# الفصل الثامن

## الرسوم الموجَّهة
## DIGRAPHS

### (٨,١) تعاريف ونتائج أساسية

يتكون الرسم الموجه $D=(V,A)$ digraph (directed graph) من مجموعة غير خالية $V$، تسمى مجموعة رؤوس $D$، ومجموعة من الأزواج المرتبة $A\subseteq V\times V$، تسمى مجموعة أقواس $D$ أو مجموعة الأضلاع الموجَّهة لـ $D$. إذا كان $a=(u,v)\in A$ **ضلعاً موجهاً** directed edge في $G$ فإننا نسمي $u$ الرأس **الابتدائي** tail لِ $a$ كما نسمي $v$ **الرأس النهائي** head لِ $a$. يسمى الضلع الموجه $(u,u)$ **عروة موجهة** directed loop.

ليكن $v$ رأساً في الرسم الموجه $D=(V,A)$. للرأس $v$، تعرف **الدرجة الداخلة** $d^-(v)$ indegree على أنها عدد الأضلاع التي يكون فيها $v$ رأساً نهائياً ؛ وتعرف **الدرجة الخارجة** $d^+(v)$ outdegree على أنها عدد الأضلاع التي يكون فيها $v$ رأساً ابتدائياً. يرمز للجوار الداخل لِ $v$ بالرمز $N^-(v)$ ويرمز للجوار الخارج لِ $v$ بالرمز $N^+(v)$ ويعرفان كما يلي :

$$N^-(v)=\{x\in V:(x,v)\in A\}$$
$$N^+(v)=\{x\in V:(v,x)\in A\}$$

**مبرهنة (٨,١)**

إذا كان $D=(V,A)$ رسمًا موجهاً فإن، $\sum_{v\in V} d^{-}(v)=\sum_{v\in V} d^{+}(v)=|A|$.

**البرهان**

نلاحظ أن كل ضلع موجه له رأس ابتدائي واحد ورأس نهائي واحد، وعليه فإن كل ضلع موجه يساهم بواحد عند حساب كل من $\sum_{v\in V} d^{-}(v)$ و $\sum_{v\in V} d^{+}(v)$؛ ومن هنا ينتج المطلوب. □

ليكن $D=(V,A)$ رسمًا موجهاً. **الرسم الرديف** لِـ $D$ underlying graph هو الرسم الذي رؤوسه $V$ وأضلاعه $\{\{u,v\}:(u,v)\in A\}$. إذا كان $b,c\in V$، $n\geq 1$ وكانت $W=v_1a_1v_2a_2\cdots a_{n-1}v_n$ متتالية متناوبة من الرؤوس والأقواس بحيث $a_i=(v_i,v_{i+1}),v_1=b,v_n=c$ لكل $1\leq i\leq n-1$ فإننا نسميها **مساراً موجهاً** directed walk من $b$ إلى $c$. وبالمثل، نعرف **الطريق الموجه** directed trail، **الممر الموجه** directed path، **الدارة الموجهة** directed circuit، **الدورة الموجهة** directed cycle. كما يعرف طول المسار الموجه على أنه عدد أقواسه.

نقول إن الرسم الموجه $D$ **مترابط أو مترابط بضعف** weakly connected إذا كان رسمه الرديف مترابطاً، ونقول إن $D$ **مترابط بقوة** strongly connected إذا وجد ممر موجه من $u$ إلى $v$ وممر موجه من $v$ إلى $u$ لكل $u,v\in V(D)$.

وبشكل موازٍ للتعاريف المتعلقة بالرسومات تعرف الدارة الموجهة الأويلرية، الطريق الموجه الأويلري، الممر الموجه الهاملتوني، الدورة الموجهة الهاملتونية.

تعطينا المبرهنة التالية تمييزاً للرسوم الموجهة الأويلرية.

**مبرهنة (٨,٢)**

ليكن $D=(V,A)$ رسمًا موجهاً مترابطاً بضعف و$|A|>1$. عندئذٍ، $D$ رسم موجه أويلري إذا وفقط إذا كان $d^-(v)=d^+(v)$ لكل $v\in V$.

**البرهان**

يمكن إثبات المطلوب بطريقة مشابهة لإثبات مبرهنة (٣,١) ونتركه كتمرين للقارئ. □

إن معالجة الدورات الموجهة في الرسوم الموجهة تشبه إلى حد ما معالجة الدورات في الرسوم. ويمكن تعميم بعض المبرهنات المتعلقة بالرسوم الهاملتونية إلى الرسوم الموجهة الهاملتونية حيث يلاحظ أن الإثباتات تكون أصعب نسبيًا. وهذا ما تبينه المبرهنة التالية حيث نقول إن الرسم الموجه **فعلي** simple digraph إذا لم يحتوِ على عروات موجهة وأضلاع موجهة مكررة.

