الفصل الثالث عشر

المعادلات التفاضلية العادية
Ordinary Differential Equations

(١٣,١) تعريف الحدود
Definition of Terms

المعادلة التفاضلية العادية (اختصاراً تُكتب ODE) هي معادلة تحتوي على مشتقات الدالة الكلية $y(x)$ (تُسمى مشتقة الدالة أحياناً المؤثر التفاضلي ويرمز له بالرمز $(Dy(x)$) ولا تحتوي على مشتقات جزئية كالتي ناقشناها في الفصل العاشر. وتعرف رتبة المعادلة التفاضلية على أنها درجة أعلى مشتقة للدالة y في تلك المعادلة. على سبيل المثال ، المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى تحتوي على حدود مثل $y' = \frac{dy}{dx}$ ولكنها لاتحتوي على حدود درجاتها أعلى مثل $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ أو $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$. تقسم المعادلات التفاضلية العادية إلى قسمين ، خطية وغير خطية ، فالمعادلة التفاضلية الخطية هي المعادلة التي تكون فيها قوى y ومشتقاتها تساوي 1 وماعدا ذلك فهي غير خطية. كما تعرف درجة المعادلة التفاضلية على أنها القوة المرفوعة لها أعلى مشتقة ، سنقصر دراستنا هنا على المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى.

(١٣,٢) الرتبة الأولى القابلة للفصل
First Order Separable

إن أبسط أنواع المعادلات التفاضلية العادية هي

$$\frac{dy}{dx} = k \qquad (١٣,١)$$

حيث k ثابت ، وهذه معادلة من الرتبة الأولى وخطية من الدرجة الأولى. وكما رأينا في الفصل الرابع فإن هذه المعادلة تمثل دالة ميل منحناها ثابت. ومن ثم فإن حل هذه المعادلة هو خط مستقيم. ولايجاد معادلة هذا المستقيم نقوم بمكاملة طرفي المعادلة (١٣,١) بالنسبة إلى x لنحصل على

$$y = kx + A \qquad (١٣,٢)$$

والثابت A هو نتيجة إجراء عملية تكامل واحدة ، وبصورة عامة فإن الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة n يجب أن تحتوي على عدد n من الثوابت. إنه ليس بالأمر العسير رؤية وجود ثابت واحد فقط في حل معادلة الرتبة الأولى (١٣,١)؛ لأن هذه المعادلة تؤكد لنا أن لمنحنى الدالة $y(x)$ ميل ثابت k ولا تزودنا بمعلومات عن تقاطع الخط المستقيم مع المستقيم $x = 0$. ولذا فإن أي ثابت A سيحقق المعادلة (١٣,١) ، ولإيجاد قيمة هذا الثابت نحتاج إلى شرط حدي (معلومات إضافية). على سبيل المثال ، إذا علمنا أن $y = 0$ عندما يكون $x = 0$ فنجد أن $A = 0$ ، وبهذا نحصل على الحل الوحيد للمستقيم ذي الميل الثابت k وهو المستقيم الذي يمر بنقطة الأصل.

ومعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى أعم من المعادلة السابقة هي

$$\frac{dy}{dx} = X(x)Y(y) \qquad (١٣,٣)$$

حيث X و Y دالتان في المتغيرين x و y على التوالي. هذه المعادلة قابلة للفصل (بمعنى أننا نستطيع إعادة صياغة المعادلة بحيث يكون أحد طرفيها دالة في x مضروباً بـ dx والطرف الثاني دالة في y مضروباً بـ dy). بقسمة طرفي المعادلة (١٣,٣) على Y ثم المكاملة نحصل على

$$\int \frac{dy}{Y(y)} = \int X(x)dx \qquad (١٣,٤)$$

ومنها نحصل على حل $y(x)$. على سبيل المثال ، إذا كان $X(x) = cos\, x$ و $Y(y) = y$ فنحصل من المعادلة (١٣,٤) على

$$ln\, y = sin\, x + A \Rightarrow y = Be^{sin\, x}$$

حيث استبدلنا الثابت A بالثابت Be^A بأخذ e للطرفين.

