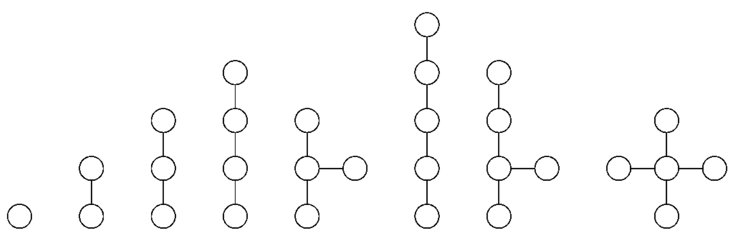
الفصل الثاني

الأشجار
TREES

(٢,١) تعاريف ونتائج أساسية

تعتبر الأشجار أحد أصناف الرسومات التي تستخدم في التطبيقات على نطاق واسع، وعلى وجه الخصوص في التطبيقات المرتبطة بالحاسب الآلي كترتيب وتصنيف القوائم. كما تظهر في بعض مسائل الأمثلية optimization كالفرز sorting. يسمى الرسم $T=(V,E)$ **شجرة** tree إذا كان مترابطاً ولا يحتوي على دورات. كما يسمى الرسم $F=(V,E)$ **غابة** forest إذا كان لا يحتوي على دورات. أي أن الغابة رسم مركباته أشجار. شكل(٢,١) يحتوي على كل الأشجار غير المتماثلة التي عدد رؤوسها أقل من أو يساوي 5 .



شكل(٢,١).

توضح مبرهنة (٢,٢) التي تعتبر من أهم مبرهنات الأشجار، أن عدد أضلاع الشجرة = عدد رؤوسها -1. لإثباتها سنحتاج إلى المبرهنة التالية.

مبرهنة (٢,١)

الشجرة التي عدد رؤوسها $n \geq 2$ يوجد فيها على الأقل رأسان درجة كل منهما تساوي 1.

البرهان

افرض أن T شجرة وأن $P = v_1, v_2, \ldots, v_m$ ممر ذو طول أعظم في T. بما أن $n \geq 2$ ، فإن $m \geq 2$ لأن T تحتوي على ضلع. إذا كان $v_1 v_k$ ضلعاً في T لأي $3 \leq k \leq m$ فإن T تحتوي على الدورة $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1$ وهذا يناقض كون T شجرة. عليه $v_1 v_k$ ليس ضلعاً في T. كذلك $x v_1$ ليس ضلعاً في T لأي $x \notin V(P)$ لأن P ممر ذو طول أعظم في T. عليه $\deg(v_1) = 1$. وبالمثل $\deg(v_m) = 1$.

مبرهنة (٢,٢)

الشجرة التي عدد رؤوسها n عدد أضلاعها $n-1$.

البرهان

نستخدم الاستقراء على عدد الرؤوس. إذا كان $n = 1$ ، فإن الشجرة هي الرسم التام K_1 والمبرهنة صحيحة في هذه الحالة. افرض أن المبرهنة صحيحة لأي شجرة عدد رؤوسها $k \geq 2$. لتكن T شجرة عدد رؤوسها $k+1$. من مبرهنة (٢,١)، تحتوي T على رأس v بحيث $\deg(v) = 1$. ليكن e هو الضلع الذي أحد طرفيه v. لاحظ أن الرسم $T - v$ مترابط لأن T رسم مترابط و $\deg(v) = 1$.

ولا يحتوي $T-v$ على دورات لأن T لا يحتوي على دورات ؛ عليه $T-v$ شجرة عدد رؤسها k. من فرضية الاستقراء، عدد أضلاع $T-v$ يساوي $k-1$. عليه عدد أضلاع T يساوي k.

نتيجة (٢,١)

إذا كانت $F=(V,E)$ غابة عدد رؤوسها n ، فإن عدد أضلاعها $n-k$ حيث k عدد مركباتها.

البرهان

لتكن $T_i=(V_i,E_i), 1\le i\le k$ هي مركبات F. لكل $1\le i\le k$ ، T_i شجرة لأن T_i رسم مترابط ولا يحتوي على دورات. من مبرهنة (٢,٢)، $|E_i|=|V_i|-1$ لكل $1\le i\le k$. عليه

$$|E|=|E_1|+|E_2|+\cdots+|E_k|=(|V_1|-1)+(|V_2|-1)+\cdots+(|V_k|-1)$$
$$=|V|-k=n-k.$$

(٢,٢) تمييزات الأشجار

تقدم المبرهنات التالية عبارات مكافئة لتعريف الشجرة. كما تهدف إلى فهم أعمق لتركيب وخواص الأشجار.

مبرهنة (٢,٣)

الرسم $G=(V,E)$ شجرة إذا وفقط إذا كان يوجد بين كل رأسين في G ممر وحيد.

البرهان

افرض أن $G=(V,E)$ شجرة. عليه يوجد بين أي رأسين ممر لأن G رسم مترابط. إذا وجد بين رأسين x_1 و x_m ممران مختلفان $P=x_1,x_2,\ldots x_{m-1},x_m$

و $Q = y_1, y_2, \dots, y_r$ حيث $y_1 = x_1$ و $y_r = x_m$ ، فليكن $i+1$ أصغر دليل بحيث $x_{i+1} \neq y_{i+1}$ ، وليكن j أصغر دليل بحيث $j > i$ و $y_{j+1} \in P$. ليكن $y_{j+1} = x_t$. عليه $x_i, x_{i+1}, \dots x_t, y_j, y_{j-1}, \dots, y_{i+1}, x_i$ دورة وهذا يناقض الفرض أن G شجرة. لإثبات الاتجاه الآخر افرض أنه بين أي رأسين في الرسم $G = (V, E)$ يوجد ممر وحيد. عليه G مترابط. إذا كان G يحتوي على دورة $x_1, x_2, \dots, x_m, x_1$ ، فإنه يوجد ممران من x_1 إلى x_m هما $x_1, x_2, \dots, x_m$ والممر x_1, x_m وهذا يناقض فرضنا أنه يوجد ممر وحيد بين أي رأسين. عليه G لا يحتوي على دورات. ومنه G شجرة. □

في الحقيقة، الشجرة هي أصغر رسم مترابط من حيث عدد الأضلاع، بمعنى أن حذف أي ضلع منها يعطي رسماً غير مترابط، وهذا ما توضحه مبرهنة (٢,٥).
يسمى الضلع e جسراً bridge في الرسم $G = (V, E)$ ، إذا كان عدد مركبات $G - e$ أكبر من عدد مركبات G.

مبرهنة (٢,٤)

الضلع uv جسر في الرسم $G = (V, E)$ إذا وفقط إذا كان uv ليس محتوى في دورة.

البرهان

نستخدم طريقة البرهان بالمكافئ العكسي.

افرض أن الضلع uv محتوى في دورة $u, x_1, x_2, \dots, x_m, v, u$. عليه، أي رأسين مرتبطين بممر P يحتوي على الضلع uv في الرسم G هما مرتبطان بممر ينتج من P بعد تبديل الممر uv بالممر $u, x_1, x_2, \dots, x_m, v$. ومنه عدد مركبات G يساوي عدد مركبات $G - uv$. أي أن الضلع uv ليس جسراً.

