

## الكسور المستمرة، الجذور التربيعية،

### ومعادلة بل

#### Continued Fractions, Square Roots, and Pell's Equation

الكسر المستمر للعدد  $\sqrt{2}$  ،

$$[1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots]$$

هو كسر تكراري. دعنا نرى فيما إذا كنا نستطيع إثبات أن الكسر المستمر للعدد  $\sqrt{2}$  يحوي العدد 1 متبوعاً تماماً بالأعداد 2.

حيث إن  $\sqrt{2} = 1,414\dots$  ، فإن الخطوة الأولى في خوارزمية الكسر المستمر

هي كتابة:

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{1/(\sqrt{2} - 1)}$$

ثم نطق المقام:

$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}^2 - 1} = \sqrt{2} + 1$$

بتعويض هذه القيمة في المعادلة السابقة ينتج أن :

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

العدد  $\sqrt{2} + 1$  يقع بين 2 , 3 لذلك سنكتبه على الشكل :

$$\sqrt{2} + 1 = 2 + (\sqrt{2} - 1) = 2 + \frac{1}{1/(\sqrt{2} + 1)}$$

ولكننا رأينا أن  $1/(\sqrt{2} - 1)$  يساوي  $\sqrt{2} + 1$  لذلك نجد أن :

$$\sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \dots\dots\dots (*)$$

وعليه فإن :

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}}$$

الآن يمكننا استخدام الصيغة (\*) مرة أخرى لنحصل على :

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}}}$$

وباستخدامها مرة أخرى نحصل على :

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}}}}$$

بالاستمرار في توظيف الصيغة (\*)، نجد أن الكسر المستمر للعدد  $\sqrt{2}$  يضم العدد 1 الوحيد متبوعاً تماماً بالأعداد 2.

نجاحنا مع العدد  $\sqrt{2}$  يدفعنا لطرح السؤال التالي، هل نستطيع إيجاد أعداد أخرى كسورها المستمرة تكون تكرارية بنفس الأسلوب (أو، باستخدام المصطلحات الرياضية، أي الكسور المستمرة هي كسور دورية *periodic*)؟

إذا قمت بحل تمرين 39.10 الذي طلب منك أن تحسب الكسر المستمر للعدد  $\sqrt{D}$  للقيم  $D = 2, 3, 4, \dots, 20$ ، فقد أوجدت بعض الأمثلة. يجمع بيانات أكثر من هذا النوع، يعرض الجدول 40.1 قائمة بالكسور المستمرة للعدد  $\sqrt{p}$  لجميع الأعداد الأولية  $p$  الأقل من 40.

دعنا نعود إلى السؤال السابق ونسأل: متى تكون الكسور المستمرة تكرارية؟ لنبدأ بمثال بسيط. لنفرض أن الكسر المستمر للعدد  $A$  هو:

$$A = [a, b, b, b, b, b, \dots]$$

جدول 40.1 يضم عدة أعداد من هذا النوع. مثل  $\sqrt{2}$ ،  $\sqrt{5}$ ،  $\sqrt{37}$ . يمكننا كتابة  $A$  على الشكل:

$$A = a + \frac{1}{[b, b, b, b, \dots]}$$

إذن فعلياً نحن نحتاج لتحديد قيمة الكسر المستمر:

$$B = [b, b, b, b, b, b, \dots]$$

الجدول رقم (١، ٤). الكسور المستمرة لكسور تربيعية.

$D$	الكسر المستمر للعدد $\sqrt{D}$	الدورة
2	$[1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots]$	1
3	$[1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, \dots]$	2
5	$[2, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, \dots]$	1
7	$[2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, \dots]$	4
11	$[3, 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6, \dots]$	2
13	$[3, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, \dots]$	5
17	$[4, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, \dots]$	1
19	$[4, 2, 1, 3, 1, 2, 8, 2, 1, 3, 1, 2, 8, 2, 1, 3, 1, 2, 8, \dots]$	6
23	$[4, 1, 3, 1, 8, 1, 3, 1, 8, 1, 3, 1, 8, 1, \dots]$	4
29	$[5, 2, 1, 1, 2, 10, 2, 1, 1, 2, 10, 2, 1, 1, 2, 10, 2, 1, 1, \dots]$	5
31	$[5, 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10, 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10, 1, 1, \dots]$	8
37	$[6, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, \dots]$	1

تماماً كما فعلنا مع  $A$  ، يمكننا سحب المُدخّل الأول للعدد  $B$  ومن ثم

نكتب  $B$  على الشكل :

$$B = b + \frac{1}{[b, b, b, b, \dots]}$$

لكن المقام هو العدد  $B$  نفسه ، إذن :

$$B = b + \frac{1}{B}$$

بضرب طرفي المعادلة بالعدد  $B$  نحصل على  $B^2 = bB + 1$  وباستخدام القانون العام نجد أن:

$$B = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4}}{2}$$

(لاحظ أننا استخدمنا الإشارة الموجبة لأننا نريد أن يكون  $B$  موجباً). والآن نحسب قيمة  $A$ ،

$$\begin{aligned} A &= a + \frac{1}{B} = a + \frac{2}{b + \sqrt{b^2 + 4}} \\ &= a + \frac{2}{b + \sqrt{b^2 + 4}} \cdot \left( \frac{b - \sqrt{b^2 + 4}}{b - \sqrt{b^2 + 4}} \right) \\ &= a - \frac{b - \sqrt{b^2 + 4}}{2} \\ &= \frac{2a - b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 + 4}}{2} \end{aligned}$$

سنلخص حساباتنا بحالتين لهما أهمية خاصة جداً.

