الفصل السابع

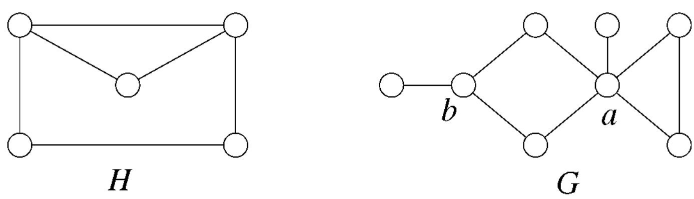
الترابطية والترابطية الضلعية
CONNECTIVITY AND EDGE CONNECTIVITY

(٧,١) المفاصل

ليكن $G=(V,E)$ رسمًا وليكن $v\in V$. نقول إن v **مفصل** articulation point أو **رأس قطع** cut vertex في G إذا كان $\omega(G-v)>\omega(G)$ ، حيث $\omega(G)$ ترمز إلى عدد مركبات G.

مثال (٧,١)

ليكن G و H الرسمين المبينين أدناه في شكل(٧,١). بما أن $3=\omega(G-a)>\omega(G)=1$ فإن a مفصل في G. كذلك، b مفصل في G لأن $2=\omega(G-b)>\omega(G)=1$. أما الرسم H فإنه لا يحتوي على أي مفصل لأن $\omega(H-x)=\omega(H)$ لكل رأس x في H.



شكل(٧,١).

المبرهنة التالية تبين أنه يمكن تمييز المفاصل باستخدام الممرات.

مبرهنة (٧,١)

ليكن $G=(V,E)$ رسماً مترابطًا وليكن $v\in V$. عندئذٍ، التقارير التالية متكافئة :

(أ) v مفصل في G.

(ب) توجد تجزئة $\{A_1,A_2\}$ للمجموعة $V-\{v\}$ بحيث لكل $x\in A_1$ و $y\in A_2$ فإن v ينتمي إلى كل ممر من x إلى y.

(ج) يوجد رأسان $v_1,v_2\in V$ مختلفان عن v بحيث ينتمي v إلى كل ممر من v_1 إلى v_2.

البرهان

(أ) $\Leftarrow$ (ب) بما أن v مفصل في الرسم المترابط G فإن $\omega(G-v)\geq 2$. لتكن $C_i=(V_i,E_i),\ i=1,2,\cdots,m$ هي جميع مركبات $G-v$. ضع $A_1=V_1$ و $A_2=V_2\cup V_3\cup\cdots\cup V_m$. واضح أن $\{A_1,A_2\}$ تجزئة للمجموعة $V-\{v\}$ وأنه إذا كان $x\in A_1$ و $y\in A_2$ فإن x و y ينتميان إلى مركبتين مختلفتين من مركبات الرسم $G-v$. وعليه فإن v ينتمي إلى كل ممر من x إلى y.

(ب) $\Leftarrow$ (ج) واضح أن (ج) حالة خاصة من (ب).

(ج) $\Leftarrow$ (أ) إذا كان v ينتمي إلى كل ممر من v_1 إلى v_2 في الرسم المترابط G فإنه لا يوجد ممر من v_1 إلى v_2 في الرسم $G-v$ ؛ وعليه فإن $G-v$ غير مترابط. إذن v مفصل في G. □

النتيجة التالية تقول إنه لا يوجد رسم بحيث تتكون مجموعة رؤوسه من مفاصل فقط.

مبرهنة (٧,٢)

إذا كان $G=(V,E)$ رسماً بحيث $|V|=n\geq 2$ فإنه يوجد على الأقل رأسان $x,y\in V$ بحيث كل من x و y ليس مفصلاً في G.

البرهان

نفرض أولاً أن G رسم مترابط، ولغرض التناقض نفرض أن جميع رؤوس G مفاصل باستثناء رأس واحد على الأكثر. ليكن $a,b\in V$ رأسين بحيث

$$d(a,b)=\max\{d(u,v):u,v\in V\}$$

استناداً إلى الفرض فإن واحداً على الأقل من a و b مفصل. ليكن a مفصلاً في G. إذن $G-a$ رسم غير مترابط، وعليه فإنه يوجد $v\in V$ بحيث v و b لا ينتميان إلى المركبة نفسها في الرسم $G-a$ ؛ واضح أن a ينتمي إلى كل ممر من v إلى b. إذن، في الرسم G، أقصر ممر من v إلى b يحتوي على أقصر ممر من a إلى b. وهذا يتناقض مع اختيارنا للرأسين a و b.

