

## الدوال المثلثية

### Trigonometry

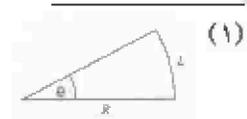
#### (١, ٣) الزوايا والقياس الدائري

#### Angles & Circular Measure

تُعرف الزاوية على أنها مقياس دوران مستقيم وتقاس عادة بالدرجات ، ومقدار الدورة الكاملة يساوي  $360^\circ$  ، ولذا فإن مقياس الزاوية القائمة يساوي  $90^\circ$  ومقياس الزاوية المستقيمة يساوي  $180^\circ$  وهكذا. وعلى الرغم من شيوع الدرجات لقياس الزوايا ، إلا أن التقدير الدائري (الراديان) هو المقياس الأكثر استخداماً في الرياضيات وهو كمية عديمة البعد يمكن تعريفها على النحو التالي ، إذا دورنا نصف قطر  $R$  بزاوية مقدارها  $\theta$  بحيث يكون طول القوس الناتج عن هذا الدوران يساوي  $L$  فإن<sup>(١)</sup>

$$(١, ٣) \quad \theta = \frac{L}{R}$$

وبما أن محيط الدائرة يساوي  $2\pi R$  فإن  $360^\circ$  تساوي  $2\pi$  راديان ، والزاوية القائمة تساوي  $\frac{\pi}{2}$  راديان.



وبصورة عامة ، من الممكن تحويل الزاوية المُقاسة بالدرجات إلى قياس دائري بضرب قيمتها بالمقدار  $\frac{\pi}{180}$  . أي أن الراديان يساوي  $57.3^\circ$  تقريباً. سنفترض في هذا الكتاب (مالم يُذكر صراحة) أن مقياس الزوايا هو الراديان.

### (٣, ٢) الجيب وجيب التمام والظل

#### Sine, Cosine & Tangent

إن أبسط تعريف للجيب وجيب التمام والظل هو المُقدم كنسب بين أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية. أي ، إذا كان  $r$  هو طول الوتر وكان  $x$  طول الضلع المجاور للزاوية  $\theta$  وكان  $y$  طول الضلع المقابل لها فإن<sup>(٢)</sup>

$$(٣, ٢) \quad \sin(\theta) = \frac{y}{r} , \quad \cos(\theta) = \frac{x}{r} , \quad \tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

استناداً إلى هذا التعريف نستطيع أن نجد علاقة بين قيم الدوال المثلثية الثلاث

$$(٣, ٣) \quad \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

وبها أن قيمة الزاوية بين  $y$  و  $x$  تساوي  $90^\circ - \theta$  (مجموع زوايا مثلث يساوي  $180^\circ$ ) فإن العلاقة بين جيب وجيب تمام زاويتين حادتين هي

$$(٣, ٤) \quad \sin(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

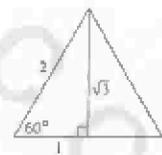


إذا كانت  $\theta$  صغيرة جداً فإن طول  $y$  يكون صغيراً جداً ويكون  $r$  و  $x$  متقاربين في الطول، وعليه، نجد استناداً إلى  $(3, 2)$  و  $(3, 4)$  أن  $\sin(0) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  وأن  $\cos(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ .

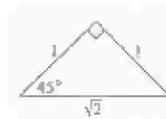
باستخدام مثلث قائم الزاوية مناسب ومبرهنة فيثاغورس نجد أن  $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

وأن  $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  وأن  $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$  وعليه فنجد استناداً إلى  $(3, 3)$  أن  $\tan(0) = 0$  وأن  $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$  وأن  $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$  وأن  $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$  وأن  $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \infty$ .