افرض أن الضلع uv ليس جسراً. عليه، الرأسان u,v موجودان في المركبة نفسها في الرسم $G-uv$. ومنه يوجد ممر P في الرسم $G-uv$ من الرأس u إلى الرأس v. عليه، P ممر في الرسم G من الرأس u إلى الرأس v. أي أن $P+uv$ دورة في الرسم G تحتوي على الضلع uv.

مبرهنة (٢,٥)

إذا كان G رسماً مترابطاً، فإن G شجرة إذا وفقط إذا كان كل ضلع في G جسراً.

البرهان

بما أن G مترابط، فيكفي لإثبات المطلوب إثبات أن G لا يحتوي على دورات إذا وفقط إذا كان كل ضلع في G جسراً. من الواضح أن الرسم G لا يحتوي على دورات إذا وفقط إذا كان كل ضلع e في G ليس محتوى في دورة. من مبرهنة (٢,٤) ينتج أن الرسم G لا يحتوي على دورات إذا وفقط إذا كان كل ضلع في G جسراً.

مبرهنة (٢,٦)

إذا كان $G=(V,E)$ رسماً عدد رؤوسه n فإن G شجرة إذا وفقط إذا كان G رسماً لا يحتوي على دورات وعدد أضلاعه $n-1$.

البرهان

إذا كان G شجرة عدد رؤوسها n. فمن تعريف الشجرة G رسم لا يحتوي على دورات ومن مبرهنة (٢,٢) عدد أضلاع G يساوي $n-1$.

لإثبات الاتجاه الآخر، افرض أن G رسم لا يحتوي على دورات عدد رؤوسه n وعدد أضلاعه $n-1$. عليه G غابة. يكفي لإثبات أن G شجرة إثبات أن G رسم مترابط. من نتيجة (٢,١)، G له مركبة واحدة، أي أنه مترابط. □

تسمى الشجرة $T=\left(V,E'\right)$ **شجرة مولّدة** spanning tree للرسم $G=\left(V,E\right)$ إذا كان $E'\subseteq E$، أي أن أي شجرة رؤوسها V هي شجرة مولدة للرسم G إذا كانت رسماً جزئياً من G.

مبرهنة (٢,٧)

الرسم $G=\left(V,E\right)$ مترابط إذا وفقط إذا كان يوجد له شجرة مولدة.

البرهان

لنفرض أنه توجد شجرة مولدة T للرسم G. بما أن T رسم مترابط فإن G رسم مترابط.

الآن نفرض أن G رسم مترابط. نستخدم الاستقراء الرياضي على عدد الأضلاع n لإثبات ما يلي: لكل عدد صحيح $n\geq 0$ فإن كل رسم مترابط عدد أضلاعه n يوجد له شجرة مولدة. إذا كان $n=0$ فإن عدد الأضلاع صفر وعليه، فإن المطلوب صحيح. الآن نفرض أن كل رسم مترابط عدد أضلاعه k يوجد له شجرة مولدة حيث $k\geq 0$ عدد صحيح. ليكن $H=\left(V\left(H\right),E\left(H\right)\right)$ رسماً مترابطاً بحيث $E\left(H\right)=k+1$. إذا كان H لا يحتوي على دورات فإن H شجرة مولدة للرسم H. إذن، لنفرض أن H يحتوي على دورات. ليكن e ضلعاً محتوى في إحدى هذه الدورات. إذن e ليس جسراً في H وعليه فإن $H-e$ رسم مترابط عدد أضلاعه k. بالاستناد إلى فرض الاستقراء نجد أنه

توجد شجرة T مولدة للرسم $H-e$. واضح أن أي شجرة مولدة للرسم $H-e$ هي شجرة مولدة للرسم H. إذن T شجرة مولدة للرسم H. □

لاحظ أن البرهان السابق يعطينا طريقة لإنشاء الشجرة المولدة. ببساطة نقوم بالتخلص من الدورات بالحذف المتتابع لبعض الأضلاع.

نتيجة (٢,٢)

إذا كان $G=(V,E)$ رسماً مترابطاً عدد رؤوسه n، فإن $|E|\geq n-1$.

البرهان

افرض أن $G=(V,E)$ رسم مترابط عدد رؤوسه n. من مبرهنة (٢,٧) توجد شجرة مولدة $T=(V,E')$ للرسم G. بما أن $E'\subseteq E$، فإن $|E|\geq|E'|$. من مبرهنة(٢,٢)، $|E'|=n-1$ ومنه $|E|\geq n-1$.

مبرهنة (٢,٨)

إذا كان $G=(V,E)$ رسماً عدد رؤوسه n فإن G شجرة إذا وفقط إذا كان G رسماً مترابطاً وعدد أضلاعه $n-1$.

البرهان

إذا كان G شجرة عدد رؤوسها n, فمن تعريف الشجرة G رسم مترابط ومن مبرهنة (٢,٢) عدد أضلاع G يساوي $n-1$. لإثبات الاتجاه الآخر، افرض أن G رسم مترابط عدد رؤوسه n وعدد أضلاعه $n-1$. يكفي لإثبات أن G شجرة إثبات أن G لا يحتوي على دورات. افرض أن G يحتوي على دورة وأن e ضلع فيها. عليه e ليس جسراً ومنه $G-e$ رسم مترابط عدد أضلاعه $n-2$، وهذا يناقض نتيجة (٢,٢).

مبرهنة (٢,٩)

إذا كان G رسماً لا يحتوي على دورات فإن G شجرة إذا وفقط إذا كان $G+e$ يحتوي على دورة وحيدة لكل ضلع $e \notin E(G)$.

البرهان

ليكن G شجرة وليكن $xy = e \notin E(G)$. بما أن G شجرة فإنها رسم لا يحتوي على دورات. من مبرهنة(٢,٣)، يوجد ممر وحيد $x, t_1, t_2, \ldots, t_m, y$ من x إلى y في G. إذن $x, t_1, t_2, \ldots, t_m, y, x$ دورة في $G+e$. واضح أن هذه الدورة وحيدة لأنه إذا كان يوجد دورتان مختلفتان فإن كلاً منهما تحتوي على e وعليه يوجد ممران مختلفان من x إلى y في G.

ليكن G رسماً لا يحتوي على دورات بحيث $G+e$ يحتوي على دورة وحيدة لكل ضلع $e \notin E(G)$. افرض أن u, v رأسان لا يوجد بينهما ممر في G. إذن $G+e$، حيث $e = uv$، لا يحتوي على دورات و $e \notin E(G)$. إن هذا يناقض الفرض. □

المبرهنة التالية والتي تنسب إلى كيلي Cayley تعطي عدد الأشجار المعلمة المولدة للرسم K_n.

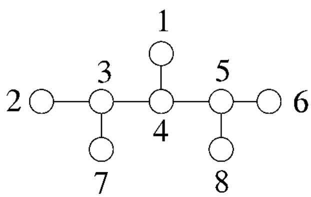
مبرهنة (٢,١٠)

عدد الأشجار المعلمة المولدة للرسم K_n يساوي n^{n-2}.