نتيجة (٤٠، ١)

لأي عددين صحيحين موجبين  $a, b$ ، فلدينا صيغة الكسر المستمر التالية:

$$\frac{2a - b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 + 4}}{2} = [a, b, b, b, b, b, b, \dots]$$

بأخذ  $a = b$  كحالة خاصة نحصل على الصيغة:

$$\frac{b + \sqrt{b^2 + 4}}{2} = [b, b, b, b, b, b, b, \dots]$$

وبأخذ  $b = 2a$  نحصل على الصيغة

$$\sqrt{a^2 + 1} = [a, 2a, 2a, 2a, 2a, 2a, 2a, 2a, \dots]$$

ماذا يحدث لو أن لدينا كسراً مستمراً تكرريراً بأسلوب أكثر تعقيداً؟ لنعطي مثلاً. افترض أن  $A$  له الكسر المستمر التالي :

$$A = [1, 2, 3, 4, 5, 4, 5, 4, 5, 4, 5, \dots]$$

حيث الحدود اللاحقة تستمر بالتبديل بين 4 و 5. أول شيء يجب عمله هو أن ندفع خارجاً الجزء غير التكراري ،

$$A = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{[4, 5, 4, 5, 4, 5, 4, 5, \dots]}}}$$

لذلك فنحن نحتاج الآن لمعرفة قيمة الكسر المستمر "الدوري تماماً" (Purely Periodic) :

$$B = [4, 5, 4, 5, 4, 5, 4, 5, \dots]$$

(يسمى الكسر المستمر "دورياً تماماً" (Purely Periodic) إذا بدأ تكراري من البداية). يمكننا كتابة  $B$  على الشكل :

$$B = 4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{[4, 5, 4, 5, 4, 5, 4, 5, \dots]}}$$

كما رأينا في مثالنا السابق ، فقد عرفنا أن أدنى مقام يساوي  $B$  ، إذن فقد بينا

أن :

$$B = 4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{B}}$$

الآن سنقوم بتبسيط هذا الكسر المعقد لنحصل على معادلة في  $B$  ،

$$\begin{aligned} B &= 4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{B}} = 4 + \frac{1}{\frac{5B+1}{B}} \\ &= 4 + \frac{B}{5B+1} \\ &= \frac{21B+4}{5B+1} \end{aligned}$$

بضرب الطرفين بالوسطين، وينقل جميع الحدود على طرف واحد، نحصل

على المعادلة:

$$5B^2 - 20B - 4 = 0$$

وباستخدام الصيغة التربيعية العامة نحصل على:

$$\begin{aligned} B &= \frac{20 + \sqrt{400 + 80}}{10} \\ &= \frac{10 + 2\sqrt{30}}{5} \end{aligned}$$

بعد ذلك نجد قيمة  $A$  بتعويض قيمة  $B$  في صيغتنا السابقة وباستخدام بعض

العمليات الجبرية.

$$\begin{aligned}
 A &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{B}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{10 + 2\sqrt{30}}{5}}}} \\
 &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{5}{10 + 2\sqrt{30}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{35 + 6\sqrt{30}}{10 + 2\sqrt{30}}}} \\
 &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{10 + 2\sqrt{30}}{35 + 6\sqrt{30}}} = 1 + \frac{1}{\frac{80 + 14\sqrt{30}}{35 + 6\sqrt{30}}} \\
 &= 1 + \frac{35 + 6\sqrt{30}}{80 + 14\sqrt{30}} = \frac{115 + 20\sqrt{30}}{80 + 14\sqrt{30}}
 \end{aligned}$$

أخيراً، ننتقل مقام  $A$  بضرب البسط والمقام بالمقدار  $80 - 14\sqrt{30}$ ،

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{115 + 20\sqrt{30}}{80 + 14\sqrt{30}} \cdot \left( \frac{80 - 14\sqrt{30}}{80 - 14\sqrt{30}} \right) \\
 &= \frac{800 - 10\sqrt{30}}{520} = \frac{80 - \sqrt{30}}{52}
 \end{aligned}$$