(١٣,٣) الرتبة الأولى المتجانسة

First Order Homogeneous

نقول إن الدالة $f(x,y)$ متجانسة من الدرجة m إذا كان

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x,y)$$

حيث λ ثابت. على سبيل المثال، الدالة $f(x,y) = x^3 + 3x^2y + 3y^2x + 5y^3$ متجانسة من الدرجة الثالثة في المتغيرين x و y؛ لأنه إذا ضربنا كل من العددين x و y بالعدد 2 فإن الدالة f تزيد بمعامل 2^3. لاحظ أن أي دالة متجانسة f يمكن كتابتها على الصورة $f = x^m F(V)$ حيث F دالة في متغير واحد V و $V = \frac{y}{x}$. في حالة

الدالة f المقدمة أعلاه نجد $F(V) = 1 + 3V + 3V^2 + 5V^3$. لنأخذ الآن المعادلة التفاضلية العادية

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\theta(x,y)}{\varphi(x,y)} \qquad (١٣ , ٥)$$

حيث $\theta(x,y)$ و $\varphi(x,y)$ متجانستان من الدرجة نفسها. ولهذا يمكن إعادة كتابتها على النحو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^m\theta(V)}{x^m\varphi(V)} = \Psi(V) \qquad (١٣ , ٦)$$

بعد التخلص من الحد x^m وحيث $y = Vx$ وباشتقاق $y = Vx$ بالنسبة إلى x باستخدام قاعدة اشتقاق ضرب دالتين المقدمة في المعادلة (٤أ٩) نجد أن

$$\frac{dy}{dx} = V + x\frac{dV}{dx} = \psi(V) \qquad (١٣ , ٧)$$

وبفصل المتغيرات كما في المعادلة (٤ , ١٣) نجد

$$\int \frac{dV}{\psi(V) - V} = \int \frac{dx}{x}$$

ومن ثم نستطيع حل المعادلة لإيجاد V. وللحصول على الحل $y(x)$ للمعادلة الأصلية نستخدم التعويض $y = Vx$ وشرط حدي مناسب.

هناك العديد من الأفكار التي يمكن استخدامها لتحويل معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الأولى غير متجانسة إلى معادلة متجانسة. على سبيل المثال ، المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x-y}$$

غير متجانسة ولكن بالتعويض ، $u = x + a$ و $v = y + b$ (لاحظ أن $du = dx$ و $dv = dy$) واختيار $a = b = \frac{1}{2}$ تأخذ المعادلة التفاضلية الصورة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du} = \frac{u+v}{u-v}$$

وهي معادلة تفاضلية متجانسة نحصل على حل لها بالطريقة الموصوفة في بداية البند.

(٤ ,١٣) معامل التكامل للرتبة الأولى

Integrating Factor of First Order

الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية العادية من الرتبة الأولى هي

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x) \qquad (١٣,٨)$$

ولحل هذه المعادلة نضرب طرفي المعادلة بمعامل التكامل $I(x)$

$$I(x) = exp\left(\int P(x)dx\right) \qquad (١٣,٩)$$

لنحصل على الحل العام للمعادلة (١٣,٨) وهو

$$y(x)I(x) = \int I(x)Q(x)dx$$

ولتبرير ذلك ، لاحظ أنه بضرب طرفي المعادلة (١٣أ٨) بمعامل التكامل $I(x)$ $I(x)$ نحصل على

$$I(x)\frac{dy}{dx} + I(x)y(x)P(x) = I(x)Q(x)$$

ولكن

$$\frac{dI}{dx} = \frac{d}{dx}exp\left(\int P(x)dx\right) = exp\left(\int P(x)dx\right)P(x) = I(x)P(x)$$