البرهان

لتكن $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ هي رؤوس الرسم K_n. نعرف أن عدد المتتاليات من الطول $n-2$ المأخوذة من V يساوي n^{n-2}. عليه يكفي للبرهان إيجاد تقابل بين

الأشجار المعلمة المولدة للرسم K_n والمتتاليات من هذا النوع. لكل شجرة معلمة مولدة T للرسم K_n نعرف المتتالية $(t_1,t_2,\ldots,t_{n-2})$ كما يلي. ليكن s_1 أقل عدد في V درجته 1 ، اختر t_1 الرأس المجاور لـِ s_1. احذف s_1 من T. اعتبر s_2 أقل عدد في $V-\{s_1\}$ درجته 1 في $T-s_1$ ، اختر t_2 الرأس المجاور لـِ s_2. كرر هذه العملية حتى تحصل على t_{n-2} وسيكون ما تبقى من الشجرة رأسان فقط .على سبيل المثال الشجرة المعلمة في شكل(٢,٢) تعطي المتتالية $(4,3,5,3,4,5)$.



شكل(٢,٢).

لعكس الإجراء لاحظ أولاً أن أي رأس v من الشجرة T يظهر $d_T(v)-1$ مرة في المتتالية $(t_1,t_2,\ldots,t_{n-2})$. ومنه الرؤوس التي درجتها 1 هي التي لا تظهر في المتتالية. لإيجاد T من $(t_1,t_2,\ldots,t_{n-2})$ نتبع الآتي. ليكن s_1 أصغر عنصر في V درجته ليست في $(t_1,t_2,\ldots,t_{n-2})$ ، ارسم الضلع t_1s_1. اختر s_2 أصغر عنصر في $V-\{s_1\}$ درجته ليست في $(t_2,\ldots,t_{n-2})$ ، ارسم الضلع t_2s_2. استمر بنفس الطريقة حتى تحصل على $n-2$ ضلعاً $s_1t_1,s_2t_2,\ldots,s_{n-2}t_{n-2}$. الآن نحصل على T بإضافة ضلع بين الرأسين المتبقيين في المجموعة $V-\{s_1,s_2,\cdots,s_{n-2}\}$. من السهل ملاحظة أن متتاليتين مختلفتين تقابلان شجرتين مختلفتين. عليه أوجدنا التقابل المطلوب.

(٢,٣) تطبيقات على الأشجار

يعطي برهان مبرهنة (٢,٧) طريقة لإنشاء الشجرة المولدة. ببساطة نقوم بالتخلص من الدورات بالحذف المتتابع لبعض الأضلاع. لكن هذه الطريقة ليست مناسبة للاستخدام في الحاسب الآلي. فيما يلي سنعطي بعض الخوارزميات التي يمكن من خلالها الحصول على شجرة مولدة باستخدام الحاسب الآلي.

خوارزمية (٢,١)

المدخل: رسم مترابط G.

المخرج: شجرة مولدة للرسم G.

الخوارزمية

١- اختر أي رأس $v_1 \in V$ وضع $V_1 = \{v_1\}$ و $E_1 = \phi$ و $T_1 = (V_1, E_1)$.

٢- افرض أن $T_k = (V_k, E_k)$ قد أُنشِئت لعدد صحيح $k \geq 1$. اختر ضلعاً $uv_{k+1} = e_k \in E$ حيث $u \in V_k$ و $v_{k+1} \notin V_k$. ضع $T_{k+1} = (V_{k+1}, E_{k+1})$ حيث $V_{k+1} = V_k \cup \{v_{k+1}\}$ و $E_{k+1} = E_k \cup \{e_k\}$.

٣- كرر الخطوة (٢) كلما أمكن ذلك.

مبرهنة (٢,١١)

إذا كان $G = (V, E)$ رسماً مترابطاً فإن خوارزمية (٢,١) تعطي شجرة مولدة للرسم G.

البرهان

نفرض أن الخوارزمية تتوقف بعد m خطوة. إذن نحصل على $T_m = (V_m, E_m)$. نريد إثبات أن T_m شجرة مولدة للرسم G. سنثبت أولاً أن T_m شجرة وذلك باستخدام الاستقراء الرياضي على n لإثبات ما يلي: لكل عدد صحيح

$1 \le n \le m$ فإن T_n شجرة. إذا كان $n=1$ فإن $E_1 = \phi$ وعليه $T_1 = (V_1, E_1)$ شجرة. الآن نفرض أن $T_k = (V_k, E_k)$ شجرة حيث $1 \le k < m$ عدد صحيح. من الخطوة (٢) في خوارزمية (٢,١) واضح أننا حصلنا على T_{k+1} من T_k بإضافة رأس $v_{k+1} \notin V_k$ وبإضافة ضلع $e_k \in E$ يربط رأساً $u \in V_k$ برأس $v_{k+1} \notin V_k$. بما أن T_k لا تحتوي على دورات فإن T_{k+1} لا تحتوي على دورات لأن الضلع المضاف الجديد e_k لا يربط رأسين من V_k. واضح أن الرأس v_{k+1} مجاور للرأس u و بما أن T_k رسم مترابط فإن v_{k+1} مرتبط بجميع الرؤوس المنتمية إلى V_k. إذن T_{k+1} رسم مترابط ، وعليه فإن T_{k+1} شجرة. إذن T_m شجرة.

الآن سنثبت أن T_m شجرة مولدة للرسم G. من أجل ذلك يكفي أن نثبت أن $m = |V|$. واضح أن $m \le |V|$. إذا كان $m < |V|$ فإنه يوجد رأس $x \in V$ حيث $x \notin V_m$. ليكن $y \in V_m$. بما أن G رسم مترابط فإنه يوجد ممر $y = y_1, y_2, \ldots, y_r = x$ من y إلى x. ليكن $1 \le j < r$ هو أكبر عدد صحيح بحيث $y_j \in V_m$. إذن، $y_{j+1} \notin V_m$ و $y_j y_{j+1} = e_j \in E$ ولكن هذا يناقض الخطوة (٣) في خوارزمية (٢,١) وعليه فإن $|V| = m$.

(٢,٣)(أ) أشجار التقصي العرضي وأشجار التقصي العمقي

فيما يلي نقدم حالتين خاصتين من خوارزمية (٢,١).

خوارزمية (٢,٢)

المدخل: رسم مترابط $G = (V, E)$ ورأس معين $v \in V$.

المخرج: شجرة مولدة للرسم G تسمى **شجرة تقصٍ عرضي** breadth first search tree جذرها v.

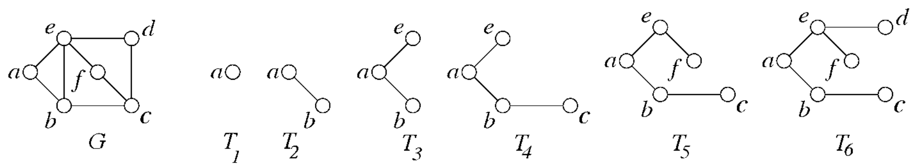
الخوارزمية

١- ضع $v_1 = v$ و $V_1 = \{v_1\}$ و $E_1 = \phi$ و $T_1 = (V_1, E_1)$.