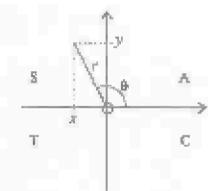
لقد قصرنا دراستنا لحد الآن على الحالة  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  ولكنه من السهل تعميم ذلك لأي قيمة للزاوية  $\theta$ ، ويتم ذلك بتعميم تعريف  $x$  و  $y$  و  $r$  في المعادلة  $(3, 2)$  حيث تمثل الإحداثيات والمسافة من نقطة الأصل والنقطة التي إزاحتها الزاوية مقاسة باتجاه عكس عقارب الساعة مع الاتجاه الموجب لمحور  $x$  تساوي  $\theta$  (تأخذ  $\theta$  قيمة سالبة إذا كان اتجاه الدوران مع عقارب الساعة). عندئذ، نستطيع إيجاد قيم الجيب وجيب التمام والظل لأي زاوية  $\theta$  باستخدام زاوية حادة (مع تجاهل إشارة السالب).<sup>(٥)</sup>



(٣)



(٤)



(٥)

ولرؤية ذلك ، لاحظ أولاً أن الدوال المثلثية هي دوال دورية أي أن قيمها تتكرر مع كل دورة (دورة كل من الجيب وجيب التمام هي  $360^\circ$  ، ودورة الظل هي  $180^\circ$ ).

$$\sin(\theta) = \sin(\theta + 2\pi N)$$

(٣, ٥)

$$\cos(\theta) = \cos(\theta + 2\pi N)$$

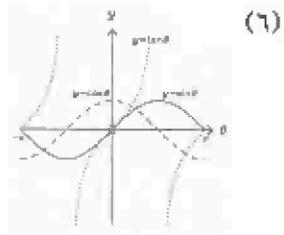
$$\tan(\theta) = \tan(\theta + 2\pi N)$$

حيث  $N$  عدد صحيح.

إذا كانت  $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$  فإن  $x$  سالب و  $y$  موجب ، ومن ثم فإن  $\frac{y}{x} = \tan(\theta)$  يساوي القيمة السالبة للنسبة بين المقابل إلى المجاور في مثلث قائم الزاوية إحدى زواياه الزاوية المتممة  $180^\circ - \theta$ . أي أن  $\tan(\theta) = -\tan(180^\circ - \theta)$ . وبالمثل فإن  $\sin(\theta) = \sin(180^\circ - \theta)$  وأن  $\cos(\theta) = -\cos(180^\circ - \theta)$ . وبتكرار ذلك للحالتين  $180^\circ < \theta \leq 270^\circ$  و  $270^\circ < \theta \leq 360^\circ$  نجد أن قيم الجيب وجيب التمام والظل تساوي قيم دوال مثلثية لزاوية بين نصف القطر ومحور  $x$  قيمتها أصغر مع ملاحظة أن الإشارة تعتمد على الربع الواقعة به الزاوية  $\theta$ .

إن أفضل طريقة لتذكر الإشارة هي استخدام كلمة (CAST) حيث حروفها مكونة من الحروف الأولى للكلمات cosine و all و sine و tangent على التوالي، وذلك بوضع الحرف C بالربع الرابع ، A بالربع الأول ، S بالربع الثاني ، T بالربع الثالث. هذه الحروف تبين أن قيمة الدالة المثلثية التي يمثلها موجبة في الربع المعين. على سبيل المثال ،  $\tan(210^\circ) = \tan(30^\circ)$  و  $\tan(300^\circ) = -\tan(60^\circ)$ .

قبل أن ننهي هذا البند تقدم الدوال المثلثية الأخرى وهي دالة ظل التمام (cotangent) ودالة القاطع (secant) ودالة قاطع التمام (cosecant) وتُعرف على النحو التالي<sup>(٦)</sup>



$$(٣, ٦) \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

لقد بينا سابقاً أن  $\sin(0) = 0$  و  $\cos(0) = 1$  و  $\tan(0) = 0$  ولكن بملاحظة أن القطاع الدائري في التعريف الدائري للدوال المثلثية يشبه إلى حد بعيد مثلث قائم الزاوية عندما تقترب  $\theta$  من الصفر فنجد أن

$$(٣, ٧) \quad \sin\theta \approx \theta, \quad \tan\theta \approx \theta, \quad \cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

عندما تكون  $|\theta| \ll 1$  ومقاسه بالراديان. ومن الممكن التحقق من ذلك أيضاً بالنظر إلى بيان الدوال المثلثية بجوار  $\theta = 0$ .

### (٣, ٣) متطابقات فيثاغورية

#### Pythagorean Identities

إن إحدى خصائص المثلث القائم الزاوية هي مبرهنة فيثاغورس وتنص على أن  $x^2 + y^2 = r^2$  حيث  $r$  هو طول الوتر و  $x$  و  $y$  طولاً ضلعي القائمة.