واضح أنه إذا كان G غير مترابط ويتكون من رؤوس منعزلة فقط فإن G يحقق المطلوب. أما إذا كان G غير مترابط وإحدى مركباته تحتوي على رأسين على الأقل فإن G يحقق المطلوب بناءً على الفقرة الأولى. □

نقول إن الرسم H **قالب** block إذا كان مترابطًا ولا يحتوي على مفاصل. وإذا كان G رسماً مترابطاً وكان B رسماً جزئيًا من G فإن B يسمى قالباً في G إذا كان B قالباً وأعظمياً بالنسبة إلى هذه الخاصة. ويسمى B **قالباً طرفياً** end – block في G إذا احتوى B على مفصل واحد من مفاصل G.

ملحوظة

١- إذا كان B قالباً في G فإن B محدث بالمجموعة $V\left(B\right)$.

٢- إذا كانت $\left\{B_1,B_2,\cdots,B_m\right\}$ مجموعة قوالب $G=\left(V,E\right)$ فإن $P=\left\{E\left(B_1\right),E\left(B_2\right),\cdots,E\left(B_m\right)\right\}$ تجزئة للمجموعة E.

٣- إذا كان B_1 و B_2 قالبين في G فإن $V\left(B_1\right)\cap V\left(B_2\right)$ تكون ϕ أو تكون مجموعة مفردة تحتوي على مفصل.

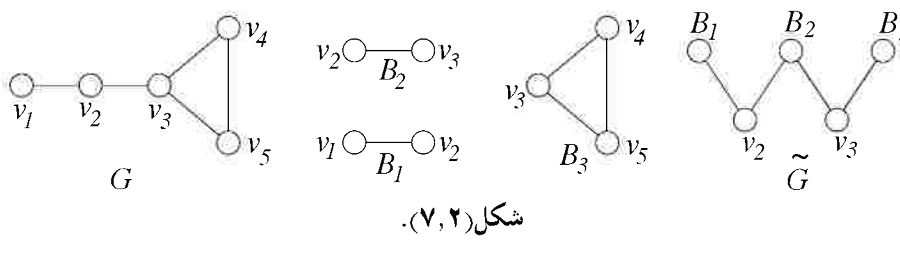
٤- إذا كان e_1 و e_2 ضلعين متجاورين ولم يكن طرفهما المشترك مفصلاً فإنهما ينتميان إلى القالب نفسه.

٥- الرسم الجزئي المكون من ضلع واحد e يكون قالباً إذا وفقط إذا كان e جسرًا.

٦- إذا كانت C دورة فإن C تكون محتواة في قالب.

مثال (٧,٢)

شكل(٧,٢) يبين رسماً G مع قوالبه B_1,B_2,B_3 :



شكل(٧,٢).

ليكن $G=\left(V,E\right)$ رسماً، $A\neq\phi$ مجموعة مفاصل G، B مجموعة قوالب G. نقرن بالرسم G رسماً ثنائي التجزئة $\tilde{G}=\left(A\cup B,\tilde{E}\right)$ بحيث لكل

$x\in A\,,y\in B$ فإن $\{x,y\}\in\tilde{E}$ إذا وفقط إذا كان المفصل x رأسًا في القالب y. نسمي $\tilde{G}$ **رسم القوالب والمفاصل** block-cutpoint graph للرسم G.

مثال (٧,٣)

بالإشارة إلى الرسم G، المعطى في مثال(٧,٢) فإن $\tilde{G}$ مبين في شكل(٧,٢).

مبرهنة (٧,٣)

إذا كان $G=(V,E)$ رسماً بحيث $A\neq\phi$ فإن $\tilde{G}=\left(A\cup B,\tilde{E}\right)$ غابة.

البرهان

لغرض التناقض، نفرض أن $\tilde{G}$ يحتوي على دورة $\tilde{C}:a_1b_1a_2b_2\cdots a_nb_na_1$ حيث $a_i\in A, b_i\in B$. إذن توجد دورة $C:a_1e_1\cdots a_2e_2\cdots a_ne_n\cdots a_1$ في G بحيث ينتمي الضلع e_i إلى القالب b_i. بما أن e_i ينتمي إلى القالب b_i وإلى الدورة C فإن b_i يحتوي على C. إذن b_1 و b_2 لديهما أكثر من رأس مشترك، وهذا تناقض. وعليه فإن $\tilde{G}$ لا يحتوي على دورات.

