معادلة بَـــلْ
Pell's Equation

قمنا في الفصل الأخير بإعطاء وصف كامل لحلول المعادلة :

$x^2 - 2y^2 = 1$ لأعداد صحيحة موجبة x , y .

إن هذه المعادلة مثال لما يسمى " بمعادلة بـل" Pell's equation ، والـتي هـي معادلـة على الشكل :

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

حيث D عدد صحيح موجب ثابت ليس مربع كامل.

إن معادلة بَلْ لها تاريخ طويل وساحر. إن أول تسـجيل لظهـور هـذه المعادلـة كـان في "مسـألة الماشـية لأرخميـدس". تضـمنت هـذه المسـألة ثمانيـة أنـواع مختلفـة مـن المواشي ، وكانت تطلب من القارئ أن يحدد عدد المواشي من كـل نـوع. أعطـت المسـألة علاقات خطية مختلفة ، مع شرطين يحددان أن كميات المسألة مربعـات كاملـة. بعـد كـثير من العمليات الجبرية ، تُخْتَزَل المسألة لحل معادلة بَلْ :

$$x^2 - 4729494y^2 = 1$$

الإحداثي الصادي لأصغر حل ، الذي أوجده "أمثور" في عام 1880 ، يتألف من 41 خانة ، وعليه فإن الإجابة على مسألة المواشي الأصلية تتـألف مـن مئـات الألـوف

من الخانات! إن هذا يوحي بأن أرخميدس ومعاصريه لم يتمكنوا من تحديد الحل، ولكن على الرغم من ذلك فإنه من المثير للإعجاب أنهم قاموا بوضع مسألة كهذه.

إن أول تقدم مهم في حل معادلة بَلْ حصل في الهند. في بدايات عام 628 للميلاد، قام "براهماجوبتا" بوصف كيف نستخدم حلول معروفة لمعادلة بَلْ لنستنتج حلول جديدة، وفي عام 1150 ميلادي أعطى "بهاسكاراشاريا" طريقة عبقرية، بنكهة حديثة مدهشة، لإيجاد حل ابتدائي. لسوء الحظ، بقي هذا العمل الأساسي غير معروف في أوربا لفترة طويلة حتى أعيد اكتشافه في القرن السابع عشر.

براهماجوبتا (670 - 598) واحد من أشهر الرياضيين الهنود في عصره، أفضل الأعمال المعروفة لبراهماجوبتا هو (افتتاح الكون) والذي كتبه عام 628م. هذا الكتاب الاستثنائي اشتمل على مناقشة معادلات من الشكل $x^2 - Dy^2 = 1$، وبشكل خاص معادلة "بَلْ" $x^2 - 2y^2 = 1$. وصف براهماجوبتا طريقة مركبة لخلق حلول جديدة من حلول قديمة، والتي سماها "ساماسا" "Samasa"، وأعطى خوارزمية ينتج عنها (أحياناً) حل ابتدائي.

بعد ما يقارب 500 عام، قام الرياضي الهندي "بهاسكاراشاريا" (1185 - 1114) بمتابعة عمل براهماجوبتا الخاص بمعادلة "بَلْ" وذلك بإعطاء وصف لطريقة تستخدم التقريب الابتدائي للحل لإيجاد حل صحيح عبر اختزالات متكررة. سمى "بهاسكاراشاريا" طريقته بـ "تشاكرافالا"، والتي باتت تعرف اليوم باسم "انحدار فيرما". لقد رأينا بعض الأمثلة على انحدار فيرما في الفصلين السادس عشر والثامن عشر. لقد شرح "بهاسكارا" طريقته من خلال حل المعادلة $x^2 - 2y^2 = 1$ قبل أن يتحدى فيرما الرياضيين بحل هذه المعادلة بحوالي 500 سنة.

