الفصل الرابع

التفاضل

Differentiation

(١ , ٤) الميل والمشتقات

Gradient & Derivatives

لقد بينا في الفصل الثاني كيفية استخدام المنحنى للتعبير عن علاقة بين كميتين x و y. ومع أن تقاطع المنحنى مع المحورين x و y مهماً ، إلاّ أن معرفة ميل المنحنى عند نقطة معينة أكثر أهمية. أي معرفة سرعة تزايد أو تناقص y مع التغير في x أو العكس ، وهذا هومفهوم التفاضل الذي يتناوله هذا الفصل حيث يتم التركيز على كيفية حساب الميل جبرياً.

نبدأ بتقديم تعريف ميل المنحنى ، ولهذا الغرض نفرض أن الدالة f تبين ارتباط y مع x (يُعبّر عن ذلك بكتابة $y = f(x)$). فمثلاً ، $f(x) = mx + c$ هي الدالة الخطية العامة و $f(x) = sin\ (x)$ هي دالة الجيب وهكذا. الآن ، إذا تغير الإحداثي الأفقي من x إلى $x + \delta x$، حيث δx ترمز لزيادة بسيطة فإن ذلك يتبعه تغير في y من $f(x)$ إلى $f(x + \delta x)$. يُعّرف ميل المنحنى f عند النقطة x على أنه النسبة بين التغير δy في الإحداثي الرأسي إلى التغير δx في الإحداثي الأفقي عندما يكون δx صغير جداً. ومن الممكن التعبير عن ذلك كالتالي

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0}\left[\frac{\delta y}{\delta x}\right] = \lim_{\delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}\right] \qquad (٤ ,١)$$

حيث يُسمى $\frac{dy}{dx}$ المُشتقة ويُلفظ «dy على dx»، وأحياناً تُستخدم رموز أُخرى مثل y' أو $f'(x)$ أو $\dot{y}$ للمشتقة[١]. ولكي نضمن وجود النهاية (المُشتقة) فإنه يجب أن يكون الاقتراب $\delta x \to 0$ تدريجياً. أي التحقق من أننا نحصل على القيمة $\frac{dy}{dx}$ نفسها عندما يكون δx سالباً أو موجباً. إن ذلك مضمون طالما أن المنحنى $y = f(x)$ ناعماً ، أي أنه لا يحتوي على نقاط مدببة أو قفزات (نقاط عدم اتصال). وهذه النقاط التي تكون عندها الدالة غير قابلة للاشتقاق.

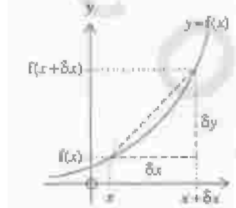
حساب مُشتقة الخط المستقيم $y = mx + c$ من أبسط الأمثلة على استخدام تعريف المُشتقة. بالتعويض في المعادلة (١ ,٤) نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0}\left[\frac{m(x+\delta x) + c - (mx + c)}{\delta x}\right] = \lim_{\delta x \to 0}\left[\frac{m\delta x}{\delta x}\right]$$

وعلى الرغم من أن كل من البسط والمقام يساوي صفر عندما $\delta x \to 0$ ، إلاّ أن نهاية المقدار موجودة وتساوي m وهذا يتفق مع ما قدمناه في البند (١ ,٢) حيث إن المُشتقة تأخذ القيمة نفسها عند جميع النقاط وهذه القيمة هي الميل m.[٢] قبل تقديم

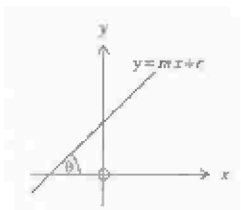
---

(١)



(٢)

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = f'(x) \qquad \dot{y} = \frac{dy}{dx}$$



أمثلة أخرى على المُشتقة دعنا نؤكد على حقيقتين هامتين. أولاهما أنه إذا كانت $\frac{dy}{dx} > 0$ فإن y يتزايد بتزايد x وإذا كانت $\frac{dy}{dx} < 0$ فإن y يتناقص بتزايد x.