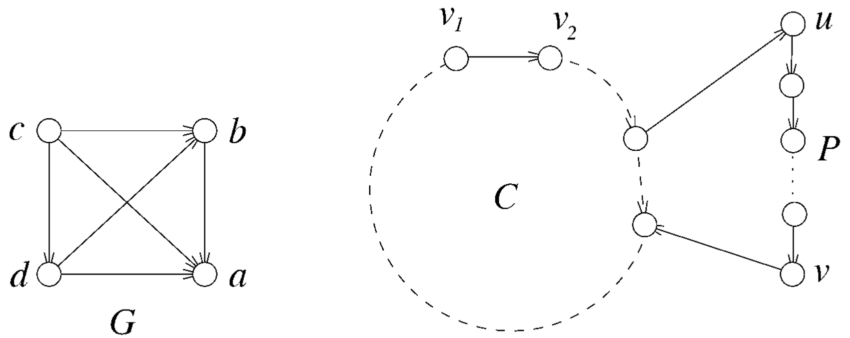
**مبرهنة (٨,٣)**

إذا كان $D$ رسماً موجهاً فعلياً عدد رؤوسه $n$ وكان $\min\{\delta^+,\delta^-\}\geq\frac{n}{2}>1$ فإن $D$ هاملتوني.

**البرهان**

لغرض الحصول على تناقض، افرض أن $D$ رسم يحقق فرضيات المبرهنة ولكنه لا يحتوي على دورة موجهة هاملتونية. لتكن $C=v_1v_2\cdots v_lv_1$ دورة في $D$ بحيث يكون طولها $l<n$ أكبر ما يمكن؛ نلاحظ أن $l>\max\{\delta^+,\delta^-\}$ [انظر تمرين ٢ من تمارين(٨,١)] وعليه فإن $l>\frac{n}{2}>1$. ليكن $P=u\cdots v$ ممراً

موجهاً في $D-V(C)$ بحيث يكون طوله $m \geq 0$ أكبر ما يمكن. نلاحظ أن $n \geq l+m+1$ وبما أن $l > \frac{n}{2}$ فينتج أن $m < \frac{n}{2}$ [انظر شكل(٨,١)(أ)].




**شكل(٨,١).**

ضع

$$S=\{i: v_{i-1} \in N^{-}(u)\},\ T=\{i: v_i \in N^{+}(v)\}$$

$$S'=C \cap N^{-}(u), T'=C \cap N^{+}(v)$$

سنثبت الآن أن $S \cap T=\phi$. لِيدل الرمز $C_{j,k}$ على جزء $C$ الذي يبدأ بالرأس $v_j$ وينتهي بالرأس $v_k$. إذا كان $i \in S \cap T$ فإن $C_{i,i-1}(v_{i-1},u)P(v,v_i)$ دورة موجهة طولها $l+m+1$ في $D$ ؛ وهذا يتناقض مع اختيار $C$. إذن $S \cap T=\phi$.

بما أن $P$ ممر موجه طوله أكبر ما يمكن في $D-V(C)$ فإن $N^{-}(u) \subseteq V(P) \cup V(C)$.

ولكن $|S'|=|S|$ ، إذن

$d_D^-(u)=d_P^-(u)+|S|$. بما أن $d_D^-(u)\geq\delta^-\geq\dfrac{n}{2}$ و $d_P^-(u)\leq m$ فإن $|S|\geq\dfrac{n}{2}-m$.

وبما أن $m<\dfrac{n}{2}$ فينتج أن $S\neq\phi$. بالمثل، نجد أن $|T|\geq\dfrac{n}{2}-m$ و $T\neq\phi$.

نلاحظ أن $|S|+|T|\geq n-2m$ وبما أن $n\geq l+m+1$ فينتج أن $|S|+|T|\geq l-m+1$.

ولكن $S\cap T=\phi$ ، إذن $|S\cup T|\geq l-m+1$.