إذا قمت بملء تمرين 39.9، فحاول إدخال القيمة التالية إلى برنامجك:

$$\frac{80 - \sqrt{30}}{52} = 1.433130277402852670489\dots$$

وتأكد من أنك حصلت في الحقيقة على الكسر المستمر

$$[1, 2, 3, 4, 5, 4, 5, 4, 5, \dots]$$

يسمى الكسر المستمر "دورياً" (*Periodic*) إذا كان على الشكل:

$$\left[ \underbrace{a_1, a_2, \dots, a_\ell}_{\text{initial part}}, \underbrace{b_1, b_2, \dots, b_m}_{\text{periodic part}}, \underbrace{b_1, b_2, \dots, b_m}_{\text{periodic part}}, \underbrace{b_1, b_2, \dots, b_m}_{\text{periodic part}}, \dots \right]$$

بمعنى آخر، يكون دورياً إذا ضم بعد بعض الحدود الابتدائية متتالية منتهية من الحدود تتكرر مرة بعد مرة. عدد الحدود التي تكرر  $m$  يسمى "الدورة" (Period). فمثلاً،  $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \dots]$  دورته 1  $\sqrt{23} = [4, 1, 3, 1, 8, 1, 3, 1, 8, \dots]$  دورته 4. أمثلة أخرى معطاة في الجدول 40.1. في الكسور التكرارية، نضع شريطاً صغيراً "-" فوق الجزء المكرر للإشارة إلى أن هذا الجزء يتكرر بشكل لا نهائي، مثلاً:

$$\sqrt{2} = [1, \overline{2}], \quad \sqrt{23} = \left[ 4, \overline{1, 3, 1, 8} \right], \quad \frac{80 - \sqrt{30}}{52} = \left[ 1, 2, 3, \overline{4, 5} \right]$$

بنفس الأسلوب، الكسر المستمر الدوري العام يكتب على الشكل:

$$\left[ a_1, a_2, \dots, a_\ell, \overline{b_1, b_2, \dots, b_m} \right]$$

الأمثلة التي رأيناها تشير إلى أن النظرية التالية قد تكون صحيحة. سنبرهن الجزء الأول ونترك الجزء الثاني كتمرين (تحدي).

**نظرية (٢، ٤٠).** (نظرية الكسر المستمر الدوري)

(a) افرض أن العدد  $A$  له كسر مستمر دوري

$$A = \left[ a_1, a_2, \dots, a_\ell, \overline{b_1, b_2, \dots, b_m} \right]$$

عندئذ فإن  $A$  يساوي عدداً على الشكل  $A = \frac{r+s\sqrt{D}}{t}$ ، حيث

$r, s, t, D$  أعداد صحيحة و  $D > 0$ .

(b) ليكن  $r, s, t, D$  أعداداً صحيحة و  $D > 0$ ، فإن العدد:

$$\frac{r+s\sqrt{D}}{t}$$

له كسر مستمر دوري.

البرهان

(a) لنبدأ بالكسر المستمر الدوري تماماً :

$$B = \left[ b_1, b_2, \dots, b_m \right]$$

إذا قمنا بكتابة أول  $m$  خطوة ، فسنجد أن :

$$B = b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{b_m + \frac{1}{\left[ b_1, b_2, \dots, b_m \right]}}}} = b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{b_m + \frac{1}{B}}}}$$

نسط الآن الطرف أيمن من خلال تكرار عملية تجميع الحدود وقلب الكسور، حيث إننا نتعامل مع  $B$  كمتغير ومع القيم  $b_1, \dots, b_m$  كأعداد. بعد الكثير من الجبر تصبح معادلتنا على الشكل :

$$B = \frac{uB+v}{wB+z} \dots\dots\dots (*)$$

حيث  $u, v, w, z$  أعداد صحيحة تعتمد قيمها على القيم  $b_1, b_2, \dots, b_m$ . كما أنه من الواضح أن الأعداد  $u, v, w, z$  جميعها موجبة ؛ لأن القيم  $b_1, b_2, \dots, b_m$  موجبة.

لتوضيح هذا الإجراء ، سوف ننجز الحالة  $m = 2$ .

$$b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{B}} = b_1 + \frac{1}{\frac{b_2 B + 1}{B}} = b_1 + \frac{B}{b_2 B + 1}$$

$$= \frac{(b_1 b_2 + 1)B + b_1}{b_2 B + 1}$$

بالعودة إلى الحالة العامة ، نضرب طرفي المعادلة (\*) في وسطها ونجعل جميع الحدود في طرف واحد ، نحصل على المعادلة

$$w B^2 + (z - u) B - v = 0$$

نحصل من الصيغة التربيعية العامة على :

$$B = \frac{-(z - u) + \sqrt{(z - u)^2 + 4vw}}{2w}$$

إذن  $B$  على الشكل :

$$B = \frac{i + j\sqrt{D}}{k} \text{ ، حيث } i, j, k, D \text{ أعداد صحيحة و } D > 0$$

بالعودة إلى عددنا الأصلي  $A = \left[ a_1, a_2, \dots, a_\ell, \overline{b_1, b_2, \dots, b_m} \right]$  ، يمكننا