ومعدل التغير يكون القيمة المطلقة للمُشتقة. أما الحقيقة الأخرى فهي

$$\frac{dy}{dx} = tan\theta \tag{٤,٢}$$

حيث θ هي الزاوية بين المستقيم ومحور x. لاحظ أن خواص الظل تُؤكد هذه الحقيقة لأن إشارة $\frac{dy}{dx}$ هي نفس إشارة θ وقيمتها تزداد بازدياد قيمة الزاوية.

ننتقل الآن إلى مثال آخر على ايجاد المُشتقة وهو $y = sinx$. بالتعويض في المعادلة (٤ , ١) نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0}\left[\frac{sin(x+\delta x) - sinx}{\delta x}\right]$$

وكما هو الحال دائماً فإننا نجد قيمة النهاية في آخر خطوة. نحاول الآن دراسة سلوك البسط عندما تكون δx صغيرة جداً ولا تساوي صفراً. ومن الممكن إنجاز ذلك باستخدام المعادلة (٣ , ١٠) لإيجاد قيمة $sin(x+\delta x)$ ومن ثم استخدام التقريب (٣ , ٧) لكل من دالتي الجيب وجيب التمام عندما تكون الزاوية صغيرة

$$sin(x+\delta x) \approx \left(1 - \frac{\delta x^2}{2}\right)sinx + \delta x cosx$$

حيث x مقاسه بالراديان. وبالتعويض في المعادلة المقدمة سابقاً والتبسيط نحصل على[٣]

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \left[cosx - \frac{\delta x sinx}{2} \right] = cosx$$

أي أن مُشتقة $sinx$ هي $cosx$. من الممكن التحقق من هذه النتيجة باستخدام بياني دالتي الجيب وجيب التمام المُقَدمة في البند (٢ , ٣) مع ملاحظة أن محور x هو محور θ . عند نقطة الأصل نجد أن مُنحنى $sinx$ يميل بزاوية 45° ومن ثم فإن المُشتقة هي $1 = tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ، وهذه تساوي $cos\ (0)$. يتناقص الميل إلى 0 تدريجياً عندما تكون الزاوية بين 0° و 90° وهذا يتفق مع منحنى جيب التمام. بعد ذلك يبدأ منحنى الجيب بالتقعُّر إلى الأسفل ومن ثم فإن الميل يتزايد بالإتجاه السالب وهذا يتفق أيضاً مع منحنى جيب التمام. وبصورة مماثلة نستطيع أن نرى أن مُشتقة $cosx$ تساوي $-sinx$. ومن الممكن التحقق من ذلك باستخدام منحنى الجيب وجيب التمام.

(٢ , ٤) بعض الخصائص الأساسية للمشتقات

Some Basic Properties of Derivatives

إحدى الخصائص الأساسية للمُشتقات هي الخاصية الخطية. أي

$$\frac{d}{dx}[Af(x)] = A\frac{df}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \qquad (٤ , ٣)$$

---

(٣)

$$\frac{d}{dx}(sinx) = cosx$$

$$\frac{d}{dx}(cosx) = -sinx$$

حيث A ثابت و $f(x)$ و $g(x)$ دالتان ، وحيث $\frac{d}{dx}$ هو مؤثر التفاضل ويعني معدل التغير بالنسبة إلى x. إن برهان المعادلة (٣ , ٤) يتم باستخدام المعادلة (١ , ٤) ولكن مايهمنا هنا هو ملاحظة أن مُشتقة المجموع تساوي مجموع المشتقات. تساعدنا هذه الخاصية على ايجاد مُشتقات كثيرات الحدود، فإذا علمنا أن مُشتقة x^M هي Mx^{M-1} (٤) فإن

$$\frac{d}{dx}(a_o + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N) = a_1 + 2a_2x + \cdots + Na_Nx^{N-1} \quad (٤ , ٤)$$