إذا كان $S'=T'=\{v_r\}$ فإن $(v_r,u)P(v,v_r)$ دورة موجهة طولها $m+2$ في $D$ بينما $|S'|=|S|$ و $|T'|=|T|$ و $|S|+|T|\geq l-m+1$ تقتضي أن $l\leq m+1$ وهذا يتناقض مع اختيار $C$. وعليه فإنه يوجد عددان صحيحان موجبان $k,i$ بحيث $i\in S$ و $i+k \mod l\in T$ و $i+j \mod l\notin S\cup T$ لكل $1\leq j\leq k$. إذن

$$l-(k-1)\geq|\,S\cup T\,|\geq l-m+1$$

وينتج أن $k\leq m$. وهكذا، فإن $C_{i+k,i-1}(v_{i-1},u)P(v,v_{i+k})$ دورة موجهة طولها $l+m+1-k$ وهذا يتناقض مع اختيار $C$.

## تمارين (٨,١)

١- إذا كان $G$ رسماً بسيطًا بحيث $\delta\geq k$ فأثبت أن $G$ يحتوي على ممر طوله $k$ على الأقل. وإذا كان $k\geq2$ فأثبت أن $G$ يحتوي على دورة طولها $k+1$ على الأقل.

٢- إذا كان $D$ رسماً موجهاً فعلياً و $k=\max\{\delta^-,\delta^+\}$ فأثبت أن $D$ يحتوي على ممر موجه طوله $k$ على الأقل. وإذا كان $k>0$ فأثبت أن $D$ يحتوي على دورة موجهة طولها $k+1$ على الأقل.

## (٨,٢) رسوم المسابقة

يسمى الرسم الموجه الذي مجموعة رؤوسه $V$ **رسم مسابقة** tournament إذا تحقق ما يلي: لكل مجموعة جزئية ثنائية $\{x, y\}$ من $V$ فإن واحداً فقط من $(x, y)$ و $(y, x)$ يكون ضلعاً موجهاً في $G$.

إن إيجاد ممر موجَّه هاملتوني على وجه العموم أمر صعب عموماً؛ غير أن المبرهنة التالية تبين أن ذلك أمر سهل في حالة رسوم المسابقة.

**مبرهنة (٨,٤)**

إذا كان $G$ رسم مسابقة فإنه يوجد في $G$ ممر موجه هاملتوني.

**البرهان**

نستخدم الاستقراء الرياضي على عدد الرؤوس $n$. واضح أن المطلوب صحيح عندما $n = 1$. نفرض الآن أن كل رسم مسابقة عدد رؤوسه $n$ يحتوي على ممر موجه هاملتوني، كما نفرض أن $G$ رسم مسابقة عدد رؤوسه $n+1$. اختر أي رأس $v$ في $G$ واعتبر رسم المسابقة $G-v$ الناتج من $G$ بعد حذف $v$ وكل ضلع يكون $v$ أحد طرفيه. ينتج من فرضية الاستقراء أنه يوجد ممر موجه هاملتوني $v_1 v_2 \cdots v_n$ في $G-v$. إذا كان $(v, v_1)$ ضلعاً موجهاً في $G$ فإن $v v_1 v_2 \cdots v_n$ ممر موجه هاملتوني في $G$. نفرض الآن أن $(v_1, v)$ ضلع موجه في $G$. إذا كان $(v, v_2)$ ضلعاً موجهاً في $G$ فإن $v_1 v v_2 \cdots v_n$ ممر موجه هاملتوني في $G$؛ وخلاف ذلك فإن $(v_2, v)$ ضلع موجه في $G$. وبالاستمرار على هذا المنوال، نجد أنه إما يوجد $1 < i < n$ بحيث $v_1 v_2 \cdots v_{i-1} v v_i \cdots v_n$ ممر موجه هاملتوني في $G$ أو $v_1 v_2 \cdots v_n v$ ممر موجه هاملتوني في $G$.

**مثال (٨,١)**

نعتبر رسم المسابقة الموضح في شكل(٨,١)(ب). وننشئ، كما في إثبات مبرهنة (٨,٤)، ممراً موجهاً هاملتونيًا في $G$ بدءًا من الرأس $a$. إذا أضفنا $b$ ثم $c$ ثم $d$ فإننا نحصل على الممرات الموجهة $ba$ ، $cba$ ، $cdba$ على الترتيب.

**مبرهنة (٨,٥)**

إذا كان $G$ رسم مسابقة فإنه يوجد رأس $x$ في $G$ بحيث يمكن الوصول إلى أي رأس من $x$ بممر موجّه طوله على الأكثر $2$.