كتابة  $A$  على الشكل :

$$A = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_\ell + \frac{1}{B}}}} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_\ell + \frac{1}{\frac{i + j\sqrt{D}}{k}}}}}$$

مرة أخرى ، بتكرار القلب والتجميع والتبسيط ، يمكننا كتابة  $A$  على الشكل :

$$A = \frac{e+f\sqrt{D}}{g+h\sqrt{D}} \text{ ، حيث } e, f, g, h \text{ أعداد صحيحة.}$$

أخيراً، نضرب كل من البسط والمقام بالمقدار  $g - h\sqrt{D}$ . بذلك ننطق المقام

$$\text{ونعبر عن } A \text{ كعدد على الشكل } A = \frac{r+s\sqrt{D}}{t} \text{ ، حيث } r, s, t \text{ أعداد صحيحة.}$$

بذلك نكون قد أكملنا برهان الجزء (a) من نظرية 40.2 نظرية الكسر المستمر

الدوري. برهان الجزء (b) يترك لك كتمرين (تحدي) تمرين 40.10.

### الكسر المستمر للعدد $\sqrt{D}$ ومعادلة بِلْ

الأعداد المتقاربة لكسر مستمر شكلت قائمة من أعداد نسبية تصبح أقرب

فأقرب للعدد الأصلي. على سبيل المثال، العدد  $\sqrt{71}$  له الكسر المستمر:

$$\sqrt{71} = \left[ 8, \overline{2, 2, 1, 7, 1, 2, 2, 16} \right]$$

وأعداد المتقاربة القليلة الأولى هي:

$$\frac{17}{2}, \frac{42}{5}, \frac{59}{7}, \frac{455}{54}, \frac{514}{61}, \frac{1483}{176}, \frac{3480}{413}, \frac{57163}{6784}, \frac{117806}{13981}, \frac{292775}{34746}$$

إذا كان  $p/q$  متقارباً للعدد  $\sqrt{D}$ ، فإن:

$$\frac{p^2}{q^2} \approx \sqrt{D} \text{ ، إذن } \frac{p}{q} \approx \sqrt{D}$$

الجدول رقم (٢، ٤٠). المقاربات  $p/q$  للعدد  $\sqrt{71}$ .

$p$	$q$	$p^2 - 71q^2$
17	2	5
42	5	-11
59	7	2
455	54	-11
514	61	5
1483	176	-7
3480	413	1
57163	6784	-7
117806	13981	5
292775	34746	-11

بالضرب في  $q^2$ ، نتوقع أن يكون  $p^2$  قريباً جداً من  $Dq^2$ . جدول 40.2 يُدرج قيم الفرق  $p^2 - Dq^2$  للأعداد المتقاربة القليلة الأولى للعدد  $\sqrt{71}$ . من بين العديد من الميزات التي تُميز البيانات في جدول 40.2، نجد ظهور العدد 1 في العمود الأخير. وهو يظهر في الصف السابع ويعكس الحقيقة التالية:

$$3480^2 - 71 \cdot 413^2 = 1$$

لذلك؛ فالمتقارب  $3480/413$  للعدد  $\sqrt{71}$  يعطي الحل (3480, 413) لمعادلة

بِلْ:

$$x^2 - 71y^2 = 1$$

إن هذا يشير إلى صلة بين المقاربات للعدد  $\sqrt{D}$  ومعادلة بِلْ  $x^2 - 71y^2 = 1$ .  
في الفصلين الثلاثون والثاني والثلاثون برهنا أن معادلة بِلْ :

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

دائماً لها حل. لكن إذا نظرت للوراء في الفصل الثاني والثلاثون، ستري أن برهاننا لم يزودنا بطريقة فعّالة لإيجاد حل. لذلك فمن المفيد جداً إذا أمكن استخدام مقاربات  $\sqrt{D}$  لنحسب بطريقة فاعلة حل لمعادلة بِلْ.  
الكسر المستمر للعدد  $\sqrt{71}$  :

$$\sqrt{71} = \left[ 8, \overline{2, 2, 1, 7, 1, 2, 2, 16} \right]$$

دورته 8 ، والمقارب الذي يعطي حلاً لمعادلة بِلْ هو :

$$[8, 2, 2, 1, 7, 1, 2, 2] = \frac{3480}{413}$$

فحص بسيط لجدول 40.1 يبين أن الكسور المستمرة للجذور التربيعية  $\sqrt{D}$  فيه الكثير من الميزات الخاصة<sup>(١)</sup>. هنا بعض الأمثلة الإضافية لكسور مستمرة دوراتها كبيرة إلى حد ما.

$$\text{دورته } 7 = \sqrt{73} = \left[ 8, \overline{1, 1, 5, 5, 1, 1, 16} \right]$$

$$\text{دورته } 5 = \sqrt{89} = \left[ 9, \overline{2, 3, 3, 2, 18} \right]$$

$$\text{دورته } 11 = \sqrt{97} = \left[ 9, \overline{1, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 18} \right]$$

(١) تمرين 40.9 يصف خصائص خاصة ومتنوعة للكسر المستمر للعدد  $\sqrt{D}$ ، لكن قبل أن تنظر إلى ذلك التمرين، يجب أن تحاول اكتشاف بعض هذه الخصائص بنفسك.