إن التاريخ الأوربي الحديث عن معادلة بَلْ بدأ في عـام 1657 عنـدما تحـدى فيرمـا زملاءه الرياضيين بحل المعادلة . ولقد أوجد العديد منهم الحل الأصغر ، والذي هو :

$$(x, y) = (1766319049, 226153980)$$

وفي عام 1657 قام "ويليام برونكـار" بوصـف طريقـة عامـة لحـل معادلـة بَـلْ. لقـد أثبت برونكار فعالية طريقته بإيجاد – فقط خلال ساعتين – الحل :

$$(32188120829134849, 1819380158564160)$$

للمعادلة :

$$x^2 - 313y^2 = 1$$

قـام الرياضـي "والِـس" بوصـف طريقـة بروكـر في كتـاب عـن الجـبر و نظريـة الأعداد ، وأكد كل من "والِس" و "فيرمـا" أن معادلـة بَـلْ دائمـاً لهـا حـل. اعتقـد "أويلـر" Euler مخطئاً أن الطريقة الـواردة في كتـاب "والِـس" كانـت تعـود للرياضـي "جـون بَـلْ" — رياضي إنجليزي آخر – ، و أويلر نفسه هو الذي أعطى المعادلة الاسم الذي تُعرف به اليوم. من إساءة الفهم هذه تُخَلد الإنجازات الرياضية[1] !

افرض إننا قادرين على إيجاد حل (x_1, y_1) لمعادلة بَلْ :

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

عندئذ نكون قادرين على إيجاد حلول جديدة باستخدام نفس الطريقة المشـروحة

(١) البعض يولدون عظماء ، والبعض يحققون العظمة ، والبعض الآخر تفرض عليهم فرضاً. بالاستفادة من إدراكنا التاريخي للحوادث ، يمكن تسمية "معادلة بَلْ" بـ "معادلة ب٣" "معادلـة B^3 " ، تكريمـاً للرياضـيين الثلاثة براهماجوبتا ، بهاسكاراشاريا ، و بروكر.

في الفصل الأخير عندما $D=2$. بتحليل الحل المعروف:

$$1=x_1^2-Dy_1^2=\left(x_1+y_1\sqrt{D}\right)\left(x_1-y_1\sqrt{D}\right)$$

ثم بتربيع الطرفين نحصل على حل جديد:

$$\begin{aligned}1=1^2&=\left(x_1+y_1\sqrt{D}\right)^2\left(x_1-y_1\sqrt{D}\right)^2\\&=\left(\left(x_1^2+y_1^2D\right)+2x_1y_1\sqrt{D}\right)\left(\left(x_1^2+y_1^2D\right)-2x_1y_1\sqrt{D}\right)\\&=\left(x_1^2+y_1^2D\right)^2-\left(2x_1y_1\right)^2D.\end{aligned}$$

بكلمات أخرى، $\left(x_1^2+y_1^2D,\,2x_1y_1\right)$ هو حل جديد. بأخذ القوة الثالثة، القوة الرابعة، وهكذا دواليك، يمكننا الاستمرار في إيجاد حلول إضافية بقدر ما نريد.

إن هذا يتركنا أمام سؤالين محيرين. أولهما، هل كل "معادلة بَلْ" لها حل؟ لاحظ أننا لم نطرح هذا السؤال عندما درسنا معادلة بَلْ، $x^2-2y^2=1$ لأن لهذه المعادلة الخاصة كان من السهل إيجاد الحل $(3,2)$. ثانيهما، إذا فرضت وجود حل "لمعادلة بَلْ" ما، هل من الصحيح أن كل حل يمكن إيجاده بأخذ قوى لأصغر حل؟ بالنسبة للمعادلة $x^2-2y^2=1$ بينا أن هذا صحيح، فكل حل يأتي من القوى المرفوعة للعدد $3+2\sqrt{2}$. كلتا الإجابتين لهذين السؤالين تُعطى في النظرية التالية.