٢- افرض أن $T_k = (V_k, E_k)$ قد أُنشِئت لعدد صحيح $k \geq 1$. ليكن r هو أصغر عدد بين الأعداد $1, 2, \ldots, k$ بحيث يوجد ضلع $v_r v_{k+1} = e_k \in E$ حيث $v_r \in V_k$ و $v_{k+1} \notin V_k$. ضع $T_{k+1} = (V_{k+1}, E_{k+1})$ حيث $V_{k+1} = V_k \cup \{v_{k+1}\}$ و $E_{k+1} = E_k \cup \{e_k\}$.

٣- كرر الخطوة (٢) كلما أمكن ذلك.

يوضح شكل(٢,٣) خطوات خوارزمية (٢,٢) للحصول على شجرة تقصٍ عرضي جذرها a للرسم G.



شكل(٢,٣).

خوارزمية (٢,٣)

المدخل : رسم مترابط $G = (V, E)$ ورأس معين $v \in V$.

المخرج : شجرة مولدة للرسم G تسمى **شجرة تقصٍ عمقي** depth first search tree جذرها v.

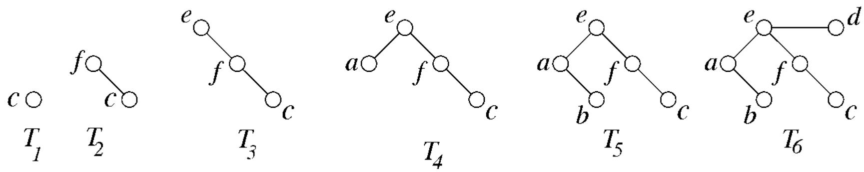
الخوارزمية

١- ضع $v_1 = v$ و $V_1 = \{v_1\}$ و $E_1 = \phi$ و $T_1 = (V_1, E_1)$.

٢- افرض أن $T_k=(V_k,E_k)$ قد أُنشِئت لعدد صحيح $k\geq 1$. ليكن r هو أكبر عدد بين الأعداد $1,2,\ldots,k$ بحيث يوجد ضلع $v_rv_{k+1}=e_k\in E$ حيث $v_r\in V_k$ و $v_{k+1}\notin V_k$. ضع $T_{k+1}=(V_{k+1},E_{k+1})$ حيث $V_{k+1}=V_k\cup\{v_{k+1}\}$ و $E_{k+1}=E_k\cup\{e_k\}$.

٣- كرر الخطوة (٢) كلما أمكن ذلك.

يوضح شكل(٢,٤) خطوات خوارزمية (٢,٣) للحصول على شجرة تقصٍ عمقي جذرها c للرسم G المعطى في شكل(٢,٣).



شكل(٢,٤).

توجد تطبيقات عديدة لأشجار التقصي. سنقدم أحد تطبيقات أشجار التقصي العمقي في الفصل الثامن، بينما نعطي فيما يلي تطبيقاً لأشجار التقصي العرضي.

مبرهنة (٢,١٢)

إذا كان $G=(V,E)$ رسماً مترابطاً وكانت T شجرة تقصٍ عرضي جذرها x ناتجة من خوارزمية (٢,٢) فإن $d_G(x,v)=d_T(x,v)$ لكل $v\in V$.

لغرض إثبات مبرهنة (٢,١٢) نحتاج إلى تقديم بعض التعريفات والتمهيديات. لتكن $v_1,v_2,\ldots,v_n$ هي رؤوس الرسم المترابط $G=(V,E)$ بعد توقف خوارزمية (٢,٢). نعرف **الدليل العرضي** breadth first index لرأس $v\in V$ بأنه العدد $1\leq i\leq n$ حيث $v=v_i$ ونرمز له بالرمز $BFI(v)$. كما نقول إن الرأس

u **مرجع مباشر** immediate predecessor للرأس v ونكتب $u = p(v)$ إذا كـان $v \in V_i$ و $E_i = E_{i-1} \cup \{uv\}$.

تمهيدية (٢,١)

ليكن $G = (V, E)$ رسماً مترابطاً و $v_1, v_2, \ldots, v_n$ هي رؤوس الرسم G بعد توقف خوارزمية (٢,٢). إذا كان $i < j$ و $v_i v_p$ ضلعاً في G وكان $v_j = p(v_q)$ فإن $p < q$.

البرهان

إذا كان $p > q$ فإنه طبقاً للخطوة (٢) من خوارزمية (٢,٢) يوجد رأس v_r بحيث $r \leq i$ و $v_q v_r$ ضلع في G وهذا يناقض كون $v_j = p(v_q)$. □

وبأخذ $v_i = p(v_p)$ في تمهيدية (٢,١) نحصل على النتيجة التالية.

نتيجة (٢,٣)

ليكن $G = (V, E)$ رسماً مترابطاً وليكن u, v رأسين في G. بعد توقف خوارزمية (٢,٢)، إذا كان $BFI(p(u)) < BFI(p(v))$ فإن $BFI(u) < BFI(v)$.

تمهيدية (٢,٢)

ليكن $G = (V, E)$ رسماً مترابطاً و x رأساً معيناً من رؤوس G. إذا كان u, v رأسين في G بحيث $d_G(x, u) < d_G(x, v)$ فإنه بعد توقف خوارزمية (٢,٢) يكون $BFI(u) < BFI(v)$.

البرهان

سنبرهن بالاستقراء الرياضي على k العبارة التالية: لكل رأس a بحيث $d_G(x, a) = k$ ولكل رأس b بحيث $d_G(x, b) > k$ فإن $BFI(a) < BFI(b)$.

عندما $k=0$ فإن $d_G(x,a)=0$ وهذا يقتضي أن $x_1=x=a$ ومن خوارزمية (٢,٢) $BFI(b)>1$ لكل $b\neq a$. عليه، العبارة صحيحة عندما $k=0$. نفرض صحة العبارة عند $0\leq k$. ليكن u رأساً بحيث $d_G(x,u)=k+1$ وليكن v رأساً بحيث $d_G(x,v)>k+1$. ليكن P أقصر ممر من x إلى u في G و w هو الرأس الذي يجاور u في P. لاحظ أن $d_G(x,w)=k$. بما أن P أقصر ممر من x إلى u فإن $d_G(x,p(u))\geq k$. سنثبت أن $d_G(x,p(u))=k$. إذا كان $p(u)=w$ فإن $d_G(x,p(u))=k$. لنفرض أن $p(u)\neq w$ و $d_G(x,p(u))>k$. بما أن $d_G(x,p(u))>k=d_G(x,w)$ فإنه ينتج من فرض الاستقراء أن $BFI(p(u))>BFI(w)$. وهذا يناقض كون $p(u)$ مرجعاً مباشراً للرأس u طبقاً لخوارزمية (٢,٢). عليه $d_G(x,p(u))=k$. بما أن $d_G(x,v)\geq k+2$ فإن $d_G(x,p(v))\geq k+1$. ومنه $d_G(x,p(u))=k<k+1=d_G(x,p(v))$. ومن فرض الاستقراء نجد أن $BFI(p(u))<BFI(p(v))$. من تمهيدية (٢,١) ينتج أن $BFI(u)<BFI(v)$.