**البرهان**

ليكن $x_1$ رأساً في $G$. إذا كان $x_1$ لا يحقق المطلوب فإنه يوجد رأس $x_2$ في $G$ بحيث $(x_2,x_1)$ ضلع موجه في $G$ و $(x_2,v)$ ضلع موجه كلما كان $(x_1,v)$ ضلعاً موجهاً.

إذن $N^+(x_1)\subsetneqq N^+(x_2)$ ، وعليه فإن $d^+(x_1)<d^+(x_2)$. إذا كان $x_2$ لا يحقق المطلوب فإنه يوجد رأس $x_3$ بحيث $d^+(x_2)<d^+(x_3)$. وهكذا فإننا نحصل على متتالية من الرؤوس $x_1,x_2,\cdots$ بحيث $d^+(x_1)<d^+(x_2)<\cdots$ وبما أن $G$ منتهٍ فإنه لا بد من وجود رأس $x$ يحقق المطلوب.

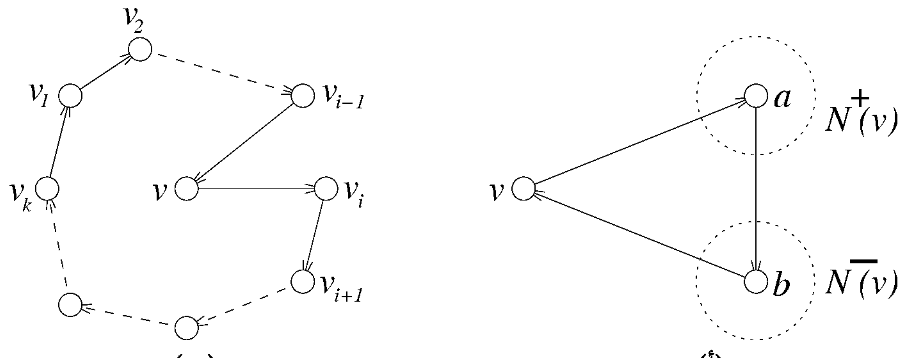
**مبرهنة (٨,٦)**

إذا كان $G$ رسم مسابقة مترابطاً بقوة وعدد رؤوسه $n$ ؛ فإنه يوجد في $G$ دورات موجهة من الأطوال $3,4,\cdots,n$. وبشكل خاص فإن $G$ رسم موجه هاملتوني.

**البرهان**

سنثبت أولاً وجود دورة موجهة ثلاثية ثم نستخدم الاستقراء الرياضي لإكمال البرهان.

ليكن $v$ رأساً في $G$. بما أن $G$ مترابط بقوة فإن $N^{-}(v) \neq \phi$ و $N^{+}(v) \neq \phi$ ؛ وبما أن $G$ رسم مسابقة فإن $N^{-}(v) \cap N^{+}(v) = \phi$. كذلك، بما أن $G$ مترابط بقوة فإنه يوجد $a \in N^{+}(v)$ و $b \in N^{-}(v)$ بحيث $(a,b)$ ضلع موجه في $G$. إذن $vabv$ دورة موجهة ثلاثية في $G$ (انظر شكل(٨,٢)(أ)).




**شكل(٨,٢).**

نفرض الآن أن $3 \leq k < n$ عدد صحيح وأن $G$ يحتوي على دورة موجهة $C: v_1 v_2 v_3 \cdots v_k v_1$ طولها $k$. سنثبت أن $G$ يحتوي على دورة موجهة طولها $k+1$.

لنفرض أولاً أنه يوجد رأس $v$ في $G$ مختلف عن رؤوس $C$ بحيث يوجد $v_r \in N^{-}(v)$ و $v_t \in N^{+}(v)$. بما أن $G$ رسم مسابقة فإنه يوجد $i$ بحيث $v_{i-1} \in N^{-}(v)$ و $v_i \in N^{+}(v)$ ؛ وعليه فإن

$$C' : v_1 v_2 \cdots v_{i-1} v v_i v_{i+1} \cdots v_k v_1$$

دورة موجهة طولها $k+1$ في $G$ (انظر شكل(٨,٢)(ب)).