مبرهنة (٧,٤)

إذا كان $G=(V,E)$ رسماً مترابطاً بحيث $A\neq\phi$ فإن $\tilde{G}=\left(A\cup B,\tilde{E}\right)$ شجرة أوراقها قوالب.

البرهان

ليكن $P:x=a_1,e_1,v_2,e_2,\cdots,a_n=y$ ممرًا من المفصل x إلى المفصل y في الرسم المترابط G. بما أن أي ضلعين ينتميان إلى القالب نفسه عندما لا يكون طرفهما المشترك مفصلاً؛ فإن P يعطينا مسارًا

$$Q:a_1b_0'a_1'b_1'a_2'b_2'\cdots a_m'b_m'a_m$$

من $x=a_1$ إلى $y=a_n$ في $\tilde{G}$ حيث $a_i'\in A$ و $b_i'\in B$.وإذا كان $a,a'\in A$ و $b,b'\in B$ بحيث a رأس في b و a' رأس في b' فإنه يمكن إنشاء مسار S من a إلى a' في $\tilde{G}$. وبإضافة b أو b' إلى S حسب الحاجة فإنه يمكن إنشاء مسار بين أي اثنين من a,a',b,b'. وعليه فإن $\tilde{G}$ رسم مترابط. وبما أن $\tilde{G}$ غابة فإن $\tilde{G}$ شجرة.

واضح أن $\deg_{\tilde{G}}(x)>1$ لكل $x\in A$. إذن، لكل $x\in A$، فإن x ليس ورقة في الشجرة $\tilde{G}$. وهكذا فإن أوراق $\tilde{G}$ قوالب.

نتيجة (٧,١)

إذا كان G رسماً بحيث $A\neq\phi$ فإنه يوجد على الأقل قالبان طرفيان في G.

البرهان

بما أن $\tilde{G}$ شجرة عدد رؤوسها أكبر من 1 فإنه يوجد على الأقل رأسان y,x في $\tilde{G}$ بحيث درجة كل من y,x تساوي 1. وبما أن أوراق $\tilde{G}$ قوالب فينتج أن كلاً من y,x قالب.

تمارين (٧,١)

١- إذا كان $G=(V,E)$ رسماً بحيث $A\neq\phi$ وعدد مركباته k فأثبت أن عدد قوالب G يساوي $k+\sum_{v\in V}(b(v)-1)$ حيث $b(v)$ هو عدد القوالب التي تحتوي على v.

٢- في أي رسم، أثبت أن عدد المفاصل أصغر من عدد القوالب.

٣- إذا كان $G=(V,E)$ رسماً فأثبت ما يلي:

لكل $x\in V$ فإن $\deg x$ عدد زوجي إذا وفقط إذا كان كل قالب في G أويلريًا.

٤- ليكن $G=(V,E)$ رسماً بحيث $V=\{1,2,\cdots,11\}$ و $\{x,y\}\in E$ إذا وفقط إذا كان $\gcd(x,y)>1$. عين قوالب G.

٥- ليكن B قالباً بحيث يحتوي على أكثر من ضلع. أثبت أن أي ضلع من أضلاع B يجب أن يكون محتوىً في إحدى دورات B.

٦- إذا كان $G=(V,E)$ رسماً بحيث $A\neq\phi$ فأثبت أنه يوجد $x\in A$ بحيث تكون الرؤوس المجاورة للمفصل x في $\tilde{G}$، باستثناء واحد على الأكثر، قوالب في G.

٧- أثبت أنه إذا كان x مفصلاً في الرسم المترابط G فإن x ليس مفصلاً في الرسم المتمم $\bar{G}$.

٨- أثبت ما جاء في الملحوظة.

٩- ليكن G رسماً مترابطاً عدد رؤوسه أكبر من 2. أثبت أنه إذا وجد جسر في G فإنه يوجد مفصل في G.

١٠- أثبت أن الرأس x مفصل في الشجرة T إذا وفقط إذا كان $\deg(x)>1$.

١١- إذا كان G رسماً متمركزاً ذاتياً فبيّن أن G لا يحتوي على مفاصل.

(٧,٢) الترابطية

ليكن $G=(V,E)$ رسماً مترابطاً.