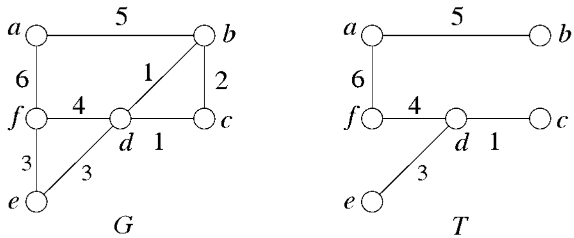
برهان مبرهنة (٢,١٢)

نستخدم الاستقراء الرياضي على $BFI(v)$. إذا كان $BFI(v)=0$ فإن $v=x$ ومنه $d_G(x,x)=d_T(x,v)=0$. لنفرض صحة المبرهنة لكل $0\leq t\leq k$ ولنفرض أن v رأس بحيث $BFI(v)=k+1$. ليكن P أقصر ممر من x إلى v في G و u هو الرأس المجاور للرأس v في الممر P. بما أن P أقصر ممر من x إلى v فإن $d_G(x,u)\leq d_G(x,p(v))$. إذا كان $d_G(x,u)<d_G(x,p(v))$ فينتج من تمهيدية (٢,١) أن $BFI(u)<BFI(p(v))$

وهــــذا ينـــاقض كـــون $p(v)$ مرجعـــاً مباشـــراً للـــرأس v. عليـــه، $d_G(x,u)=d_G(x,p(v))=k$. وبمـــا أن $BFI(p(v))<BFI(v)=k+1$ فينـــتج مـــن فـــرض الاســـتقراء أن $d_G(x,p(v))=d_T(x,p(v))$. ولكـــن $d_G(x,v)=k+1=d_G(x,p(v))+1=d_T(x,p(v))+1=d_T(x,v)$ ومنـه ينتج المطلوب.

(٢,٣)(ب) خوارزميات لإيجاد شجرة مولدة صغرى

يـسمى الرســم $G=(V,E)$ **رسمـاً موزونـاً** weighted graph إذا قُـرِن كـل ضلع e فيه بعـدد حقيقـي غير سالب $w(e)$ يسمى وزن الـضلع e. كما يـسمى مجموع أوزان أضلاع الرسم $\sum_{e\in G} w(e)$ وزن الرسم G ويرمز له بالرمز $w(G)$. إذا كان P ممراً بين رأسين في G فإننا نسمي $\sum_{e\in P} w(e)$ طـول length الممـر P ونـرمز له بالرمز $len(P)$. نرمز **للمسافة** distance **بين الرأسين** u و v في الرسم الموزون $G=(V,E)$ بـالرمز $d_G(u,v)$ (أو بـالرمز $d(u,v)$ في حالـة دراسـة رسـم واحد)، ونعرفها بأنها طول أقصر ممر بين u و v إذا كـان u و v مرتبطين. كما نعـرف $d_G(u,v)=\infty$ إذا كان لا يوجد ممر بين u و v. ونعـرف $d_G(v,v)=0$ لكل رأس v في الرسم G.



شكل(٢,٥).

الشجرة المولدة الصغرى minimum spanning tree لرسم موزون مترابط $G=(V,E)$ هي شجرة مولدة وزنها أصغر ما يمكن **والشجرة المولدة العظمى** maximum spanning tree لرسم موزون مترابط G هي شجرة مولدة وزنها أكبر ما يمكن. على سبيل المثال في شكل(٢,٥) الشجرة T هي شجرة مولدة للرسم G لكنها ليست شجرة مولدة صغرى. في حين أن الشجرة T_6 الموضحة في شكل(٢,٦) هي شجرة مولدة صغرى للرسم نفسه.

خوارزمية (٢,٤) (خوارزمية بريم Prim)

المدخل: رسم موزون مترابط G عدد رؤوسه n.

المخرج: شجرة مولدة صغرى $T_n=(V_n,E_n)$ للرسم G.

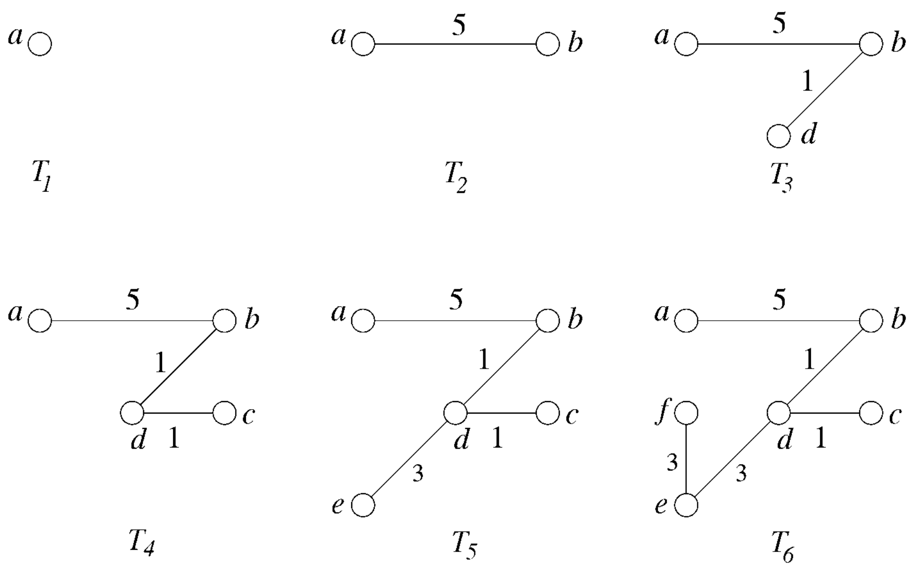
الخوارزمية

١- اختر أي رأس v من رؤوس G ثم ضع $V_1=\{v\}$ و $E_1=\phi$ و $T_1=(V_1,E_1)$.

٢- افرض أن $T_k=(V_k,E_k)$ قد أُنشِئت لعدد صحيح $k\geq 1$. اختر ضلعاً e_k وزنه أقل ما يمكن يربط رأساً في V_k برأس $v_{k+1}\notin V_k$. ضع $T_{k+1}=(V_{k+1},E_{k+1})$ حيث $V_{k+1}=V_k\cup\{v_{k+1}\}$ و $E_{k+1}=E_k\cup\{e_k\}$.

٣- كرر الخطوة (٢) كلما أمكن ذلك.

يوضح شكل(٢,٦) خطوات خوارزمية بريم للحصول على شجرة مولدة صغرى للرسم G المعطى في شكل(٢,٥).



شكل(٢,٦).

مبرهنة (٢,١٣)

إذا كان G رسماً مترابطاً موزوناً، فإن خوارزمية بريم تعطي شجرة مولدة صغرى للرسم G.