نفرض الآن أنه لا يوجد أي رأس $v$ في $G$ بحيث يحقق الخاصة المذكورة أعلاه ؛ ونعرف $A, B$ كما يلي :

$$A=\left\{v \in V(G)-V(C): v \in N^{+}\left(v_{i}\right), i=1,2, \cdots, k\right\}$$
$$B=\left\{v \in V(G)-V(C): v \in N^{-}\left(v_{i}\right), i=1,2, \cdots, k\right\}$$

بما أن $G$ مترابط بقوة فإن $A \neq \phi$ و $B \neq \phi$ وبما أن $G$ رسم مسابقة فإن $A \cap B=\phi$. كذلك، بما أن $G$ مترابط بقوة فإنه يوجد $b \in B, a \in A$ بحيث $(a,b)$ ضلع موجه في $G$. إذن

$$C'': v_{1} a b v_{3} v_{4} \cdots v_{k} v_{1}$$

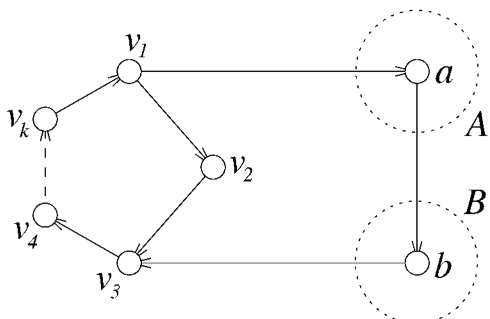
دورة موجهة طولها $k+1$ في $G$ (انظر شكل(٨,٣)).

**مبرهنة (٨,٧)**

ليكن $G$ رسم مسابقة. عندئذٍ، $G$ رسم موجه هاملتوني إذا وفقط إذا كان $G$ مترابطاً بقوة.

**البرهان**

متروك كتمرين للقارئ.




**شكل(٨,٣).**

## (٨,٣) توجيه الرسوم

نقول إن الرسم $G$ **قابل للتوجيه بقوة** strongly orientable إذا كان $G$ مترابطاً ويوجد توجيه لأضلاع $G$ بحيث يكون الرسم الموجه الناتج، $D$، مترابطاً بقوة. ويسمى $D$ **توجيهاً** orientation للرسم $G$.

**مبرهنة (٨,٨)**

يكون الرسم $G$ قابلاً للتوجيه بقوة إذا وفقط إذا كان $G$ مترابطاً ولا يحتوي على جسور.

**البرهان**

نفرض أولاً أن $G$ قابل للتوجيه بقوة. إذن يمكن توجيه أضلاع $G$ بحيث نحصل على رسم موجه مترابط بقوة $D$. بما أن $D$ مترابط بقوة فإن $G$ مترابط. لغرض الحصول على تناقض، نفرض أن الضلع $uv$ جسر في $G$ وأن $(u,v)$ ضلع موجه في $D$ بينما $(v,u)$ ليس ضلعاً موجهاً في $D$. بما أن $D$ مترابط بقوة فإنه يوجد ممر موجه $v,v_1,\cdots,v_m,u$ لا يحتوي على $(v,u)$. وعليه فإن $uv$ ضلع في الدورة $u,v,v_1,\cdots,v_m,u$ في $G$. إذن $uv$ ليس جسرًا في $G$، وهذا يعطي التناقض المطلوب.

نفرض الآن أن $G$ مترابط ولا يحتوي على جسور. بما أن $G$ لا يحتوي على جسور فإن كل ضلع في $G$ يكون محتوى في دورة. لغرض الحصول على توجيه قوي للرسم $G$ نختار أي دورة $C_1 : v_1,v_2,\cdots,v_n,v_1$ في $G$ ونوجه أضلاعها بحيث يكون $(v_i,v_{i+1})$ ضلعاً موجهاً لكل $1 \le i \le n-1$ كما يكون $(v_n,v_1)$ ضلعاً موجهاً. كذلك، نوجه أقطار الدورة $C_1$ إن وجدت (أي، الأضلاع التي تصل رؤوسًا غير متعاقبة في $C_1$) اختياريًا. ليكن $D_1$ الرسم الموجه الناتج من

الرسم الجزئي المحدث $\langle V(C_1)\rangle$ من $G$ بعد توجيه الأضلاع كما وصف أعلاه. إذن $v_1,v_2,\cdots,v_n,v_1$ دورة موجهة هاملتونية في $D_1$، وعليه فإن $D_1$ مترابط بقوة ويكون $G$ قابلاً للتوجيه بقوة عندما $V(C_1)=V(G)$.