وبقسمة طرفي المعادلة على  $r^2$  نحصل على  $\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$ . وبالتعويض

في المعادلة (٢, ٣) نحصل على المتطابقة

$$(٣, ٨) \quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

حيث استخدمنا الاصطلاح المتفق عليه  $\sin^2\theta = (\sin\theta)^2$ . هذه الصيغة وصيغ أخرى مشابهة تُكتب عادة باستخدام  $\equiv$  بدلاً من المساواة (=) لتدل على أنها متطابقة.

أي أنها صائبة دائماً لجميع قيم  $\theta$  وهي تختلف عن المساواة الاعتيادية ( $\sin\theta = \cos\theta$ ) .  
الآن ، بقسمة متطابقة فيثاغورس على  $x$  و  $y$  بدلاً من  $r$  نحصل بطريقة مشابهة  
على المتطابقتين

$$(٣, ٩) \quad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta, \quad \cot^2\theta + 1 = \operatorname{cosec}^2\theta$$

إذا وضعنا  $x = a\cos\theta$  و  $y = b\sin\theta$  في المعادلة (٣, ٨) فنحصل على المعادلة  
(٢, ١٠) ، ولذا فهاتان المعادلتان تسميان المعادلتان الوسيطيتان للقطع الناقص.  
وبالمثل المعادلتان الوسيطيتان للدائرة التي مركزها نقطة الأصل هما  $x = R\cos\theta$   
و  $y = R\sin\theta$ .

### (٣, ٤) الزوايا المركبة

#### Compound Angles

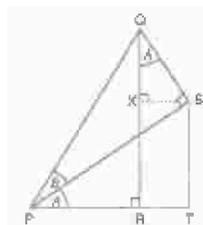
إذا كانت زاوية تساوي مجموع زاويتين، مثل  $\theta = A + B$  ، فمن  
الممكن التعبير عن قيمة  $\sin\theta$  بدلالة قيم مثلثية لكل من  $AA$  و  $BB$ . ومع أن برهان  
هذه الصيغة يتطلب بعض المعلومات الهندسية والجبرية ، إلا أنه من السهل تذكرها<sup>(٧)</sup>

$$(٣, ١٠) \quad \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها  $A = B$  نحصل على صيغة ضعف

الزاوية للجيب

$$\begin{aligned} \sin(A + B) &= \frac{QR}{PQ} \\ &= \frac{QX + ST}{PQ} \\ &= \frac{QS \cos A + PS \sin A}{PQ} \\ &= \frac{QS}{PQ} \cos A + \frac{PS}{PQ} \sin A \\ &= \sin B \cos A + \cos B \sin A \end{aligned}$$



(٧)

$$(٣, ١١) \quad \sin 2A = 2\sin A \cos A$$

ومن الممكن الحصول على صيغة لجيب الفرق  $\sin(A - B)$  من المعادلة (٣, ١٠) وذلك بملاحظة أن  $\sin(-\theta) = -\sin\theta$  وأن  $\cos(-\theta) = \cos\theta$

$$(٣, ١٢) \quad \sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

ويشكل هندسي مشابه وعمليات جبرية مشابهة نحصل على الصيغتين التاليتين لمجموع و فرق زاويتين لدالة جيب التمام

$$(٣, ١٣) \quad \cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

حيث الإشارة الموجبة في الطرف الأيسر تقابل الإشارة السالبة في الطرف الأيمن والعكس صحيح. إذا كانت  $A = BA = B$  فإننا نحصل على صيغة ضعف الزاوية لجيب التمام

$$(٣, ١٤) \quad \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

وباستخدام المعادلة (٣, ٨) يمكن التعبير عن هذه الصيغة باستخدام الجيب فقط أو جيب التمام فقط

$$(٣, ١٥) \quad \cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$$

وباستخدام المعادلات (٣, ٣)، (٣, ١٠)، (٣, ١٢)، (٣, ١٣) وقسمة مناسبة نستطيع الحصول على صيغتين لمجموع و فرق دالة الظل

$$(٣, ١٦) \quad \tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

وبوضع  $A = B$  نحصل على  $\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$ .