البرهان

افرض أن عدد رؤوس الرسم G يساوي n. لكل $k \geq 1$ عدد أضلاع T_k يساوي $k-1$ وعدد رؤوسه k ولا يحتوي على دورات، أي أن T_k شجرة.

سنبرهن الآن أن T_n شجرة مولدة صغرى للرسم G. سنستخدم الاستقراء الرياضي لإثبات ما يلي: لكل عدد صحيح $k \geq 1$، الشجرة T_k محتواة في شجرة مولدة صغرى. إذا كان $k = 1$ فإن $T_1 = K_1$ ومن ثم فهي محتواة في شجرة مولدة صغرى. لنفرض الآن أن الخوارزمية صحيحة عند $k-1$. أي أن T_{k-1} محتواة في

شجرة مولدة صغرى، ولتكن H. الآن عند تنفيذ الخوارزمية نختار ضلعاً $e_k = v_i v_{k+1}$ حيث $v_i \in V_{k-1}$ و $v_{k+1} \notin V_{k-1}$ ثم نضيفه إلى T_{k-1} لنحصل على T_k. إذا كان $e_k \in E(H)$ فإن T_{k-1} محتواة في الشجرة المولدة الصغرى H ونكون قد أنهينا البرهان. أما إذا كان $e_k \notin E(H)$ فإن الرسم $H + e_k$ يحتوي على دورة وحيدة ولتكن C. بما أن C غير محتواة في T_k فإن $E(C) - E(T_k) \neq \phi$. ليكن P الممر من v_i إلى v_k والذي نحصل عليه بعد حذف e_k من C ؛ وليكن e أول ضلع في P ليس ضلعاً في T_k. عندئذ $e = xy$ أحد أضلاع C حيث $x \in V_{k-1}$ و $y \notin V_{k-1}$. عليه $w(e) \geq w(e_k)$. ولذا فإن وزن الشجرة المولدة $H' = (H + e_k) - e$ أصغر من أو يساوي وزن الشجرة المولدة H. إذن H' شجرة مولدة صغرى تحتوي على T_k.

خوارزمية (٢,٥) (خوارزمية كروسكال Kruskal)

المدخل: رسم موزون مترابط G عدد رؤوسه n.

المخرج: شجرة مولدة صغرى للرسم G.

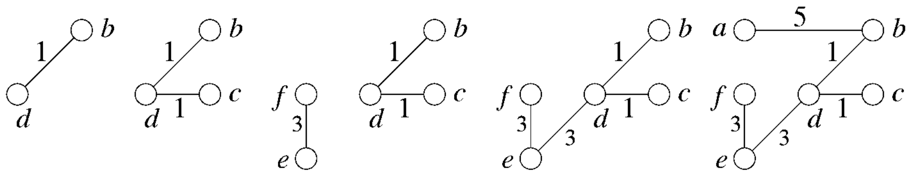
الخوارزمية

١- اختر ضلعاً e_1 وزنه أقل ما يمكن وضع $T_1 = <e_1>$ الرسم الجزئي من G المولد بالضلع e_1.

٢- افرض أن $T_k = <e_1, e_2, \ldots, e_k>$، الرسم الجزئي من G المولد بالأضلاع $e_1, e_2, \ldots, e_k$، قد أُنشِئ لعدد صحيح $k \geq 1$. اختر ضلعاً e_{k+1} في $G_k = G - \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ بحيث وزنه أقل ما يمكن في G_k وبحيث $<e_1, e_2, \ldots, e_{k+1}>$ رسم بلا دورات. ضع $T_{k+1} = <e_1, e_2, \ldots, e_{k+1}>$.

٣- كرر الخطوة(٢) كلما أمكن ذلك.

يوضح شكل(٢,٧) خطوات خوارزمية كروسكال للحصول على شجرة مولدة صغرى للرسم G المعطى في شكل(٢,٥).



T_1 T_2 T_3 T_4 T_5

شكل(٢,٧).

مبرهنة (٢,١٤)

إذا كان G رسماً مترابطاً موزوناً، فإن خوارزمية كروسكال تعطي شجرة مولدة صغرى للرسم G.

البرهان

ليكن $T_m = <e_1,e_2,\ldots,e_m>$ الرسم الجزئي من G المخرج بخوارزمية كروسكال. سنثبت أولاً أن T_m شجرة مولدة للرسم G. بما أن T_m بلا دورات فإنه يكفي إثبات أن كل راسين $u,v \in V(G)$ يرتبطان بممر في T_m. بما أن G مترابط فإنه يوجد ممر $u = x_1,x_2,\ldots,x_{r-1},x_r = v$. نرمز للضلع $x_j x_{j+1}$ بالرمز f_j لكل $1 \le j \le r-1$. ليكن $f_i \notin E(T_m)$. نلاحظ أن $T_m + f_i$ يحتوي على دورة وحيدة C أحد أضلاعها f_i بينما أضلاعها الأخرى أضلاع في T_m. عليه، $P_i = C - f_i$ ممر في T_m من x_i إلى x_{i+1}. وعليه فإنه يمكن الحصول على مسار

في T_m مـن u إلى v بوضـع P_i مكـان f_i كلمـا كـان $f_i \notin E(T_m)$. إذن T_m شجرة مولدة للرسم G و $m = n - 1$.

سنثبت الآن أن $T_{n-1} = \langle e_1, e_2, \ldots, e_{n-1} \rangle$ شجرة مولـدة صـغرى للرسـم G. بما أن G رسم منتهٍ فإن عدد أشجاره المولدة منتهٍ. لتكن T شجرة مولدة صـغرى للرسم G.

مـن الخوارزميـة، واضـح أن $w(e_1) \le w(e_2) \le \cdots \le w(e_{n-1})$. لـيكن k أصـغر دليـل بحيـث $e_k \notin E(T)$. نلاحـظ أن $T + e_k$ يحتـوي علـى دورة وحيـدة C أحـد أضلاعها e_k بينما أضلاعها الأخرى أضلاع في T. بما أن T_{n-1} شجرة فإنها لا تحتوي على C؛ عليه، تحتوي C على ضلع f بحيث $f \in E(T)$ و $f \notin E(T_{n-1})$.

نـدعي أن $w(f) \ge w(e_k)$. لغـرض الحـصول علـى تنـاقض افـرض أن $w(f) < w(e_k)$. بما أن f لم يختر من خلال الخوارزمية فإن $T_{k-1} + f$ يحتـوي على دورة. إذن T تحتوي على دورة وهذا هو التناقض المنشود.

نلاحظ الآن أن $T - f + e_k$ شجرة مولدة صـغرى للرسـم G أحـد أضـلاعها e_k. بتكرار الإجراء السابق نجد أن T_{n-1} شجرة مولدة صغرى للرسم G.

(٢,٣)(ج) خوارزمية إيجاد أقصر ممر في رسم موزون مترابط

خوارزمية (٢,٦) (خوارزمية ديكسترا Dijkstra)

المدخل: رسم موزون مترابط G عدد رؤوسه n ورأس معيَّن $v_1 \in V(G)$.