بالنسبة للعدد  $D = 71$ ، المتقارب الذي حل معادلة بِلْ كان المتقارب الذي حصلنا عليه بإزالة ما فوقه خط وإسقاط آخر مُدْخِل. لنحاول عمل نفس الشيء للأعداد  $D = 73$ ،  $D = 89$ ،  $D = 97$ . النتائج مبينة في الجدول 40.3.

الجدول رقم (٣، ٤٠). مقاربات للعدد  $\sqrt{D}$  ومعادلة بِلْ.

$\sqrt{D}$	$[a, b_1, b_2, \dots, b_{m-1}] = \frac{p}{q}$	$p^2 - Dq^2$
$\sqrt{71}$	$[8, 2, 2, 1, 7, 1, 2, 2] = \frac{3480}{413}$	$3480^2 - 71 \cdot 413^2 = 1$
$\sqrt{73}$	$[8, 1, 1, 5, 5, 1, 1] = \frac{1068}{125}$	$1068^2 - 73 \cdot 125^2 = -1$
$\sqrt{79}$	$[8, 1, 7, 1] = \frac{80}{9}$	$80^2 - 79 \cdot 9^2 = 1$
$\sqrt{97}$	$[9, 1, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1] = \frac{5604}{569}$	$5604^2 - 97 \cdot 569^2 = -1$

إن هذا يُعَدُّ بالكثير. صحيح أننا لم نحصل على حلول لمعادلة بِلْ في جميع الحالات، لكننا إما أن نحصل على حل لمعادلة بِلْ  $p^2 - Dq^2 = 1$  وإما حل للمعادلة المشابهة  $p^2 - Dq^2 = -1$ . علاوة على ذلك، حصلنا على إشارة موجبة عندما تكون دورة  $\sqrt{D}$  زوجية، وعلى إشارة سالبة عندما تكون دورة  $\sqrt{D}$  فردية. سنوُجِز ملاحظتنا في النظرية الرائعة التالية.

نظرية (٣، ٤٠)

ليكن  $D$  عدداً صحيحاً موجباً ليس مربعاً كاملاً. اكتب الكسر المستمر للعدد

$\sqrt{D}$  على الشكل

$$\frac{p}{q} = [a, b_1, b_2, \dots, b_{m-1}] \text{ وليكن } \sqrt{D} = [a, \overline{b_1, b_2, \dots, b_{m-1}, b_m}]$$

عندئذ فإن  $(p, q)$  هو أصغر حل في الأعداد الصحيحة للمعادلة.

$$p^2 - Dq^2 = (-1)^m$$

لن نعطي البرهان على نظرية (٤٠،٣)، لأننا بذلك سنهني نقاشنا عن الكسور المستمرة ونتحول لمناقشة مواضيع أخرى. إذا كنت مهتماً بقراءة البرهان، فستجده في الفصل 4 من كتاب "الحساب الأعلى" (The Higher Arithmetic) لمؤلفه "Davenport" وفي الكثير من كتب نظرية الأعداد الأخرى. وبدلاً من إعطاء برهان سوف نختتم بملاحظة ومثال.

ملاحظتنا تقوم على مسألة حل  $x^2 - Dy^2 = 1$  عندما تتحقق شروط نظرية 40.3 لإعطاء حل للمعادلة  $x^2 - Dy^2 = -1$ . بكلمات أخرى، ماذا يمكننا أن نعمل عندما  $\sqrt{D} = [a, \overline{b_1, b_2, \dots, b_{m-1}, b_m}]$  و  $m$  فردي؟ لقد مر معنا الجواب خلال عملنا السابق. تذكّر أن نظرية معادلة بل 30.1 تقول إنه إذا كان  $(x, y)$  هو أصغر حل للمعادلة  $x^2 - Dy^2 = 1$  في مجموعة الأعداد الصحيحة، فإن أي حل آخر  $(x_k, y_k)$  يمكن حسابه من أصغر حل من خلال الصيغة

$$x_k + y_k \sqrt{D} = (x_1 + y_1 \sqrt{D})^k, \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (*)$$

السبب وراء أن هذه الصيغة قابلة للتطبيق هو لأن:

$$\begin{aligned} x_k^2 - D y_k^2 &= (x_k + y_k \sqrt{D})(x_k - y_k \sqrt{D}) \\ &= (x_1 + y_1 \sqrt{D})^k (x_1 - y_1 \sqrt{D})^k \\ &= (x_1^2 - D y_1^2)^k \end{aligned}$$

$$=1 \quad x_1^2 - Dy_1^2 = 1 \quad \text{لأن}$$

بدلاً من ذلك افترض أن  $(x_1, y_1)$  هو حل للمعادلة  $x^2 - Dy^2 = -1$  ونريد

حساب  $(x_k, y_k)$  باستخدام الصيغة (\*). عندئذ نحصل على :

$$x_k^2 - D y_k^2 = (x_1^2 - D y_1^2)^k = (-1)^k$$

لذلك إذا كان  $k$  زوجياً، فإننا نحصل على حل للمعادلة بِلْ  $x^2 - Dy^2 = 1$ .

