n)$، $Aut(K_{r,r})$، $Aut(K_{r,s})$ حيث $r\neq s$.



شكل(١,١٥).

٤١- فيما يلي، عيّن المتتاليات الرسمية وجد تجسيداً لكل منها.

(أ) $(5,5,3,2,2,2)$

(ب) $(7,6,6,5,4,3,2,1)$

(ج) $(7,7,6,5,4,4,3,2)$

(د) $(7,6,5,5,4,3,2,2,2)$

(هـ) $(5,4,4,3,2,1,1)$

٤٢- فيما يلي ، أثبت بطريقتين أن المتتالية غير رسمية.

(أ) $(7,6,5,4,3,3,2)$

(ب) $(6,6,5,4,3,3,1)$

(ج) $(5,2,2,2,1,0)$

٤٣- استخدم الاستقراء الرياضي على n لإثبات مبرهنة (١,٨).

٤٤- لتكن $s=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ متتالية من الأعداد الصحيحة بحيث $d_1 \ge d_2 \ge \cdots \ge d_n \ge 0$. أثبت أنه يوجد رسم بلا عرى (قد يحتوي على أضلاع مكررة) متتالية درجاته s إذا وفقط إذا كان $\sum_{i=1}^{n} d_i$ عدداً زوجياً و $d_1 \le d_2 + d_3 + \cdots + d_n$.

٤٥- إذا كانت $s=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ متتالية من الأعداد الصحيحة الموجبة بحيث $d_i \ne d_j$ لكل $i \ne j$، فأثبت أن s متتالية غير رسمية.

٤٦- فيما يلي ، أثبت أن المتتالية رسمية وجد جميع التجسيدات غير المتماثلة لكل منها.

(أ) $(3,3,2,2,2)$

(ب) $(7,6,5,5,4,3,2,2,2)$

(ج) $(7,6,5,4,4,3,2,1)$

(د) $(2,2,1,1,1,1)$

(هـ) $(2,2,2,2,2,2)$

٤٧- أثبت أن المتتالية $s=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ تكون متتالية رسمية إذا وفقط إذا كانت "المتتالية المتممة" لها $s^c=\bar{s}=(n-d_1-1,n-d_2-1,\cdots,n-d_n-1)$ متتالية رسمية.

٤٨- هل يوجد رسم ثنائي التجزئة بحيث تكون المتتالية $(9,8,6,5,3,3,3,3,1,1)$ متتالية درجات له؟

٤٩- هل يوجد رسم ثنائي التجزئة بحيث تكون المتتالية $(6,6,6,6,6,6,5,3,3,3,3,3)$ متتالية درجات له؟

٥٠- فيما يلي ، جد تجسيداً لمجموعة الدرجات المعطاة.

(أ) $D=\{4,3,2,1\}$

(ب) $D=\{3,4,5,7\}$