(أ) تسمى $W\subseteq V$ **مجموعة مفصلية** vertex cut في G إذا كان $G-W$ غير مترابط.

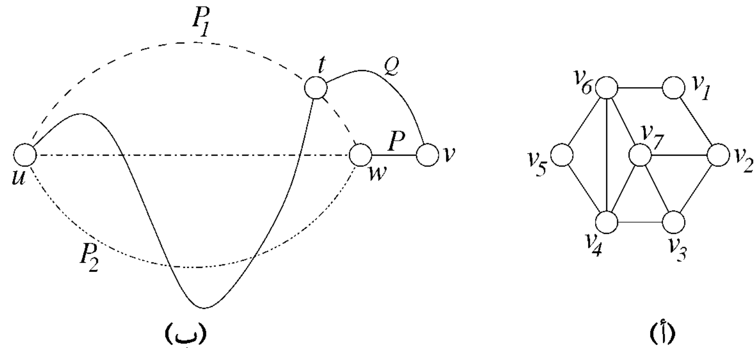
(ب) الرمز $\kappa(G)$ يدل على **ترابطية** connectivity G التي تعرف كما يلي:

$$\kappa(G)=\min\{|W|: W\subseteq V \text{ حيث } G-W \text{ تافه أو غير مترابط}\}$$

(ج) نقول إن G **مترابط من النوع** n n-connected إذا كان $\kappa(G)\geq n\geq 1$.

مثال (٧,٤)

ليكن $G=(V,E)$ هو الرسم الموضح في شكل(٧,٣)(أ).



شكل(٧,٣).

نلاحظ أن G قالب وأن كلاً من $\{v_1,v_7,v_4\}$ ، $\{v_6,v_7,v_3\}$ ، $\{v_6,v_4\}$ مجموعة مفصلية في G. ونلاحظ أن $\kappa(G)=2$ ، وعليه فإن G مترابط من النوع 2 كما أنه مترابط من النوع 1 ولكنه ليس مترابطاً من النوع 3.

ملحوظة

من السهل التحقق مما يلي :

١- $\kappa(K_n)=n-1$ وإذا كان G رسماً غير تام عدد رؤوسه n فإن $\kappa(G)\le n-2$.

٢- $\kappa(K_{m,n})=\min\{m,n\}$.

٣- $G=(V,E)$ مترابط من النوع 1 إذا وفقط إذا كان G مترابطاً و $|V|\ge 2$.

٤- $G=(V,E)$ مترابط من النوع 2 إذا وفقط إذا كان G قالباً و $|V|\ge 3$.

٥- $\kappa(G)=0$ إذا وفقط إذا كان G تافهًا أو غير مترابط.

لتكن $S=\{P_1,P_2,\cdots,P_m\}$ مجموعة ممرات من الرأس u إلى الرأس v. نقول إن S **منفصلة داخلياً** internally disjoint إذا كان $V(P_i)\cap V(P_j)=\{u,v\}$ لكل $i\neq j$.

المبرهنة التالية تعطينا تمييزًا للرسوم المترابطة من النوع 2 باستخدام الممرات المنفصلة داخليًا.

مبرهنة (٧,٥)

ليكن $G=(V,E)$ رسماً بحيث $|V|\geq 3$. عندئذٍ، G مترابط من النوع 2 إذا وفقط إذا كان لكل $u,v\in V$، $u\neq v$، يوجد ممران منفصلان داخليًا من u إلى v.

البرهان

لنفرض أولاً أنه لكل $u,v\in V$، $u\neq v$، يوجد ممران منفصلان داخليًا من u إلى v. إذن G مترابط. ولإثبات أن G لا يحتوي على مفاصل باستخدام التناقض، نفرض أن w مفصل في G. ينتج من مبرهنة (٧,١) أنه يوجد رأسان مختلفان $u\neq w$, $v\neq w$ بحيث ينتمي w إلى كل ممر من u إلى v. وهذا يناقض الفرض أنه يوجد ممران منفصلان داخليًا من u إلى v. وعليه فإن G مترابط من النوع 2.

نفرض الآن أن G مترابط من النوع 2. نستخدم الاستقراء الرياضي على المسافة لإثبات أنه لكل رأسين مختلفين $u,v\in V$ يوجد ممران منفصلان من u إلى v.

لتكن $d(u,v)=1$. إذن u, v يصل بينهما ضلع وليكن $e=\{u,v\}$. بما أن كلاً من u, v ليس مفصلاً في G فإن e ليس جسرًا في G. وعليه فإن e محتوى في دورة C في G. واضح أن C تعطينا ممرين منفصلين داخليًا من u إلى v.