وبهذا يكون

$$I(x)\frac{dy}{dx} + y(x)\frac{dI}{dx} = I(x)Q(x)$$

وبملاحظة أن الطرف الأيسر لهذه المعادلة هو $\frac{d}{dx}(I(x)y(x))$ نجد أن

$\frac{d}{dx}\big(I(x)y(x)\big) = I(x)Q(x)$ وبالتالي نخلص إلى أن

$$I(x)y(x) = \int I(x)Q(x)dx \qquad (١٣,١٠)$$

هو حل المعادلة (٨ , ١٣).[1]

كمثال على المعادلة التفاضلية (٨ , ١٣) دعنا نقوم بايجاد حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=x$$

معامل التكامل هو

$$I(x)=exp\int P(x)dx=exp\int\frac{1}{x}dx=exp\,(lnx)=x$$

وبضرب طرفي المعادلة بالمعامل $I(x)$ نجد أن

$$x\frac{dy}{dx}+y=x^2$$

أي أن

$$\frac{d}{dx}(xy)=x^2$$

ومن ثم فإن

$$xy=\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+A$$

(١) المترجم : هذا التبرير ليس ترجمة حرفية للتبرير الذي قدمه المؤلف حيث قمت بتوضيح بعض الخطوات ليسهل على القارئ فهمها.

ونخلص إلى أن الحل العام للمعادلة هو

$$y = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}x^3 + A\right)$$

(٥ , ١٣) الرتبة الثانية المتجانسة

Second Order Homogeneous

ندرس الآن المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية المتجانسة (أي أن الطرف الأيمن يساوي صفراً)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k_1\frac{dy}{dx} + k_2 y = 0 \qquad (١٣ , ١١)$$

حيث k_1 و k_2 ثابتان. لاحظنا في البند (٣ , ٤) أن الدالة الأسية هي الدالة الوحيدة التي تكون مشتقاتها دوال أسية أيضاً. ولذا يكون من المنطقي التخمين بأن حل المعادلة (١١ , ١٣) يأخذ الشكل $y = Ae^{\alpha x}$. وبتعويض ذلك في المعادلة نجد أن

$$Ae^{\alpha x}(\alpha^2 + k_1\alpha + k_2) = 0 \Rightarrow \alpha^2 + k_1\alpha + k_2 = 0 \qquad (١٣ , ١٢)$$

$$Ae^{\alpha x}(\alpha^2 + k_1\alpha + k_2) = 0 \Rightarrow \alpha^2 + k_1\alpha + k_2 = 0$$

تُسمى معادلة الدرجة الثانية هذه بالمعادلة المساعدة. وبحل هذه المعادلة نجد قيم α المناسبة. وكما هو معلوم فإن لجذور معادلة الدرجة الثانية ثلاث حالات

(١) الحالة الأولى هي الحالة التي يكون جذرا المعادلة حقيقيان ومختلفان. على سبيل المثال

$$\frac{d^2y}{dx^2} - w_0^2 y = 0 \Rightarrow (\alpha + w_0)(\alpha - w_0) = 0 \Rightarrow y = Ae^{w_0 x} + Be^{-w_0 x} \quad (١٣,١٣)$$

حيث A و B ثابتان. افترضنا لإيجاد هذا الحل مبدأ التراكب والذي ينص على أن الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية الخطية المتجانسة هو تركيباً خطياً لحلولها الخاصة. لاحظ أيضاً أنه بالامكان الاستعانة بمتطابقة الدوال الزائدية (٧,٧) لكتابة الحل العام للمعادلة (١٣,١٣) على الصورة

$$y = C\cosh(w_0 x) + D\sinh(w_0 x)$$

حيث $C = A + B$ و $D = A - B$.

لقد وضحنا في البند (١٣,٢) الحاجة لوجود ثابتين في الحل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية. ومع أنه واضح حدسياً أن A و B (أو C و D) كانا نتيجة لتكاملين ولكننا حصلنا عليها في حالتنا هذه بالصورة العكسية حيث قمنا بتخمين الحل ومن ثم أجرينا عملية اشتقاق مرتين.