نظرية (١ ,٣٠) (نظرية معادلة بَلْ)

ليكن D عدداً صحيحاً موجباً ليس مربعاً كاملاً. عندئذ فإن معادلة بَلْ $x^2-2y^2=1$ لها دائماً حلول صحيحة موجبة. إذا كان $\left(x_1,y_1\right)$ هو حل حيث x_1 أصغر قيمة، فإن كل حل $\left(x_k,y_k\right)$ يمكن إيجاده بأخذ القوى:

$$x_k+y_k\sqrt{D}=\left(x_1+y_1\sqrt{D}\right)^k \quad \text{حيث} \quad k=1,2,3,\ldots.$$

على سبيل المثال، أصغر حل لمعادلة بَلْ

$$x^2 - 47y^2 = 1$$

هـو $(x, y) = (48,7)$. عندئـذ فـإن كـل الحلـول يمكـن إيجادهـا بأخـذ قـوى للعدد $48 + 7\sqrt{47}$. أصغر الحلول الثاني والثالث هما:

$$\left(48 + 7\sqrt{47}\right)^2 = 4607 + 672\sqrt{47}$$

و

$$\left(48 + 7\sqrt{47}\right)^3 = 442224 + 64505\sqrt{47}$$

الجزء الثاني من نظرية معادلـة بَـلْ ، والـذي يـنص علـى أن كـل حـل لمعادلـة بَـلْ ناتج من قوة مرفوعة لأصغر حل، هـو في الحقيقـة لـيس مـن الصـعب جـداً إثباتـه. هـذا الجزء يمكن إثباته بقيم عشوائية للمقدار D بنفس الطريقة التي برهنا فيها عندما كانت $D = 2$ في الفصـل السـابق. علـى كـل حـال، فـإن برهـان الجـزء الأول مـن النظريـة، والذي يؤكد وجود حل واحد على الأقل دائماً هو أكثر صعوبة نوعاً مـا. سـوف نؤجـل برهان كلا الجزأين للفصل الثاني والثلاثون.

الجـدول رقـم 30.1 يضـم قائمـة لأصـغر حـل لمعادلـة بَـلْ لجميـع قـيم D حتـى القيمـة 75 . وكمـا تـرى، فـإن أصـغر حـل يكـون أحيانـاً صـغير بمـا فيـه الكفايـة. مـثلاً، المعادلـة $x^2 - 72y^2 = 1$ لهـا حـل صـغير جـدًّا $(17,2)$ مقارنـة بالحـل الأصـغر للمعادلـة $x^2 - 75y^2 = 1$ والـذي هـو $(26,3)$. مـن ناحيـة أخـرى، يكـون أحيانـاً الحــل الأصــغر ضــخم. مــن الأمثلــة اللافتــة للنظــر في الجــدول هــو الحــل الأصــغر للمعادلة $x^2 - 61y^2 = 1$ والـذي هـو $(1766319049, 226153980)$ ، كـذلك الحل الأصغر للمعادلة $x^2 - 73y^2 = 1$ وهو $(2281249, 267000)$.

مثال آخر على هذه الظاهرة هو الحل الأصغر للمعادلة $x^2-97y^2=1$ والذي هو $(62809633,6377352)$ ، وبالطبع هناك المعادلة $x^2-313y^2=1$ ، والتي أشرنا إليها سابقاً، التي لها حل أصغر ضخم مشابه.

لا يوجد نمط معروف عن متى يكون الحل الأصغر صغيرا نسبيًّا ومتى يكون كبيرا. من المعروف أن الحل الأصغر (x,y) للمعادلة $x^2-Dy^2=1$ ليس أكبر من $x<2^D$ ، لكن من الواضح أن هذا ليس بالتقدير الجيد(١) .

ربما تستطيع أنت اكتشاف نمط لم يكتشفه أحد قبلك وتستخدمه لإثبات خصائص غير معروفة حتى اليوم عن حلول معادلة بَلْ.