نفرض الآن أن $k \geq 1$ وأن المطلوب صحيح لكل رأسين مختلفين المسافة بينهما أقل من أو تساوي k ونفرض أن $d(u,v) = k+1$. ليكن $p: u \cdots wv$ ممرًا طوله $k+1$ من u إلى v. إذن $d(u,w) = k$ وعليه فإنه يوجد ممران منفصلان داخليًا P_1 و P_2 من u إلى w في G. انظر شكل(٧,٣)(ب).

بما أن w ليس مفصلاً في G فإن $G-w$ مترابط. إذن يوجد ممر Q من u إلى v في $G-w$. ليكن t هو آخر رأس ينتمي إلى Q بحيث t ينتمي أيضًا إلى P_1 أو إلى P_2. نفرض الآن أن t ينتمي إلى P_1 وننشئ ممرين منفصلين داخليًا من u إلى v في G [إذا كان t ينتمي إلى P_2 فالإنشاء مشابه] كما يلي :

الممر الأول يتكون من جزئين : جزء مأخوذ من P_1 بحيث يبدأ من u وينتهي في t والجزء الآخر مأخوذ من Q بحيث يبدأ من t وينتهي في w. أما الممر الثاني فيتكون أيضًا من جزئين : جزء مأخوذ من P_2 بحيث يبدأ من u وينتهي في w والجزء الآخر هو v, wv, w. □

للحصول على تمييزات أخرى للرسوم المترابطة من النوع 2 فإننا نحتاج إلى التمهيدية التالية.

تمهيدية (٧,١)

ليكن $G = (V, E)$ رسماً مترابطاً من النوع k ، وليكن G' رسماً حصلنا عليه من G بعد إضافة رأس جديد x بحيث $|N(x)| \geq k$. عندئذٍ، G' رسم مترابط من النوع k.

البرهان

لتكن A مجموعة مفصلية في G'. إذا كان $x \in A$ فإن $A - \{x\}$ مجموعة مفصلية في G. وبما أن G مترابط من النوع k فإن $|A - \{x\}| \geq k$ ؛ أي

$|A| \geq k+1$. نفـــرض الآن أن $x \notin A$. إذا كانـــت $N(x) \subseteq A$ فـــإن $|A| \geq |N(x)| \geq k$. أما إذا كانت $N(x) \not\subseteq A$ فإن مركبة $G'-A$ التي تحتوي على x تحتوي أيضًا على $N(x)-A$ ؛ وعليه فإن A مجموعة مفصلية في G. إذن $|A| \geq k$.

مبرهنة (٧,٦)

ليكن $G=(V,E)$ رسماً بحيث $|V| \geq 3$. عندئذٍ، العبارات التالية متكافئة.

١- G مترابط وبلا مفاصل ؛ أي G مترابط من النوع 2.

٢- لكل $u,v \in V$ ، $u \neq v$ ، فإنه يوجد ممران منفصلان داخليًا من u إلى v.

٣- لكل $u,v \in V$ ، $u \neq v$ ، فإنه توجد دورة تحتوي على v,u.

٤- $\delta(G) \geq 1$ ولكل $c,e \in E$ ، $c \neq e$ ، فإنه توجد دورة تحتوي على e,c.

البرهان

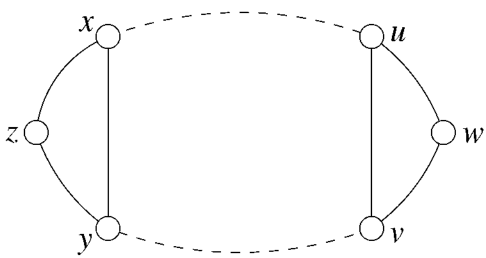
تبين مبرهنة (٧,٥) أن (١) $\Leftrightarrow$ (٢).

واضح أن (٢) $\Leftrightarrow$ (٣) لأنه إذا وجد ممران منفصلان داخليًا من u إلى v فإنهما يعطيان دورة تحتوي على u و v ؛ وإذا وجدت دورة تحتوي على u و v فإنها تعطينا ممرين منفصلين داخليًا من u إلى v.