حيث من الممكن استخدام (١أ٤) لإيجاد مُشتقة x^M باستخدام ذات الحدين لحساب مفكوك $(x+\delta x)^M$ كما في المعادلة (١١ , ١) مع تجاهل جميع الحدود التي تحتوي على قوة أكبر من واحد للقيمة δx. إن هذا يجد لنا مُشتقة x^M حيث M عدد صحيح موجب ، إلاّ أن النتيجة تبقى صحيحة لأي قوة M. وكحالة خاصة للمعادلة (٤ , ٤) نجد أن مُشتقة الخط المستقيم $(N = 1)$ تساوي a_1 وأن مشتقة الدالة الثابتة $y = a_o$ تساوي صفراً.

وخاصية مهمة أُخرى هي علاقة $\frac{dy}{dx}$ مع المقلوب $\frac{dx}{dy}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} \quad (٤ , ٥)$$

فـإذا كان $\frac{dy}{dx}$ هـو ميل المُنحنى الإعتيادي فإن $\frac{dx}{dy}$ يمثل ميل مُنحنى يكون فيه x هو المحور الرأسي و y هو المحور الأفقي. أي أن $\frac{dx}{dy}$ هو معدل تغيُر x بالنسبة إلى y. مـن الواضـح أن المعادلـة (٥ , ٤) صائبـة عندمـا تكـون δx و δy صغيرة جداً.

---

(٤) $\frac{d}{dx}(x^M) = Mx^{M-1}$

إن أفضل مثال على استخدام المعادلة (٥ , ٤) هو إيجاد مشتقات الدوال المثلثية العكسية. فباستخدام المعادلة (٢١ , ٣) لدينا

$$y = sin^{-1}x \Leftrightarrow x = siny$$

وباشتقاق الطرف الأيمن بالنسبة إلى y نجد أن

$$\frac{dx}{dy} = cosy = \sqrt{1 - sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

حيث استخدمنا المتطابقة (٨ , ٣) لكتابة $cosy$ بدلالة $siny$ ومن ثم كتابة $\frac{dx}{dy}$ بدلالة x ، واعتمدنا أيضاً على أن $|x| \leq 1$ وأن $|y| \leq \frac{\pi}{2}$. وعليه فإننا نخلص استناداً إلى المعادلة (٥ , ٤) إلى أن مُشتقة $arcsinx$ تساوي مقلوب الجذر التربيعي للمقدار $1 - x^2$. وبأسلوب مماثل نستطيع إثبات أن مشتقة $arccosx$ هي سالب مشتقة $arcsinx$(٥).

ننهي هذا البند بتقديم مفهوم مشتقة المشتقة (أي المشتقات العليا). فإذا كانت $y = f(x)$ وكانت $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ دالة ناعمة في x فإننا نستطيع إيجاد مُشتقتها لنحصل على المُشتقة الثانية للدالة $f(x)$.

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \lim_{\delta x \to 0}\left[\frac{f'(x + \delta x) - f'(x)}{\delta x}\right] = f''(x) \quad (٤ , ٦)$$

---

(٥)

$$\frac{d}{dx}(sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(cos^{-1}x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

فإذا كانت المُشتقة الأولى تبين لنا كيفية تغيُر y بالنسبة إلى x فإن المشتقة الثانية تبين لنا كيفية تغير ميل y بالنسبة إلى x. وإذا كان y يمثل المسافة المقطوعة و x يمثل الزمن فإن y'

(أو $\dot{y}$) هي السرعة وأن y'' (أو $\ddot{y}$) هي التسارع. من الممكن تعميم (٦ , ٤) لإيجاد مشتقات عُليا ، فمثلاً $\frac{d^3y}{dx^3}$ هي المشتقة الثالثة وهي معدل تغير $\frac{d^2y}{dx^2}$ بالنسبة إلى x ، وهكذا[٦].