نفرض الآن أن $V(C_1)\neq V(G)$. بما أن $G$ مترابط فإنه يوجد رأس $\omega_1$ لا ينتمي إلى $V(C_1)$ ويوجد $v_j$ بحيث يكون $\omega_1 v_j$ ضلعاً في $G$. بما أن $\omega_1 v_j$ ليس جسرًا في $G$ فإنه محتوى في دورة $C_2 : \omega_1, v_j = \omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_m, \omega_1$ في $G$. نقوم الآن بتوجيه الأضلاع التي لم يتم توجيهها سابقًا في الرسم الجزئي المحدث $\langle V(C_1)\cup V(C_2)\rangle$ من $G$ بحيث يتحقق ما يلي: $(\omega_1,\omega_2)$ ضلع موجه، $(\omega_m,\omega_1)$ ضلع موجه، لكل $i=2,3,\cdots,m-1$ فإن كل ضلع $\omega_i\omega_{i+1}$ لم يتم توجيهه سابقًا يوجه بحيث يكون $(\omega_i,\omega_{i+1})$ ضلعاً موجهاً، يوجه اختياريًا كل ضلع آخر لم يتم توجيهه سابقًا. ليكن $D_2$ الرسم الموجه الناتج من $\langle V(C_1)\cup V(C_2)\rangle$ بعد توجيه الأضلاع كما وصف أعلاه. ولبيان أن $D_2$ مترابط بقوة ننشئ فيما يلي مسارًا موجهاً مغلقًا مولِّدًا لِـ $D_2$. نبدأ الإنشاء باعتبار المسار الموجه المغلق $W_1 : v_1,v_2,\cdots,v_n,v_1$. ننشئ الآن مسارًا موجهاً مغلقًا $W_2$ كما يلي: نبدأ بـ $\omega_1,\omega_2$ ولكل $2\le i\le m-1$ نضيف $\omega_i,\omega_{i+1}$ عندما يكون $(\omega_i,\omega_{i+1})$ ضلعاً موجهاً في $D_2$ بينما نضيف ممراً موجهاً من $\omega_i$ إلى $\omega_{i+1}$ محتوى في $D_1$ عندما لا يكون $(\omega_i,\omega_{i+1})$ ضلعاً موجهاً في $D_2$؛ ثم نضيف $\omega_m,\omega_1$. نقوم الآن بتوسعة $W_1$ وذلك بإضافة $W_2$ إليه عند الرأس $v_j=\omega_2$ فنحصل على $W_3$ وهو مسار موجه مغلق مولد لِـ $D_2$. وعليه فإن $D_2$ مترابط بقوة ويكون $G$ قابلاً للتوجيه بقوة عندما $V(C_1)\cup V(C_2)=V(G)$.

وختامًا، إذا كان $V(C_1)\cup V(C_2)\neq V(G)$ فإن تكرار العملية المتبعة أعلاه كلما لزم الأمر يؤدي إلى الحصول على رسم موجه مترابط بقوة $D$ بحيث $V(D)=V(G)$؛ وعليه فإن $G$ قابل للتوجيه بقوة. □

نقدم فيما يلي بعض التعريفات والنتائج التي نحتاج إليها في ختام هذا البند لكي نقدم خوارزمية جيدة لإيجاد توجيهات للرسوم المترابطة التي لا تحتوي على جسور. لتكن $T$ شجرة تقصٍ عمقي للرسم $G$ ولتكن $v_1,v_2,\ldots,v_n$ هي رؤوس $T$. نسمي $v_1,v_2,\ldots,v_n$ **ترقيماً عمقياً** depth first numbering لِـ $G$ كما نسمي $k$ **الدليل العمقي** depth first index للرأس $v_k$ ونكتب $DFI(v_k)=k$. إذا كان $j$ هو أكبر دليل بحيث يوجد ممر من $v_i$ إلى $v_j$ في الشجرة $T$ فإننا نسمي $j$ **دليل الوصول العمقي** depth first reach index للرأس $v_i$ ونكتب $DRI(v_i)=j$. إذا أضيف الرأس $w$ عند الرأس $v$ فإننا نسمي $v$ **المرجع المباشر** immediate predecessor لِـ $w$ ونكتب $p(v)=w$.

إذا وُجِّه كل ضلع في $T$ من طرفه ذي الدليل العمقي الأصغر إلى طرفه ذي الدليل العمقي الأكبر فإننا نحصل على شجرة موجهة $T'$. وإذا كان $v_{i_1},v_{i_2},\ldots,v_{i_r}$ ممراً موجهاً في $T'$ فإن كلاً من $v_{i_2},v_{i_3},\ldots,v_{i_r}$ يسمى **تابعاً** successor لِـ $v_{i_1}$ ويسمى $v_{i_2}$ **تابعاًمباشراً** immediate successor لِـ $v_{i_1}$.