### (٣, ٥) صيغ خارج القسمة

#### Factor Formulae

من الممكن استخدام صيغ البند السابق للحصول على صيغ تربط المجموع والفرق مع الضرب ، على سبيل المثال ، بإضافة المعادلة (٣, ١٠) إلى (٣, ١٢) نحصل على

$$(٣, ١٧) \quad \sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin A \cos B$$

وبوضع  $X = A + B$  و  $Y = A - B$  نحصل على

$$(٣, ١٨) \quad \sin X + \sin Y = 2 \sin \left( \frac{X + Y}{2} \right) \cos \left( \frac{X - Y}{2} \right)$$

ومع أن هاتين الصيغتين متكافئتين ، إلا أن الأولى مناسبة لتفريق الضرب إلى جمع والثانية تكون مناسبة للعملية العكسية.

ب طرح المعادلتين (٣, ١٠) و (٣, ١٢) نحصل على صيغتين مشابهتين للصيغتين (٣, ١٧) و (٣, ١٨) وتختلفان فقط بوجود إشارة سالبة بالطرف الأيسر وتبديل مواقع  $\sin \sin$  و  $\cos \cos$  في الطرف الأيمن.<sup>(٨)</sup>

$$\cos X - \cos Y = 2 \sin \left( \frac{X + Y}{2} \right) \sin \left( \frac{X - Y}{2} \right) \quad \sin X - \sin Y = 2 \cos \left( \frac{X + Y}{2} \right) \sin \left( \frac{X - Y}{2} \right) \quad (٨)$$

وبصورة مشابهة نحصل من المعادلة (٣, ١٣) على الصيغتين التاليتين لجيب التمام

$$(٣, ١٩) \quad \cos(A + B) + \cos(A - B) = 2\cos A \cos B$$

$$(٣, ٢٠) \quad \cos(A + B) - \cos(A - B) = -2\sin A \sin B$$

كما نحصل على صيغة مشابهة للصيغة المقدمة في المتطابقة (٣, ١٨) بالتعويض عن  $X$  و  $Y$  كما في السابق.

### (٣, ٦) الدوال المثلثية العكسية

#### Inverse Trigonometric Function

إذا علمنا أن جيب زاوية  $\theta$  في مثلث قائم الزاوية يساوي  $\frac{1}{2}$  فإننا نستنتج أن  $\theta = 30^\circ$ .

إن هذا مثالاً على استخدام معكوس الدالة المثلثية. أي أنه يمكن تعميم ذلك إلى

تعريف عام

$$(٣, ٢١) \quad y = \sin \theta \Leftrightarrow \theta = \sin^{-1} y$$

حيث نحذر أن القوة  $-1$  لا تعني المقلوب ولكنها رمز شائع للدوال العكسية، وفي

بعض الأحيان يستخدم الرمز  $\arcsin$  عوضاً عن  $\sin^{-1}$  منعاً للإلتباس. وبصورة

مشابهة تماماً للتعريف (٣, ٢١) نحصل على تعاريف لمعكوس بقية الدوال المثلثية حيث

$$\arctan y = \tan^{-1} y \quad \text{و} \quad \arccos y = \cos^{-1} y \quad \text{وهكذا.}^{(٩)}$$

$$\tan^{-1} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \pm \pi, \dots \quad \cos^{-1}(1/2) = \pm \frac{\pi}{3}, \pm \frac{\pi}{3}, \dots \quad (٩)$$

وللحصول على بيان  $\theta = \sin^{-1}y$  نقوم بتدوير بيان  $y = \sin\theta$  بزاوية دوران  $90^\circ$ ، بحيث يكون محور  $y$  هو الأفقي ومحور  $\theta$  هو الرأسي. وبالمثل لكل من  $\theta = \cos^{-1}y$  و  $\theta = \tan^{-1}y$  بالنسبة إلى بياني  $\cos$  و  $\tan$ . ولذا فإن الدوال المثلثية العكسية دوال متعددة القيم؛ لأنه من الممكن الحصول على قيمة معينة لكل من  $\sin$ ،  $\cos$ ،  $\tan$  من العديد من الزوايا. على سبيل المثال، إذا كان  $\sin\theta = \frac{1}{2}$  فإنه من الممكن أن تكون  $\theta = 30^\circ$  أو  $\theta = 150^\circ$  أو أي مضاعف للزاوية  $360^\circ$  مضافاً إليه إحدى هاتين القيمتين. والملاحظة المهمة الأخرى هي أن  $\sin^{-1}y$  و  $\cos^{-1}y$  غير معرفتين إذا كانت القيمة المطلقة للقيمة  $y$  أكبر من 1، لأن  $|\sin\theta| \leq 1$  و  $|\cos\theta| \leq 1$  لكل  $\theta$ ، ولكن ذلك لا ينطبق على  $\tan^{-1}y$  لأن  $-\infty < \tan\theta < +\infty$ .