(٣ , ٤) الأسس واللوغاريتمات

Logarithms & Exponentials

درسنا في البند (٤ , ٢) الدالة الأسية $y = exp\ (x)$. ميل المماس لهذه الدالة هو الدالة نفسها

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \qquad (٤ , ٧)$$

ومن الممكن النظر إلى ذلك على أنه تعريف العدد e.[٧] أما مُشتقة الدالة اللوغاريتمية الطبيعية $y = ln\ (x)$ فإنها تتبع من اشتقاق الدالة الأُسية المكافئة $x = exp\ (y)$ بالنسبةإلى y

$$\frac{dx}{dy} = e^y = x$$

---

(٦) $\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$

(٧) $e = 2.7182818285$

وباستخدام علاقة المقلوب في المعادلة (٥ , ٤) نجد أن

$$\frac{d}{dx}[ln\ (x)] = \frac{1}{x} \tag{٤ , ٨}$$

ومن الممكن إيجاد مُشتقة الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية لأي أساس a باستخدام نتائج البند (١ , ٢) والمشتقات أعلاه. على سبيل المثال ، نجد من المعادلة (١ , ٨) أن $log_a(x) = \frac{ln\ (x)}{ln\ (a)}$.

وبهذا تكون مشتقة $log_a(x)$ هي مشتقة $ln\ (x)$ مقسومة على $ln\ (a)$. وبالمثل فإن مشتقة a^x تُساوي a^x مضروباً بالعدد $ln\ (a)$[٨].

(٤ , ٤) الضرب وخارج القسمة
Products & Quotients

تعلمنا من الخاصية الخطية المقدمة في المعادلة (٣ , ٤) كيفية اشتقاق مجموع دالتين أو أكثر، $y = u(x) + v(x)$ حيث كل من u و v دالة في المتغير x، ولكن كيف يمكننا اشتقاق حاصل الضرب $y = u(x)v(x)$ ؟ للإجابة عن ذلك نستعين بالمعادلة (١ , ٤) مع ملاحظة إمكانية كتابة $u(x + \delta x)$ و $v(x + \delta x)$ على النحو $u + \delta u$ و $v + \delta v$ على التوالي ، حيث δu و δv تغيران صغيران للقيمتين u و v ناتجان عن التغير δx. ولذا باستخدام تعريف المشتقة نجد

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0}\left[\frac{(u + \delta u)(v + \delta v) - uv}{\delta x}\right] = \lim_{\delta x \to 0}\left[u\frac{\delta v}{\delta x} + v\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u \delta v}{\delta x}\right]$$

---

(٨)

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x\, ln(a)$$

$$\frac{d}{dx}[log_a(x)] = \frac{1}{x\, ln\,(a)}$$

وبأخذ النهاية عندما $\delta x \to 0$ نحصل على

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \qquad (٤,٩)$$

لأن $\frac{\delta u \delta v}{\delta x} \to 0$. من الممكن تعميم هذه النتيجة لحاصل ضرب أي عدد من الدوال، وذلك باستخدام التعريف أو وضع $v = fg$[٩].

دعنا نوضح استخدام القاعدة (٩ , ٤) بالمثال $y = 2^x(x^3 - 1)$. هنا $u = 2^x$ و $v = x^3 - 1$. ومن ثم فإن $u' = 2^x ln2$ وأن $v' = 3x^2$. وعليه فإن

$$\frac{d}{dx}[2^x(x^3 - 1)] = 2^x[3x^2 + (x^3 - 1)ln2]$$

عادة يتم تطبيق القاعدة (٩ , ٤) فإننا نقوم بذلك مباشرة دون اللجوء إلى تعويض الدالتين u و v وذلك بملاحظة أن القاعدة تنص على أن مشتقة حاصل ضرب دالتين تساوي حاصل ضرب الدالة الأولى بمشتقة الدالة الثانية مضافاً إلى ذلك حاصل ضرب الدالة الثانية بمُشتقة الدالة الأولى.