المخرج: شجرة مولدة $T_n = (V_n, E_n)$ للرسم G بحيث $d_G(v_1, u) = d_T(v_1, u)$ لكل $u \in V(G)$.

فيما يلي نستخدم الرمز $D(u)$ بدلاً من $d(v_1, u)$.

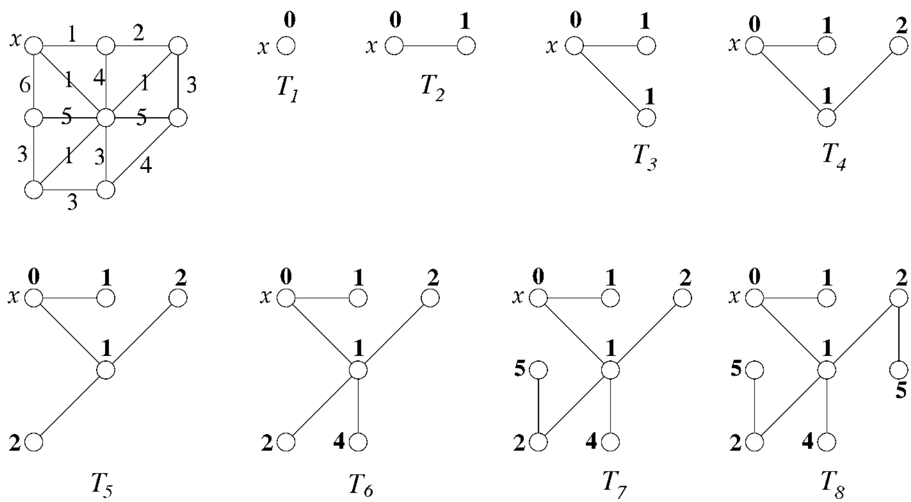
الخوارزمية

١- ضع $T_1 = (V_1, E_1)$ حيث $V_1 = \{v_1\}$ و $E_1 = \phi$ واعتبر $D(v_1) = 0$.

٢- افرض أن $T_k = (V_k, E_k)$ قد عُرِّف لعدد صحيح $k \geq 1$، وأن $D(u)$ قد حسبت لكل $u \in V_k$. اختر ضلعاً x_0y_0 بحيث $y_0 \notin V_k$ و $x_0 \in V_k$ وبحيث $D(x_0)+w(x_0y_0) = \min\{D(x)+w(xy) : x \in V_k, y \notin V_k, xy \in E(G)\}$. ضع $T_{k+1} = (V_{k+1}, E_{k+1})$ حيث $V_{k+1} = V_k \cup \{v_{k+1}\}$ و $v_{k+1} = y_0$ و $E_{k+1} = E_k \cup \{x_0y_0\}$ وضع $D(v_{k+1}) = D(x_0)+w(x_0y_0)$.

٣- كرر الخطوة(٢) كلما أمكن ذلك.

يوضح شكل(٢,٨) خطوات خوارزمية ديكسترا للحصول على شجرة مولدة للرسم G حيث الرأس المعين هو x.



شكل(٢,٨).

مبرهنة (٢,١٥)

إذا كان G رسماً مترابطاً موزوناً و $v_1 \in V(G)$ رأساً معيَّناً، فإن خوارزمية ديكسترا تعطي شجرة مولدة T للرسم G بحيث $d_G(v_1,u) = d_T(v_1,u)$ لكل $u \in V(G)$.

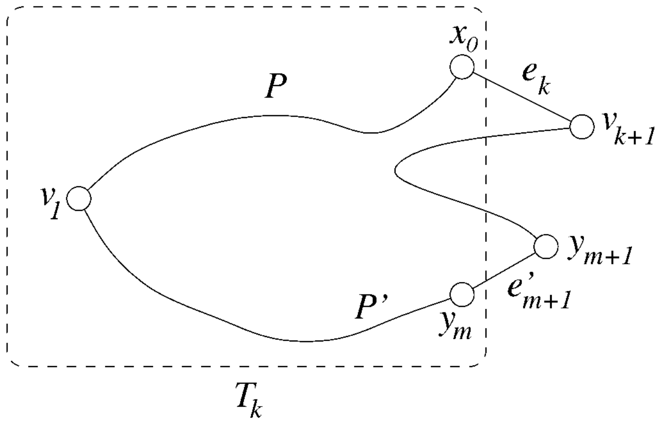
البرهان

افرض أن عدد رؤوس الرسم G يساوي n وليكن $T_m = (V_m, E_m)$ الرسم الجزئي من G المخرج بخوارزمية ديكسترا. سنثبت أولاً أن T_m شجرة مولدة للرسم G. إذا كانت $V(G) \neq V_m$، فليكن $a \in V_m$ و $b \in V(G) - V_m$. بما أن G مترابط فإنه يوجد في G ممر $a = x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r = b$. ليكن t أصغر دليل بحيث $x_t \in V_m$ و $x_{t+1} \notin V_m$. إذن، يمكن تكرار الخطوة(٢) من الخوارزمية بعد الحصول على T_m وهذا تناقض. عليه $V(G) = V_m$؛ أي $m = n$. واضح أن T_k رسم مترابط وبلا دورات لكل $1 \leq k \leq n$. وعليه فإن $T_n = (V_n, E_n)$ شجرة مولدة للرسم G.

سنثبت الآن أن $d_G(v_1,u) = d_T(v_1,u)$ لكل $u \in V(G)$. سنستخدم الاستقراء الرياضي على k لإثبات ما يلي: لكل عدد صحيح $1 \leq k \leq n$ فإن $d_G(v_1,u) = d_{T_k}(v_1,u)$ لكل $u \in V_k$.

إذا كان $k = 1$ فإن $d_G(v_1,v_1) = 0 = d_{T_1}(v_1,v_1)$. نفرض الآن أن المطلوب صحيح لأجل $k \geq 1$. وليكن $e_k = x_0 v_{k+1}$ الضلع المختار بالخوارزمية عند الحصول على T_{k+1} من T_k وحيث $x_0 \in V_k$ و $v_{k+1} \notin V_k$. ليكن P الممر (الوحيد) بين v_1 و v_{k+1} في الشجرة T_{k+1}. وليكن $P' : y_0, y_1, \ldots, y_q$ ممراً مختلفاً

عن P من v_1 إلى v_{k+1} في الرسم G. ليكن m أصغر دليل بحيث $y_m \in V_k$ و $y_{m+1} \notin V_k$ (انظر شكل(٢,٩)). بناء على الخطوة (٢) من الخوارزمية فإن $D(x_0)+w(x_0 v_{k+1}) \le D(y_m)+w(y_m y_{m+1})$. من ناحية ثانية فإن $d_{T_{k+1}}(v_1,v_{k+1}) = len(P) = D(x_0)+w(x_0 v_{k+1})$ و $D(y_m)+w(y_m y_{m+1}) \le len(P')$ إذن $d_{T_{k+1}}(v_1,v_{k+1}) \le len(P')$، وبالتالي فإن $d_{T_{k+1}}(v_1,v_{k+1}) = d_G(v_1,v_{k+1})$.



شكل(٢,٩).