(٢) الحالة الثانية هي التي يكون فيها جذرا المعادلة تخيليين. على سبيل المثال

$$\frac{d^2y}{dx^2} + w_0^2 y = 0 \Rightarrow (\alpha + iw_0)(\alpha - iw_0) = 0 \Rightarrow y = Ae^{iw_0 x} + Be^{-iw_0 x} \quad (١٣,١٤)$$

لهذه المعادلة أهمية خاصة في التطبيقات الفيزيائية حيث تصف الازاحة (y) للعديد من أنظمة التذبذب كالبندول (هنا x يمثل الزمن) وتدعى معادلة الحركة

التوافقية البسيطة. وفي حالتنا نستطيع الاستعانة بالمتطابقات المثلثية المقدمة في البند (٦ , ٧) لكتابة الحل العام على الصورة

$$y = C\cos(w_0x) + D\sin(w_0x)$$

حيث $C = A + B$ و $D = i(A - B)$.

إن إضافة عامل تخامد غير صفري (أي حد يحتوي على $\frac{dy}{dx}$) للمعادلة يولدٌ حلاً أصعب قليلاً من الحل السابق. على سبيل المثال[٢]

$$(١٣ , ١٥)\quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0 \Rightarrow y = \left[C\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + D\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right]e^{-x/2}$$

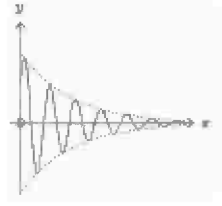
تفسر لنا صيغة الحل السبب وراء تسمية هذا النظام بالخامد لأن ضرب التذبذب بحد أُسي يؤول إلى الصفر عندما يؤول الزمن x إلى مالانهاية ، يعني أن ذبذبة البندول ستخمد مع الزمن.[٣]

(٣) الحالة الثالثة هي الحالة التي يكون فيها جذرا معادلة الدرجة الثانية متساويان. فمثلاً

$$(١٣ , ١٦)\quad \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0 \Rightarrow (\alpha + 1)^2 = 0 \Rightarrow y = (A + B)e^{-x} = Ce^{-x}$$

(٢) $\alpha = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$

(٣)



حيث نحصل هنا على ثابت واحد فقط $C = A + B$. ولذا فإن علينا تخمين الحل (الخاص) الآخر وهو في حالتنا الحل $y = xe^{-ax}$ حيث نستطيع التأكد من أنه يحقق المعادلة (١٣ , ١٦). إذن ، نخلص إلى أن الحل العام للمعادلة في هذه الحالة هو

$$y = (A + Bx)e^{-x}$$

تُسمى هذه الحالة في بعض الأحيان ، حالة الخمود الحرج. من الممكن تحويل بعض المعادلات التفاضلية العادية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية بمعاملات غير ثابتة إلى واحدة معاملاتها ثابتة (أي إلى معادلة مماثلة للمعادلة (١٣ , ١١)) وذلك بتغير مناسب للمتغيرات. على سبيل المثال

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad (١٣ , ١٧)$$

إذا وضعنا $u = ln(x)$ واستخدمنا قاعدة السلسلة (١٢ , ٤) نحصل على

$$x\frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dx}\frac{du}{dx} = \frac{dy}{du} \qquad (١٣ , ١٨)$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = x^2\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x^2\frac{du}{dx}\frac{d}{du}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{du}\right) = \left(\frac{d^2y}{du^2} - \frac{dy}{du}\right) \qquad (١٣ , ١٩)$$

حيث $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$. وبتعويض المعادلتين (١٣ , ١٨) و (١٣ , ١٩) في المعادلة (١٣ , ١٧) نحصل على معادلة تفاضلية عادية متجانسة من الرتبة الثانية بمعاملات ثابتة في المتغيرين y و u.