إن إيجاد المُشتقات العليا لحاصل ضرب دالتين يؤدي إلى معادلة رديفة لمفكوك ذي الحدين (١١ , ١) ، تُسمى مبرهنة لايبنز وتنص على[١٠]

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv) = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{d^r u}{dx^r}\frac{d^{n-r}v}{dx^{n-r}} \qquad (٤,١٠)$$

---

(٩) $(uvw)' = uvw' + uv'w + u'vw$

(١٠) $(uv)'' = uv'' + 2u'v' + u''v$

يمكن الحصول على مُشتقة خارج القسمة $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ بملاحظة أن $u = vy$ ومن ثم استخدام قاعدة الضرب لنجد أن $u' = vy' + yv'$. ومن ثم فإننا نخلص إلى أن

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vu' - uv'}{v^2} \qquad (٤,١١)$$

وكتطبيق مباشرة على هذه القاعدة دعنا نقوم بحساب مشتقة $tanx$

$$\frac{d}{dx}(tanx) = \frac{d}{dx}\left(\frac{sinx}{cosx}\right) = \frac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x} = sec^2x$$

لاحظ أننا استخدمنا معرفتنا بمُشتقة كل من $sinx$ و $cosx$. كما أننا استخدمنا المتطابقة $cox^2x + sin^2x = 1$ والمتطابقة $\frac{1}{cosx} = secx$. من الممكن استخدام الأسلوب نفسه لإثبات أن مُشتقة $cotx$ تساوي $-cosec^2x$. كما أنه من الممكن استخدام مُشتقة $tanx$

لإيجاد مُشتقة $tan^{-1}x$ فنجد أن مُشتقة $y = tan^{-1}xy = tan^{-1}x$ $tan^{-1}xtan^{-1}x$ تساوي مقلوب المقدار $1 + x^2 1 + x^2$[١١].

---

(١١)

$$\frac{d}{dx}(tanx) = sec^2x$$

$$\frac{d}{dx}(tan^{-1}x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(cotx) = -cosec^2x$$

(٤ , ٥) تحصيل الدوال

Functions of Functions

تعلمنا في البنود السابقة لهذا الفصل كيفية اشتقاق دوال القوة ، الدوال الأسية ، الدوال اللوغاريتمية ، الدوال المثلثية ، والتركيبات الحسابية لهذه الدوال. سنرى في هذا البند كيفية إيجاد مشتقة دوال أكثر تعقيداً باستخدام معرفتنا للمشتقات الأساسية ، مثل $y = ln\ (2 + cosx)$ أو $y = Asin^2(\omega x + \varphi)exp\ (-kx)$ حيث A ، ω ، φ ، k ثوابت.

لإنجاز ذلك نحتاج إلى قاعدة مهمة جداً وهي قاعدة السلسلة. تنص قاعدة السلسلة على أنه إذا كانت y دالة في المتغير u وكانت u دالة في المتغير x فإن $\frac{dy}{dx}$ تكون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \qquad (٤ , ١٢)$$

وباستخدام هذه القاعدة لإيجاد مُشتقة المثال الأول المقدم أعلاه ، نضع $y = ln\ (u)$ و $u = 2 + cosx$ فيكون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \times (-sinx) = \frac{-sinx}{2 + cosx}$$

ودوال كثيرة أخرى مثل $y = secx$ و $y = cosecx$ هي دوال على الصورة $y = u^{-1}$[١٢].

ومن ثم فإن مشتقاتها هي $\frac{dy}{dx} = -u^{-2}\frac{du}{dx} = \frac{-u'}{u^2}$. في الحقيقة يمكن الحصول على قاعدة خارج القسمة (٤ , ١١) من قاعدة الضرب (٤ , ٩) باعتبار $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$.