تمارين

١- ارسم الأشجار غير المتماثلة التي عدد رؤوسها 7.

٢- هل الشجرة رسم ثنائي التجزئة؟

٣- هل يوجد شجرة متتالية درجاتها 3,3,1,1,1,1 ؟

٤- أثبت أنه إذا كان e ضلعاً في رسم مترابط G فإنه توجد شجرة مولدة للرسم G بحيث يكون e أحد أضلاعها.

٥- لتكن T شجرة عدد رؤوسها n ومتتالية درجاتها $d_1,d_2,\ldots,d_n$. أثبت أن $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$.

٦- لتكن $d_1,d_2,\ldots,d_n$ متتالية أعداد صحيحة موجبة بحيث $n \geq 3, \sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$.

(أ) أثبت أنه يوجد k, j بحيث $d_j = 1$ و $d_k > 1$.

(ب) استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات أنه توجد شجرة متتالية درجاتها $d_1,d_2,\ldots,d_n$.

٧- أعط مثالاً لرسم $G=(V,E)$ ليس شجرة ويحقق $|E| = |V| - 1$.

٨- إذا كان G رسماً عدد رؤوسه v و عدد أضلاعه e و عدد مركباته k فأثبت أن $e \geq v-k$.

٩- أثبت أن عدد الرؤوس التي درجتها 1 في شجرة ذات رأسين أو أكثر يساوي $2+\sum_{\deg(v_i)\geq 3}(\deg(v_i)-2)$.

١٠- لتكن T شجرة عدد رؤوسها n وعدد رؤوسها التي درجتها k يساوي n_k لكل $k \geq 0$. أثبت أن

$$n_1 = n_3 + 2n_4 + 3n_5 + 4n_6 + \cdots + kn_{k+2} + \cdots + 2.$$

١١- كم عدد الأشجار المولدة للدورة التي طولها n ؟

١٢- إذا كانت T شجرة فأثبت أن $C(T)$ يتكون من رأس واحد أو من رأسين متجاورين.

١٣- يقال إن الرسم G **متمركز ذاتياً** self-centered إذا كان $C(G) = V(G)$. جد الأشجار المتمركزة ذاتياً.

١٤- أثبت العبارة التالية إذا كانت صحيحة أو أعط مثالاً مناقضاً إذا كانت خاطئة: إذا كانت T_1 و T_2 شجرتين مولدتين للرسم G فيجب أن يكون بينهما ضلع مشترك.

١٥- لتكن T_1 و T_2 شجرتين مولدتين للرسم G. ليكن $e_1 \in E(T_1)-E(T_2)$. أثبت أنه يوجد $e_2 \in E(T_2)-E(T_1)$ بحيث تكون كل من $(T_1-e_1)+e_2$ و $(T_2-e_2)+e_1$ شجرة مولدة للرسم G.

١٦- لتكن T شجرة عدد رؤوسها n؛ وليكن G رسماً بحيث $\delta(G) \geq n-1$. أثبت أن G يحتوي على رسم جزئي يماثل T. [إرشاد: استخدم الاستقراء الرياضي على n].

١٧- إذا كانت T شجرة عدد رؤوسها n فأثبت أن T تماثل رسماً جزئياً من $\bar{C}_{n+2}$.

١٨- جد جميع الأشجار T بحيث تكون $\bar{T}$ شجرة أيضاً.

١٩- جد جميع الأشجار T التي هي رسوم منتظمة.

٢٠- استخدم الاستقراء الرياضي على عدد الأضلاع لإثبات أن $|E|=|V|-1$ لكل شجرة $T=(V,E)$.

٢١- إذا كان G رسماً موزوناً مترابطاً بحيث لا يوجد ضلعان لهما نفس الوزن فأثبت أنه توجد شجرة مولدة صغرى وحيدة للرسم G.

٢٢- ليكن G رسماً موزوناً مترابطاً حيث w دالة الوزن للرسم G، وليكن M عدداً بحيث $M > w(e)$ لكل $e \in E(G)$. عرف الدالة $w': E(G) \to \mathbb{R}$ كما يلي $w'(e) = M - w(e)$ لكل $e \in E(G)$. بيّن أن مسألة إيجاد شجرة مولدة

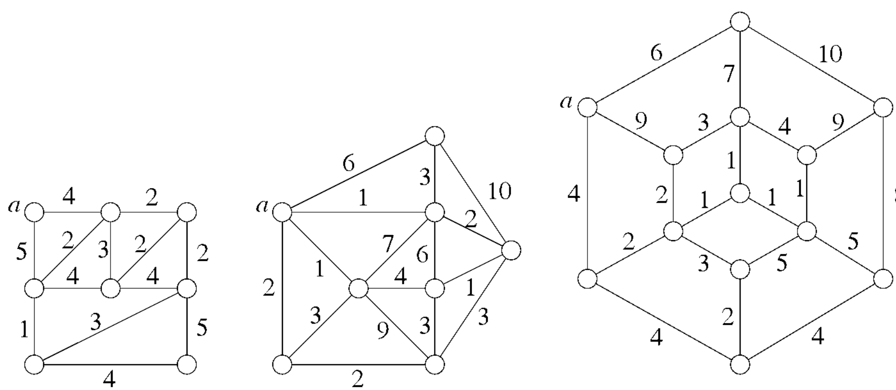
عظمى (صغرى) للرسم G الذي دالة الوزن له هي w يمكن تحويلها إلى مسألة إيجاد شجرة مولدة صغرى (عظمى) للرسم G عندما تكون دالة الوزن له هي w'.

٢٣- عدل كلاً من خوارزمية بريم وخوارزمية كروسكال بحيث يكون المخرج شجرة مولدة عظمى.

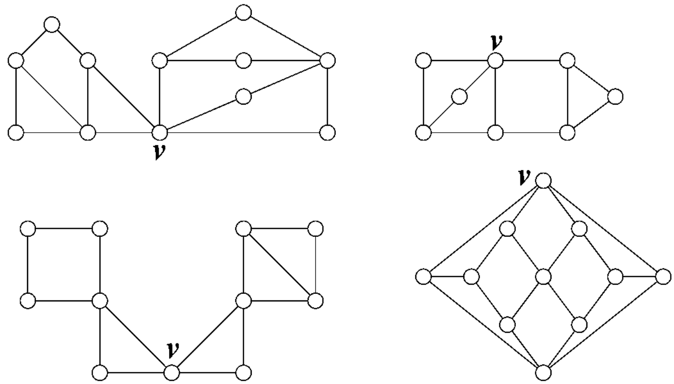
٢٤- لكل رسم من الرسوم الموزونة المترابطة في شكل(٢,١٠) جد شجرة مولدة صغرى.

٢٥- لكل رسم من الرسوم الموزونة المترابطة في شكل(٢,١٠) جد شجرة مولدة تحوي أقصر الممرات من a إلى باقي الرؤوس في الرسم.

٢٦- لكل رسم من الرسوم في شكل(٢,١١) جد شجرة تقصٍ عرضي جذرها v و شجرة تقصٍ عمقي جذرها v.



شكل(٢,١٠).



شكل(٢,١١).