(١٣,٦) الرتبة الثانية غير المتجانسة
Second Order Inhomogeneous

المعادلة التفاضلية العادية الخطية غير المتجانسة من الرتبة الثانية تأخذ الشكل العام

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k_1\frac{dy}{dx} + k_2y = F(x) \qquad (١٣,٢٠)$$

حيث $F(x)F(x)$ دالة مناسبة في المتغير xx.

الحل العام لهذه المعادلة يأخذ الشكل $y(x) = c(x) + p(x)$. حيث يُسمى $c(x)$ الحل المتمم وهو الحل العام للمعادلة المتممة المتجانسة التي نحصل عليها من المعادلة (١٣,٢٠) بوضع $F(x) = 0$ ويمكن الحصول عليه بطريقة مطابقة تماماً لحل المعادلة (١٣,١١). أما $p(x)$ فيدعى حلاً خاصاً للمعادلة (١٣,٢٠) وهذا الحل يجب أن يحقق المعادلة (١٣,٢٠). أي إذا عوضناه في الطرف الأيسر للمعادلة فإن الطرف الأيمن لها يساوي تماماً $F(x)$ بدون إضافة ثوابت.

توجد طريقة بسيطة لإيجاد $p(x)$ ولكنها تحتوي على معالجات جبرية قد تكون مزعجة في بعض الأحيان والإطار العام لهذه الطريقة يكون على النحو التالي

اعتبر $p(x)$ كترتيب خطي لجميع أنماط الدوال المكونة من $F(x)$ ومشتقتها الأولى والثانية وبعد ذلك نحصل على الثوابت بمقارنة الناتج مع المعادلة (١٣,٢٠). نوضح ذلك بالمثال التالي

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \omega_o^2y = x\sin x \qquad (١٣,٢١)$$

كما أسلفنا ، نستخدم طريقة حل المعادلة المتجانسة لنجد أن

$$c(x) = C\,cos(\omega_o x) + D\,sin(\omega_o x)$$

ولإيجاد $p(x)$ نكتبه كترتيب خطي للدالة $x\,sin\,x$ ومشتقتها الأولى والثانية فنجد

$$p(x) = ax\,sin\,x + bx\,cos\,x + c\,sin\,x + d\,cos\,x$$

بالتعويض في المعادلة (٢٠ ,١٣) ومقارنة المعاملات نحصل على أربع معادلات آنية.[٤] بحل هذه المعادلات نجد قيم الثوابت وهي في حالتنا ، $a = \frac{1}{\omega_0^2-1}$، $b = c = 0$، $d = \frac{-2}{\omega_0^2-1}$.

فيزيائياً ، تمثل المعادلة (٢٠ ,١٣) نظام ذبذبة بتأثير قوة $F(x)$. في التطبيقات الواقعية يكون عامل الخمود موجوداً دائماً بحيث تتخامد الدالة المتممة إلى الصفر عندما يتزايد الزمن x.

يُسمى هذا الجزء من الحل وهو الجزء الوحيد الذي يعتمد على شروط حدية ، الحل الانتقالي. أما الحل الخاص فيُسمى حل الحالة الثابتة. في العادة يمكن إيجاد حل الحالة الثابتة بتجريب حلول تحتوي معاملاتها أعداداً مركبة (سعات مركبة) مضروبة بالدالة $exp\,(imx)$.

---

(٤)
$a(\omega_o^2-1) = 1 \quad (xsinx)$
$b(\omega_o^2-1) = 0 \quad (xcosx)$
$-2b + c(\omega_o^2+1) = 0 \quad (sinx)$
$2a + d(\omega_o^2-1) = 0 \quad (cosx)$