**تمهيدية (٨,١)**

لتكن $T$ شجرة تقصٍ عمقي للرسم $G$ وليكن $v_1,v_2,\ldots,v_n$ ترقيماً عمقياً لِـ $G$. إذا كان $j$ دليل الوصول العمقي للرأس $v_i$ فإن توابع $v_i$ في $T$ هي $v_{i+1},v_{i+2},\ldots,v_j$.

**البرهان**

واضح من طريقة إنشاء $T$ أن $v_k$ ليس تابعاً لِـ $v_i$ لكل $k > j$ ولكل $k < i+1$. لغرض الحصول على تناقض افرض أن $i+1 \le m < j$ أصغر دليل بحيث $v_m$ ليس تابعاً لِ $v_i$. عليه، $p(v_m) = v_r$ حيث $r < i$. إذن من طريقة إنشاء $T$ يتضح أنه إذا كان $v_h$ مجاوراً لأي من الرؤوس $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{m-1}$ فإن $h < i$. وهذا يناقض كون $v_j$ تابعاً لِـ $v_i$ يقتضي وجود رأس $v_t$ مجاور لأحد الرؤوس $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{m-1}$ بحيث $t > i$. إذن، لكل $i+1 \le k \le j$ ، $v_k$ تابع لِـ $v_i$.

**مبرهنة (٨,٩)**

لتكن $T$ شجرة تقصٍ عمقي للرسم $G$ وليكن $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ترقيماً عمقياً لِـ $G$. ليكن $v_h v_i$ ضلعاً في $G$ بحيث $h < i$ وليكن $j$ دليل الوصول العمقي للرأس $v_i$. عندئذٍ، $v_h v_i$ جسر في $G$ إذا وفقط إذا كان كل من الرؤوس $v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_j$ ليس مجاوراً في $G$ لأي رأس $v_k$ بحيث $k < i$ والرأس $v_i$ ليس مجاوراً في $G$ لأي رأس $v_t$ بحيث $h \ne t < i$.

**البرهان**

بناءً على تمهيدية(٨,١) فإن توابع $v_i$ في $T$ هي $v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_j$. ليكن $v_h v_i$ جسراً في $G$ ولتكن $G_1, G_2$ مركبتي $G - v_h v_i$ بحيث $v_h$ رأس في $G_1$ و $v_i$ رأس في $G_2$. إذن توابع $v_i$ رؤوس في $G_2$ بينما $v_1, v_2, \ldots, v_h, \ldots, v_{i-1}$ رؤوس في $G_1$ وعليه يتحقق المطلوب.

لإثبات الاتجاه الآخر ولغرض الحصول على تناقض نفرض أن $v_h v_i$ ليس جسراً في $G$. إذن يوجد ممر $v_i, v_{k_1}, v_{k_2}, \ldots, v_{k_m}, v_h$ في $G$ لا يحتوي على الضلع

$v_h v_i$. إذا كـان $v_{k_1}$ لـيس تابعـاً لــ $v_i$ فـإن $v_i$ مجـاور للـرأس $v_{k_1}$ في $G$ و $h \neq k_1 < i$ وهذا تناقض. بينما إذا كان $v_{k_1}$ تابعاً لِـ $v_i$ فإن $v_{k_r}$، حيث $r$ أكبر دليل بحيث $v_{k_r}$ تابع لِـ $v_i$، يعطينا التناقض المطلوب.

**خوارزمية (٨,١) (خوارزمية إنشاء توجيه)**

**المدخل:** رسم مترابط $G$ بدون جسور.

**المخرج:** توجيه للرسم $G$.

**الخوارزمية**

١- اختر رأساً $x$ في $G$ وأنشئ شجرة تقصٍ عمقي $T$ لِـ $G$ جذرها $x$.

٢- وجِّه كل ضلع في $T$ من طرفه ذي الدليل العمقي الأصغر إلى طرفه ذي الدليل العمقي الأكبر.

٣- وجِّه كل ضلع ليس في $T$ من طرفه ذي الدليل العمقي الأكبر إلى طرفه ذي الدليل العمقي الأصغر.

**مبرهنة (٨,١٠)**

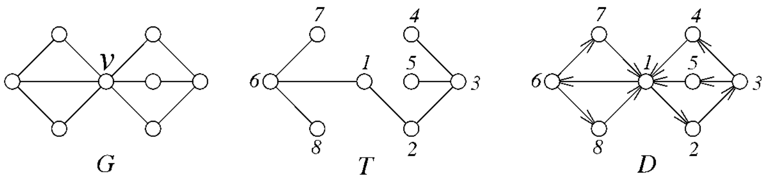
خوارزمية (٨,١) تعطي توجيهاً للرسم $G$.