نثبت الآن أن (٤) $\Leftarrow$ (٣). افرض أن u و v رأسان مختلفان. بما أن $\delta(G) \geq 1$ فإن كلاً من u و v رأس غير منعزل. إذن يوجد ضلع c' ساقط على u وضلع e' ساقط على v. إذا كان $c' \neq e'$ فإنه ينتج من (٤) أنه توجد دورة تحتوي على c' و e' ؛ وهذه الدورة تحتوي على u و v. أما إذا كان $c'=e'$ فإننا نختار أي ضلع آخر $f \neq c'$ لنحصل على دورة تحتوي على c' و f ؛ وهذه الدورة تحتوي على u و v.

يتبقى إثبات أن (٣)⇐(٤). بما أن (٣) متحققة فينتج أن (١) متحققة، وعليه فإن G مترابط. إذن $\delta(G)\geq 1$. ليكن $c=\{u,v\}$ و $e=\{x,y\}$ ضلعين بحيث $c\neq e$. وليكن G' الرسم الذي نحصل عليه من G بعد إضافة رأسين جديدين w و z بحيث $N(w)=\{u,v\}$ و $N(z)=\{x,y\}$. انظر شكل(٧,٤).

بما أن G مترابط من النوع 2 ، فإنه ينتج من تمهيدية(٧,١) أن G' مترابط من النوع 2. وعليه فإن G' يحقق العبارة (٣) المكافئة للعبارة (١). إذن توجد دورة C' في G' تحتوي على كل من w و z. وبما أن درجة كلٍ من w و z في G' تساوي 2 فإن C' تحتوي على كل من الممرين x,z,y و v,w,u ولكنها لا تحتوي على أي من الضلعين xy و uv. نستبدل الآن الضلع xy بالممر x,z,y والضلع uv بالممر v,w,u في C' فنحصل على دورة C في G تحتوي على كل من الضلعين xy و uv.



شكل(٧,٤).

(٧,٣) الترابطية الضلعية

ليكن $G=(V,E)$ رسماً مترابطاً.

(أ) تسمى $L\subseteq E$ **مجموعة جسرية** edge cut في G إذا كان $G-L$ غير مترابط.

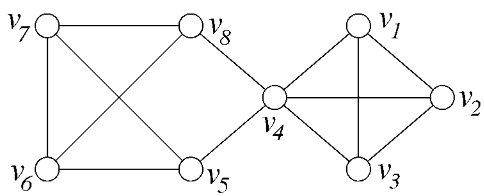
(ب) الرمز $\kappa'(G)$ يدل على **الترابطية الضلعية** edge connectivity للرسم G والتي تعرف كما يلي :

$$\kappa'(G) = \min\{|L| : \text{تافه أو غير مترابط } G-L \text{ بحيث } L \subseteq E\}$$

(ج) نقول إن G **مترابط ضلعياً من النوع** n n-edge connected إذا كان $\kappa'(G) \geq n \geq 1$.

مثال (٧,٥)

ليكن $G = (V, E)$ هو الرسم الموضح في شكل(٧,٥).



شكل(٧,٥).

نلاحظ أن G مترابط وأن كلاً من $\{v_4v_8, v_4v_5\}$ ، $\{v_4v_8, v_5v_7, v_5v_6\}$ ، $\{v_6v_5, v_6v_8, v_7v_5, v_7v_8\}$ مجموعة جسرية في G. ونلاحظ أن $\kappa'(G) = 2$ ، وعليه فإن G مترابط ضلعياً من النوع 2 كما أنه مترابط ضلعياً من النوع 1 ولكنه ليس مترابطاً ضلعياً من النوع 3.

تصف المبرهنة التالية العلاقة بين الترابطية والترابطية الضلعية.

مبرهنة (٧,٧)

إذا كان $G = (V, E)$ رسماً فإن

$$\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$$

البرهان

سنثبت أولاً أن $\kappa'(G)\le\delta(G)$. نختار رأسًا $v\in V$ بحيث $\deg v=\delta(G)$ ونعتبر الرسم H الناتج من G بعد حذف جميع الأضلاع الساقطة على v. واضح أن v رأس منعزل في H وعليه فإن H تافه أو غير مترابط. إذن $\kappa'(G)\le\delta(G)$.