نختم هذا الفصل بمناقشة بعض الصعوبات التي نواجهها لحل المعادلة (١٣,٢٠).
لنأخذ الحالة التي يكون فيها $k_1 = 0$ ، $k_2 = 0$ ، $F(x) = \sin x$. الحل المتمم هو حل المعادلة (١٣,١٤) حيث $\omega_o = 1$ وهو

$$y = C \sin x + D \cos x$$

ولإيجاد الحل الخاص $p(x)$ فإننا نحاول كتابته كترتيب خطي للدالة $F(x)$ ومشتقتها الأولى والثانية. في هذه الحالة يكون $p(x) = a \sin x + b \cos x$ وهذا هو حل المعادلة المتممة ، ولذا بتعويضه في الطرف الأيسر للمعادلة (١٣,٢٠) نحصل على صفر. والسؤال هنا هو كيف نستطيع اختيار حدود بدلالة الدالة $\sin x$ لنحصل على الدالة $F(x)$؟ أحد الاختيارات المناسبة هو $p(x) = a x\sin x + b x\cos x$. وبتعويض $p(x)$ في المعادلة (١٣,٢٠) ومقارنة المعاملات نحصل على $a = 0$ و $b = -\frac{1}{2}$ ونخلص إلى أن الحل العام هو

$$y = A \sin x + B \cos x - \frac{1}{2} x \cos x$$

تمارين

(١٣,١) المعادلة $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$ هي قانون تناقص ذرات مشعة عددها N في مركب مع الزمن t. إذا كان عدد الذرات المشعة في البداية يساوي N_o فجد صيغة لنصف الحياة (أي الزمن اللازم التي يكون عنده عدد الذرات المشعة في المركب يساوي $\frac{1}{2} N_o$).

(١٣,٢) جد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى

(١) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1-y^2}{x}$$

(٢) $$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2+xy}{x^2}$$

(٣) $$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+5}{x-y+2}$$

(٤) $$\frac{dy}{dx} + y\cot x = cosec\, x$$

(٥) $$\frac{dy}{dx} + 2xy = x$$

(٦) $$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \cos x$$

(١٣,٣) معادلة برنولي هي

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = y^{\alpha}Q(x)$$

حوّل هذه المعادلة إلى المعادلة (١٣,٨) باستخدام التعويض $v = y^{-(\alpha-1)}$
ومن ثم جد الحل $y(x)$ عندما تكون $P(x) = x$ ، $Q(x) = x$ ، $\alpha = 2$.

(١٣,٤) أثبت أنه يمكن كتابة المعادلة (١٣,٨) على الصورة

$$[Q(x) - P(x)y]dx - dy = 0$$

بضرب طرفي المعادلة بالمعامل $I(x)$ واستخدام شروط المعادلة (١١,٦) ،
أثبت أن $I(x)$ هو معامل التكامل المعطى بالمعادلة (١٣,٩).

(١٣ , ٥) جد الحل العام للمعادلة (١٣ , ٢٠) في الحالات التالية

(١) $k_1 = -2$ ، $k_2 = -3$ ، $F(x) = sin\,x$

(٢) $k_1 = -2$ ، $k_2 = -8$ ، $F(x) = x^2$

(٣) $k_1 = 0$ ، $k_2 = \omega_o^2$ ، $F(x) = cos(\omega x)$

(٤) $k_1 = 1$ ، $k_2 = 1$ ، $F(x) = cos(\omega x)$

(٥) $k_1 = 0$ ، $k_2 = 4$ ، $F(x) = cos(2x)$

جد حل المعادلة (١) باستخدام الشرط الحدي ، $y(0) = 0$ حيث y يبقى منتهياً عندما $x \to \infty$. ماذا يحصل في الفقرة (٣) عندما يكون $\omega = \omega_o$؟ جد حل الحالة الثابتة في الفقرة (٤) بكتابة الطرف الأيسر كمركبة حقيقية لدالة أُسية مركبة ووضع $p = Re\{Aexp(i\omega x)\}$.

(١٣ , ٦) حل المعادلة

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

باستخدام

(١) الحل التجريبي $y = Ax^\lambda$ ،

(٢) الطريقة المقدمة في البند (١٣ , ٥).