هل رأيت كيف أن هذا يحل مسألتنا؟ افترض أن  $m$  فردي في نظرية 40.3،

إذن  $(p, q)$  يحقق المعادلة  $p^2 - Dq^2 = -1$ ، ثم ببساطة نحسب التربيع :

$$(p + q\sqrt{D})^2 = (p^2 + q^2D) + 2pq\sqrt{D}$$

لإيجاد الحل المطلوب  $(p^2 + q^2D, 2pq)$  للمعادلة  $x^2 - Dy^2 = 1$ . يعطينا

هذا في النهاية طريقة فعّالة لحل معادلة بِلْ في جميع الحالات.

نظرية (٤٠، ٤). (نظرية الكسور المستمرة ومعادلة بِلْ)

اكتب الكسر المستمر للعدد  $\sqrt{D}$  على الشكل :

$$\frac{p}{q} = [a, b_1, b_2, \dots, b_{m-1}] \quad \text{وليكن} \quad \sqrt{D} = [a, \overline{b_1, b_2, \dots, b_{m-1}, b_m}]$$

عندئذ فإن أصغر حل في الأعداد الصحيحة لمعادلة بِلْ  $x^2 - Dy^2 = 1$  يُعطى

من خلال :

$$(x_1, y_1) = \begin{cases} (p, q) & , \text{ if } m \text{ is even} \\ (p^2 + q^2D, 2pq) & , \text{ if } m \text{ is odd} \end{cases}$$

جميع الحلول الأخرى تُعطى من خلال الصيغة

$$x_k + y_k \sqrt{D} = (x_1 + y_1 \sqrt{D})^k, \quad k=1,2,3,\dots$$

سوف نتهي اكتشافنا لعالم الكسور المستمرة بحل معادلة بَلْ:

$$x^2 - 313y^2 = 1$$

الكسر المستمر للعدد  $\sqrt{313}$  هو

$$\sqrt{313} = \left[ 17, \overline{1, 2, 4, 11, 1, 1, 3, 2, 2, 3, 1, 1, 11, 4, 2, 1, 34} \right]$$

باتباع الإجراء الموصوف في نظرية 40.4، سوف نرمي آخر عدد في الجزء المكرر، وهو في هذه الحالة العدد 34، ونحسب الكسر:

$$\frac{126862368}{7170685} = [17, 1, 2, 4, 11, 1, 1, 3, 2, 2, 3, 1, 1, 11, 4, 2, 1]$$

الدورة  $m$  تساوي 17، إذن الزوج

$$(p, q) = (126862368, 7170685) \text{ يُعطي حل:}$$

$$126862368^2 - 313 \cdot 7170685^2 = -1$$

لإيجاد أصغر حل لمعادلة بَلْ، فإن نظرية 40.4 تخبرنا أن نحسب:

$$p^2 + q^2 D = 126862368^2 + 7170685^2 \cdot 313 = 32188120829134849$$

$$2pq = 2 \cdot 126862368 \cdot 7170685 = 1819380158564160$$

لذلك فإن الحل الأصغر للمعادلة  $x^2 - 313y^2 = 1$  هو<sup>(١)</sup>

(١) كما لاحظنا في الفصل الثلاثون، الذي أوجد هذا الحل هو Brouncker عام 1657، الآن لك أن تتخيل

كيف يمكن أن يستطيع شخص إيجاد حل كبير مثل هذا في زمن لا يوجد فيه كمبيوترات!

$$(x, y) = (32188120829134849, 1819380158564160)$$

وإذا أردنا إيجاد الحل الأصغر التالي، فإننا ببساطة نربع:

$$32188120829134849 + 1819380158564160\sqrt{313}$$

وإليك الإجابة:

$$(x, y) = (2072150245021969438104715652505601, 117124856755987405647781716823680)$$

## تمارين

(٤٠.١) أوجد قيمة كل من الكسور المستمرة الدورية التالية. ضع إجابتك على الشكل

الفصل عندما حسبنا قيمة  $\frac{r+s\sqrt{D}}{t}$ ، حيث  $r, s, t, D$  أعداد صحيحة، تماماً كما فعلنا في هذا

الفصل عندما حسبنا قيمة  $[1, 2, 3, \overline{4, 5}]$  لتكون  $\frac{80-\sqrt{30}}{52}$ .