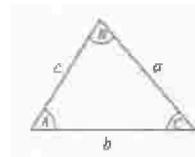
### (٣، ٧) قاعدتا الجيب وجيب التمام

#### The Sine & Cosine Rules

ننهي هذا الفصل بتقديم قاعدتين للجيب وجيب التمام تبين العلاقة بين أطوال أضلاع أي مثلث وزواياه (وبرهانها سيصبح مباشر بعد تقديم مفهوم المتجهات).

إذا كانت زوايا مثلث هي  $A$ ،  $B$ ،  $C$  فجرت العادة أن نرمز لأطوال الأضلاع المقابلة بالرموز  $a$ ،  $b$ ،  $c$  على التوالي.<sup>(١٠)</sup> باستخدام هذا الترميز يمكن إثبات أن

$$(٣، ٢٢) \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



(١٠)

وأن

$$(٣, ٢٣) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

وتسميان قاعدتا الجيب وجيب التمام.

لاحظ أن (٣, ٢٢) عبارة عن ثلاث معادلات، كما أنه يمكن الحصول على معادلتين مشابھتين للمعادلة (٣, ٢٣) بتبديل مواقع الرموز، فمثلاً،  $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$ .

## تمارين

(٣, ١) حوّل الزوايا التالية من راديان إلى درجات مع توضيح اتجاهاتها بيانياً

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \pm \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{5}, \pm \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{3\pi}{2}$$

(٣, ٢) جد قيم  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$  للزوايا  $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$ . جد أيضاً قيم هذه الدوال المثلثية

$$\text{للزوايا } -\frac{\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}, \pm \frac{5\pi}{6}, \pm \frac{3\pi}{4}, \pm \frac{2\pi}{3}$$

(٣, ٣) باستخدام تعريف الراديان و  $\sin$ ، بيّن لماذا  $\sin \theta \approx \theta$  عندما تكون  $\theta$  صغيرة. ثم بيّن لماذا المعادلة (٣, ١٥) تؤدي إلى أن  $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$ .

(٣, ٤) إذا كان  $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$  فجد كل من  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\tan \theta$  بدلالة  $t$ .

(٣, ٥) حل المعادلات التالية في المجال  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  ،  $\tan\theta = -\sqrt{3}$  ،  $4\cos^3\theta = \cos\theta$  ،  $\sin 3\theta = -1$ .

(٣, ٦) أثبت أنه يمكن كتابة  $a\sin\theta + b\cos\theta$  على الصورة  $A\sin(\theta + \varphi)$  حيث  $A$  و  $\varphi$  يُعبر عنهما بدلالة  $a$  و  $b$ . ثم حل المعادلة  $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{3}/2$ .

(٣, ٧) أثبت أن  $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$  ومن ثم اكتب  $\sin 4\theta$  بدلالة  $\sin\theta$  و  $\cos\theta$ .

(٣, ٨) أثبت أن  $8\sin^4\theta = \cos 4\theta - 4\cos 2\theta + 3$  ثم جد صيغة مشابهة للمقدار  $\cos^4\theta$ .

(٣, ٩) باستخدام صيغة خارج القسمة ، جد قيم  $\theta$  بين  $0$  و  $\pi$  التي تحقق المعادلة  $\cos\theta = \cos 2\theta + \cos 4\theta$ .

(٣, ١٠) أثبت أن  $\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta = 4\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta$ .

(٣, ١١) طولاً رابطي جزيء ثلاثي الذرة هما  $1.327A$  و  $1.514A$  وزاوية الربط هي  $107.5^\circ$ . جد المسافة بين الذرتين الأخرتين.