**البرهان**

ليكن $v_1, v_2, \ldots, v_n$ الترقيم العمقي المصاحب للشجرة $T$. ينتج من مبرهنة (٨,٩) أنه لكل رأس $v_i \neq v_1$ يوجد رأس $v_k$ بحيث $k < i$ و $v_k v_i$ ضلع في $G$ أو يوجد تابع $v_r$ لِـ $v_i$ بحيث $v_k v_r$ ضلع في $G$. إذن يوجد ممر موجه من $v_i$ إلى $v_1$. ولكن يوجد ممر أضلاعه في $T$ من $v_1$ إلى أي رأس آخر، وعليه يوجد ممر موجه من أي رأس إلى أي رأس آخر. وعليه نحصل على رسم مترابط بقوة. أي، نحصل على توجيه للرسم $G$.

**مثال (٨,٢)**

في شكل(٨,٤)، بتطبيق خوارزمية (٨,١) على الرسم $G$ بدءاً من الجذر $v$ نحصل أولاً على الشجرة $T$ ومن ثم نحصل على توجيه $D$ للرسم $G$ حيث عُلّم كل من الرؤوس بدليله العمقي.

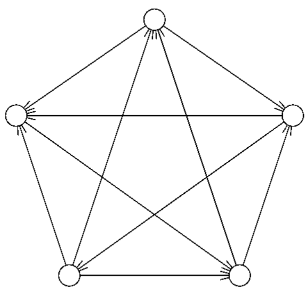



**شكل(٨,٤).**

## تمارين (٨,٢)

١- أعط مثالاً لرسم موجه نصف هاملتوني بحيث لا يكون رسم مسابقة.

٢- جد ممراً موجهاً هاملتونيًا في رسم المسابقة المعطى في شكل(٨,٥).



**شكل(٨,٥).**

٣- إذا كان $G$ رسم مسابقة وكان $x$ رأساً في $G$ بحيث $d^{+}(x)=\Delta^{+}(G)$ فأثبت أنه يمكن الوصول إلى أي رأس من $x$ بممر موجه طوله على الأكثر 2 .

٤- أثبت مبرهنة (٨,٧).

٥- إذا كان $G$ رسم مسابقة فأثبت أن $\sum_{v\in V}\left(d^{+}(v)\right)^{2}=\sum_{v\in V}\left(d^{-}(v)\right)^{2}$.

٦- ليكن $G$ رسم مسابقة. نقول إن $G$ متعدٍ إذا تحقق ما يلي : كلما كان $(x,y)$ و $(y,z)$ ضلعين موجهين في $G$ فإن $(x,z)$ ضلع موجه في $G$.

(أ) أثبت أنه إذا كان $G$ رسم مسابقة عدد رؤوسه $n>1$ ويحتوي على دورة موجهة فإن $G$ غير متعدٍ.

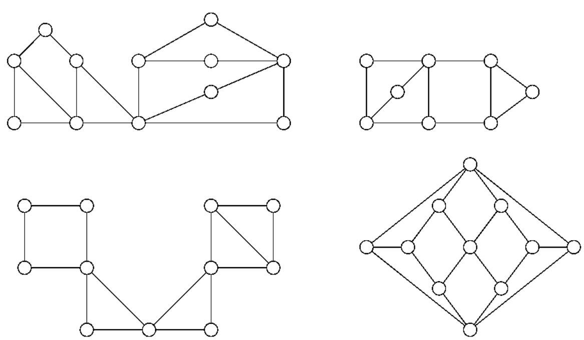
(ب) أثبت أنه إذا كان $G$ رسم مسابقة ولا يحتوي على دورات موجهة فإن $G$ متعدٍ.

(جـ) أثبت أنه إذا كان $G$ رسم مسابقة فإن $G$ يكون متعديًا إذا وفقط إذا كان $G$ لا يحتوي على دورات موجهة ثلاثية.

(د) أثبت أنه إذا كان $G$ رسم مسابقة فإن $G$ يكون متعديًا إذا وفقط إذا كان $G$ يحتوي على ممر موجه هاملتوني وحيد.

(هـ) أثبت أنه إذا كان $G$ رسم مسابقة متعدٍ عدد رؤوسه $n\geq 2$ فإن $G$ غير مترابط بقوة.

٧- بيّن أنه يوجد توجيه لكل رسم من الرسوم الموضحة في شكل(٨,٦)، ثم جد توجيهاً له.



شكل(٨,٦).