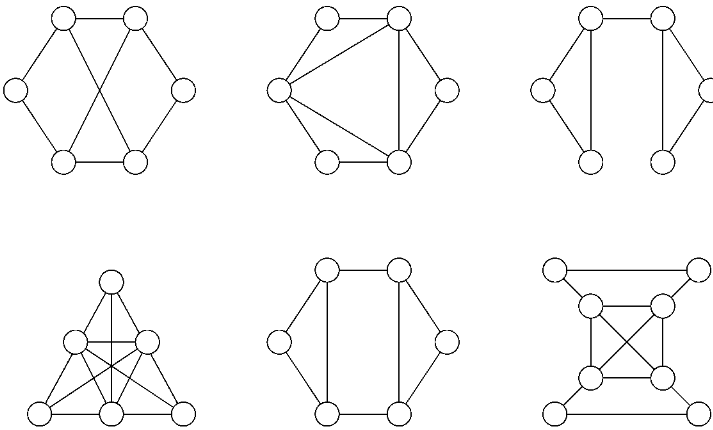
سنثبت الآن أن $\kappa(G)\le\kappa'(G)$. إذا كان $\kappa'(G)=0$ فإن G تافه أو غير مترابط ؛ وعليه فإن $\kappa(G)=0$. أما إذا كان $\kappa'(G)=1$ فإن G رسم مترابط يحتوي على جسر ؛ وعليه فإن $G\cong K_2$ أو G يحتوي على مفصل واحد على الأقل. إذن $\kappa(G)=1$.

نفرض الآن أن $\kappa'(G)=m\ge 2$. نختار مجموعة جسرية $B=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ في G. ليكن $G_1=G-\{e_1,e_2,\cdots,e_{m-1}\}$ و $e_m=uv$. واضح أن G_1 رسم مترابط وأن e_m جسر في G_1. لكل $i=1,2,\cdots,m-1$ نختار الآن طرفًا للضلع e_i مختلفًا عن كل من $v\,,u$ ونفرض أن A هي مجموعة الأطراف المختارة. واضح أن $|A|\le m-1$. ليكن $G_2=G-A$. إذا كان G_2 غير مترابط فإن $\kappa(G)\le m-1<m=\kappa'(G)$. أما إذا كان G_2 مترابطاً فإنه ينتج من كون G_2 رسماً جزئيًا محدثًا في G_1 ومن كون e_m جسرًا في G_1 أن $G_2\cong K_2$ أو e_m جسر في G_2. أي $G_2\cong K_2$ أو G_2 يحتوي على مفصل. وعليه فإنه يوجد رأس في G_2 بحيث إذا حذف هذا الرأس نحصل على رسم تافه أو غير مترابط. إذن $\kappa(G)\le\kappa'(G)$.

تمارين (٧,٢)

١- إذا كان G هاملتونيًا فأثبت أن G مترابط من النوع 2.

٢- جد ترابطية كل رسم من الرسوم في شكل(٧,٦).



شكل(٧,٦).

٣- إذا كان G رسماً عدد رؤوسه $n \ge 2$ فأثبت أن $\kappa(G) \le \frac{2m}{n}$ حيث m هو عدد أضلاع G.

٤- إذا كـان $\delta(G) \ge n-2$، حيث n عـدد رؤوس G، فأثبت أن $\kappa(G) = \delta(G)$. أعط مثالاً لرسم G بحيث $\delta(G) = n-3$، $\kappa(G) < \delta(G)$.

٥- إذا كان G رسماً قطره يساوي 2 فأثبت أن $\kappa'(G) = \delta(G)$.

٦- احسب $\kappa'(K_{m,n})$ حيث $1 \le m \le n$.

٧- أعط مثالاً لرسم G بحيث $\kappa(G) < \kappa'(G) < \delta(G)$.

٨- جد الترابطية الضلعية لكل من الرسوم المعطاة في التمرين ٢.

٩- ليكن G رسماً مترابطاً من النوع n ولتكن $v_1, v_2, \cdots, v_n$ رؤوسًا مختلفة في G. ننشئ رسماً H بإضافة رأس جديد x مجاورٍ لكل من $v_1, v_2, \cdots, v_n$. أثبت أن H مترابط من النوع n.

١٠- ليكن G رسماً مترابطاً من النوع n. أثبت أن $G + K_1$ (أي مضموم G و K_1) مترابط من النوع $n+1$.

١١- إذا كان $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ ، حيث n عدد رؤوس G ، فأثبت أن $\kappa'(G) = \delta(G)$.

أعط مثالاً لرسم G بحيث

$$\kappa'(G) < \delta(G), \delta(G) = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2} - 1\right)$$