$$(a) [1, \overline{2, 3}] = [1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots]$$

$$(b) [1, 1, \overline{2, 3}] = [1, 1, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, \dots]$$

$$(c) [1, 1, 1, \overline{3, 2}] = [1, 1, 1, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, \dots]$$

$$(d) [3, \overline{2, 1}] = [3, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots]$$

$$(e) [1, \overline{3, 5}] = [1, 3, 5, 1, 3, 5, 1, 3, 5, 1, 3, 5, \dots]$$

$$(f) [1, 2, \overline{1, 3, 4}] = [1, 2, 1, 3, 4, 1, 3, 4, 1, 3, 4, \dots]$$

(٤٠،٢) لكل عدد من الأعداد التالية، أوجد كسره المستمر (الدوري). وما هي دورته؟

$$(a) \frac{16-\sqrt{3}}{11} \quad (b) \frac{1+\sqrt{293}}{2} \quad (c) \frac{3+\sqrt{5}}{7} \quad (d) \frac{1+2\sqrt{5}}{3}$$

(٤٠،٣) خلال برهاننا لنظرية الكسر المستمر الدوري 40.2، بسطنا الكسر المستمر

$$\frac{(b_1 b_2 + 1)B + b_1}{b_2 B + 1} \text{ } [b_1, b_2, B] \text{ وأوجدنا أنه يساوي}$$

(a) اعمل نفس الحسابات على  $[b_1, b_2, b_3, B]$  واكتبه على الشكل :

$$[b_1, b_2, b_3, B] = \frac{u B + v}{w B + z}$$

حيث  $u, v, w, z$  معطاه بصيغ مكتوبة بدلالة  $b_3, b_2, b_1$ .

(b) أعد حل (a) للكسر  $[b_1, b_2, b_3, b_4, B]$ .

(c) أنظر إلى إجابتك في (a) و (b). هل صيغ  $u, v, w, z$  مألوفة بالنسبة

لك؟

(مساعدة: قارنهم بالكسور  $[b_1, b_2]$ ،  $[b_1, b_2, b_3]$ ،  $[b_1, b_2, b_3, b_4]$ .

هذه متقاربات الكسر  $[b_1, b_2, b_3, \dots]$ . انظر أيضاً للجدول 39.2).

(d) بشكل عام، عندما يُبسَّط الكسر المستمر  $[b_1, b_2, \dots, b_m, B]$  ليكتب

على الشكل :

$$[b_1, b_2, b_3, \dots, b_m, B] = \frac{u_m B + u_m}{w_m B + z_m}$$

اشرح كيف أن الأعداد  $u_m, v_m, w_m, z_m$  يمكن وصفها بدلالة المتقاربات

$[b_1, b_2, b_3, \dots, b_{m-1}]$  و  $[b_1, b_2, b_3, \dots, b_m]$ . برهن أن وصفك صحيح.

(٤٠,٤) نتيجة (٤٠,١) تصف العدد الذي كسره المستمر الممتد هو  $[a, \bar{b}]$ .

(a) اعمل نفس الحسابات لإيجاد العدد الذي كسره المستمر الممتد هو  $[a, \bar{b}, c]$ .

(b) إذا جعلت  $b = c$  في صيغتك، هل تحصل على نفس النتيجة الواردة في نتيجة (٤٠,١)؟

(إذا كانت إجابتك "لا"، إذن فقد ارتكبت خطأ في (a)!) .

(c) ما هي قيم  $a, b, c$  التي تجعل العدد في (a) على الشكل  $\frac{s\sqrt{D}}{t}$  حيث  $s, t, D$  أعداد صحيحة؟

(d) ما هي قيم  $a, b, c$  التي تجعل العدد في (a) يساوي الجذر التربيعي  $\sqrt{D}$  حيث  $D$  عدد صحيح؟

(٤٠,٥) نخبّرنا نظرية 40.3 أنه إذا كانت دورة الكسر المستمر للعدد  $\sqrt{D}$  فردية فإنه بإمكاننا إيجاد حل للمعادلة  $x^2 - Dy^2 = -1$ .

(a) من بين الأعداد  $2 \leq D \leq 20$  حيث  $D$  ليس مربعاً كاملاً، أي الأعداد  $\sqrt{D}$  دورته فردية وأيها دورته زوجية. هل لاحظت أي نمط؟  
 (b) نفس السؤال بالنسبة للعدد  $\sqrt{p}$  للأعداد الأولية  $2 \leq p \leq 40$  (انظر الجدول رقم (٤٠,١)).

(c) اكتب عدداً لا نهائياً من الأعداد الصحيحة الموجبة  $D$  بحيث تكون دورة  $\sqrt{D}$  فردية. لكل قيمة من قيم  $D$ ، أعط حلاً للمعادلة  $x^2 - Dy^2 = -1$ . (مساعدة: انظر إلى نتيجة (٤٠,١)).

(d) اكتب عدداً لا نهائياً من الأعداد الصحيحة الموجبة  $D$  بحيث تكون دورة  $\sqrt{D}$  زوجية.