الجدول رقم (١,٣٠). الحل الأصغر لمعادلة بَــلْ $x^2-Dy^2=1$

D	x	y	D	x	y	D	x	y
1	–	–	26	51	10	51	50	7
2	3	2	27	26	5	52	649	90
3	2	1	28	127	24	53	66249	9100
4	–	–	29	9801	1820	54	485	66
5	9	4	30	11	2	55	89	12

(١) إن هناك معلومة أكثر دقة عن الحل الأصغر تعود إلى "سيجل" (C.L. Siegel) . فلقد بين أن لكل D يوجد عدد صحيح موجب h بحيث أن العدد $h.\log\left(x+y\sqrt{D}\right)$ له نفس ترتيب $\sqrt{D}$. بشكل خاص، $\log x$ و $\log y$ أكبر بكثير من أحد مضاعفات $\sqrt{D}$. لذلك، لكي يكون كل من x و y صغير، فإن هذا الرقم الغامض h والذي يسمى عدد الصف للعدد D يجب أن يكون كبيراً.
هناك العديد من المسائل غير المحلولة التي اهتمت بدراسة عدد الصف، من ضمنها التخمين المشهور على أن هناك عدداً لا نهائيًّا من قيم D يكون عدد الصف لها مساوياً للعدد 1 .

D	x	y	D	x	y	D	x	y
6	5	2	31	1520	273	56	15	2
7	8	3	32	17	3	57	151	20
8	3	1	33	23	4	58	19603	2574
9	–	–	34	35	6	59	530	69
10	19	6	35	6	1	60	31	4
11	10	3	36	–	–	61	1766319049	226153980
12	7	2	37	73	12	62	63	8
13	649	180	38	37	6	63	8	1
14	15	4	39	25	4	64	–	–
15	4	1	40	19	3	65	129	16
16	–	–	41	2049	320	66	65	8
17	33	8	42	13	2	67	48842	5967
18	17	4	43	3482	531	68	33	4
19	170	39	44	199	30	69	7775	936
20	9	2	45	161	24	70	251	30
21	55	12	46	24335	3588	71	3480	413
22	197	42	47	48	7	72	17	2
23	24	5	48	7	1	73	2281249	267000
24	5	1	49	–	–	74	3699	430
25	–	–	50	99	14	75	26	3

تمــــــــارين

(٣٠,١) معادلة بَلْ هي معادلة $x^2 - Dy^2 = 1$ ، حيث D عدد صحيح موجب ليس مربع كامل. هل تستطيع أن تكتشف لماذا نحن لا نريد أن يكون D مربع كامل؟ افرض أن D مربع كامل، وليكن $D = A^2$. هل تستطيع أن تصف الحلول الصحيحة للمعادلة $x^2 - A^2y^2 = 1$ ؟

(٣٠,٢) أوجد حل لمعادلة بَلْ $x^2 - 22y^2 = 1$ تكون قيمة x فيه أكبر من 10^6.

(٣٠,٣) أثبت أن كل حل لمعادلة بَلْ $x^2 - 11y^2 = 1$ يُستنتج بأخذ قوى للعدد $10 + 3\sqrt{11}$. (لا تعتمد في البرهان على نظرية معادلة بَلْ فقط. أنا أريد منك أن تعطي برهاناً على هذه المعادلة باستخدام نفس الأفكار التي استخدمناها عندما تعاملنا مع المعادلة $x^2 - 2y^2 = 1$ في الفصل 29).

(٣٠,٤) نحن مستمرون في دراستنا للأعداد الخماسية التي عرضنا لها في التمرين 29.4.

(a) هل يوجد أي أعداد خماسية (بخلاف العدد 1) تكون أيضاً أعداداً مثلثية؟ هل هناك عدد لا نهائي منها؟

(b) هل يوجد أي أعداد خماسية (بخلاف العدد 1) تكون أيضاً أعداداً مربعة؟ هل هناك عدد لا نهائي منها؟

(c) هل يوجد أي أعداد بخلاف العدد 1 ، تكون في نفس الوقت مثلثية ، مربعة ، وخماسية؟ هل هناك عدد لا نهائي منها؟