(مساعدة: استخدم حلك لتمرين (d) 40.4).

(٤٠,٦) اكتب برنامجاً يأخذ عدداً صحيحاً موجباً  $D$  كمُدخل و يُعطي كمُخرج قائمة

من الأعداد  $[a, b_1, \dots, b_m]$  بحيث يكون الكسر المستمر الممتد للعدد  $\sqrt{D}$  هو  $[a, \overline{b_1, \dots, b_m}]$ . استخدم برنامجك لطباعة جدول للكسور المستمرة

للعدد  $\sqrt{D}$  لجميع الأعداد غير المربعة  $D$  الواقعة بين 2 و 50.

(b) عمم عملك في (a) بكتابة برنامج يأخذ أعداد صحيحة  $r, s, t, D$  كمُدخلات، حيث  $D > 0, t > 0$  و يُعطي كمُخرج قائمة من الأعداد

$$\frac{r+s\sqrt{D}}{t} = [a_1, \dots, a_\alpha, \overline{b_1, \dots, b_m}] \text{ بحيث } [a_1, \dots, a_\alpha, b_1, \dots, b_m]$$

استخدم برنامجك لطباعة جدول للكسور المستمرة للعدد  $(3+2\sqrt{D})/5$

لجميع الأعداد غير المربعة  $D$  بين 2 و 50.

(٤٠,٧) (a) اكتب برنامجاً يأخذ قائمة  $[b_1, \dots, b_m]$  كمُدخل، و يُعطي كمُخرج قيمة

الكسر المستمر الدوري تماماً  $[b_1, b_2, \dots, b_m]$ . يجب أن يكون المُخرج على

الشكل  $(r, s, t, D)$ ، حيث قيمة الكسر المستمر هي  $(r+s\sqrt{D})/t$ .

(b) استخدم برنامجك من (a) لحساب قيم كل كسر من الكسور المستمرة

التالية:

$$[1], [1, 2], [1, 2, 3], [1, 2, 3, 4], [1, 2, 3, 4, 5], [1, 2, 3, 4, 5, 6]$$

(c) وسع نطاق برنامجك في (a) ليتعامل مع الكسور المستمرة الدورية التي

ليست دورية تماماً. بمعنى آخر، ليأخذ برنامجك قائمتين

$[a_1, \dots, a_\alpha]$ ،  $[b_1, \dots, b_m]$  كمُدخل، و يُعطي قيمة

$[a_1, \dots, a_\alpha, \overline{b_1, b_2, \dots, b_m}]$  كمخرج.

(d) استخدم برنامجك من (c) لحساب قيم كل كسر من الكسور المستمرة

التالية :

$$\left[6, 5, 4, 3, 2, \overline{1}\right], \quad \left[6, 5, 4, 3, \overline{1, 2}\right], \quad \left[6, 5, 4, \overline{1, 2, 3}\right], \\ \left[6, 5, \overline{1, 2, 3, 4}\right], \quad \left[6, \overline{1, 2, 3, 4, 5}\right].$$

(٤٠,٨) اكتب برنامجك لحل معادلة بل  $x^2 - Dy^2 = 1$  باستخدام طريقة الكسور المستمرة. إذا بيّن البرنامج أن هناك حلاً للمعادلة  $x^2 - Dy^2 = -1$ ، فأوجد حل هذه المعادلة أيضاً.

(a) استخدم برنامجك لحل معادلة بل لجميع القيم غير المربعة  $D$  الواقعة بين 2 و 20، اختبر صحة إجابتك بمقارنتها بجدول 30.1.

(b) استخدم برنامجك لتوسيع الجدول وذلك بحل معادلة بل لجميع القيم غير المربعة  $D$  الواقعة بين 76 و 99.

(٤٠,٩) (سؤال صعب) ليكن  $D$  عدداً صحيحاً موجباً ليس مربعاً كاملاً.

(a) برهن أن الكسر المستمر للعدد  $\sqrt{D}$  ليس دورياً.

(b) بشكل أدق، برهن أن الكسر المستمر للعدد  $\sqrt{D}$  يبدو على الشكل :

$$\sqrt{D} = \left[ a, \overline{b_1, b_2, \dots, b_m} \right]$$

(c) برهن أن  $b_m = 2a$ .

(d) برهن أن قائمة الأعداد  $b_1, b_2, \dots, b_{m-1}$  متناظرة، أي بمعنى، أنها من

اليسار إلى اليمين نفسها من اليمين إلى اليسار.

(٤٠,١٠) (سؤال صعب) ليكن  $r, s, t, D$  أعداداً صحيحة، حيث  $t \neq 0, D > 0$

$$. A = \frac{r+s\sqrt{D}}{t} \text{ وليكن}$$

برهن أن الكسر المستمر للعدد  $A$  دوري. (هذا هو الجزء (b) من نظرية

الكسر المستمر الدوري (٤٠,٢)).