---

(١٢) $\frac{d}{dx}(secx) = secxtanx$

$\frac{d}{dx}(cosecx) = -cosecxcotx$

إن برهان القاعدة (٤ , ١٢) يتم باستخدام خارج القسمة وملاحظة أن العلاقة صحيحة للزيادات الصغيرة δx ، δy ، δu. من الممكن أيضاً تعميم قاعدة السلسلة لتشمل دوال أكثر تعقيداً ، على سبيل المثال ، إذا كانت $y = sin[ln(2 + cosx)]$ فإننا نجد بوضع $y = sinu$ ، $u = ln\ (v)$ ، $v = 2 + cosx$ أن

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dv} \times \frac{dv}{dx} \\ &= (cosu)\left(\frac{1}{v}\right)(-sinx) \\ &= \frac{-cos[ln(2 + cosx)]sinx}{2 + cosx}\end{aligned}$$

لاحظ أنه من الممكن تطبيق قاعدة السلسلة دون الحاجة إلى التعويض المباشر عن الدوال u ، v.

لاحظ أيضاً أنه من الممكن استخدام قواعد الاشتقاق الأساسية أكثر من مرة لإيجاد مُشتقة دالة ما. على سبيل المثال ، إذا كانت $y = xln[x(2 + cosx)]$ فإننا نستخدم قاعدة الضرب للدالتين x و $ln\ (u)$ حيث u هي نفسها حاصل ضرب الدالتين x و $2 + cosx$. ولذا فإن $\frac{dy}{dx} = xu^{-1}\frac{du}{dx} + ln\ (u)$ حيث $\frac{du}{dx} = -xsinx + 2 + cosx$.

في نهاية هذا البند نقدم حالة خاصة مهمة من قاعدة السلسلة وهي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \qquad (٤ , ١٣)$$

وتُستخدم هذه القاعدة الخاصة بإيجاد مشتقة المعادلات الوسيطية ، أي عندما تكون كل من x و y دالة في متغير واحد t. وكمثال على ذلك ، لاحظ $x = acos\theta$ و $y = bsin\theta$ هي المعادلات الوسيطية للقطع الناقص. وعليه فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{-bcot\theta}{a}$.

(٤ , ٦) القيم العظمى والصغرى

Maxima & Minima

إن إحدى الحالات المهمة لميل المماس للمنحنيات والتي لها تطبيقات عديدة هي ايجاد النقاط التي يكون عندها ميل المماس يساوي صفراً. أي حلول المعادلة

$$\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (٤ , ١٤)$$

تُسمى هذه النقاط ، النقاط الحرجة وكما يوحي إسمها فإنها النقاط التي تبقى عندها قيمة y ثابتة على الرغم من التغير القليل في قيمة x. أي أن هذه النقاط تمثل مواقع التوازن.

باستثناء النقاط التي يقترب فيها y من عدد ثابت عندما يقترب x من المالانهاية كما هو الحال للدالة $y = exp\ (-x)$ فإن المعادلة (١٤ , ٤) تتحقق في الحالات التالية:-

١- عند قيمة عظمى (تشبه قمة الجبل) حيث yy يتزايد قبلها ويتناقص بعدها.

٢- عند قيمة صغرى (وتشبه هذه قاع الوادي) حيث yy يتناقص قبلها ويتزايد بعدها.

٣- عند نقطة انقلاب حيث يكون تقعر yy للأعلى في أحد الجانبين وللأسفل في الجانب الآخر.[١٣]

تُسمى القيمة العظمى أو القيمة الصغرى ، قيمة قصوى ويمكن معرفتها بدراسة إشارة الميل $\frac{dydy}{dxdx}$ حيث تتغير إشارة الميل عند المرور بهذه النقطة فيكون

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0 \ \text{عند العظمى و}\ \frac{d^2y}{dx^2} > 0 \ \text{عند الصغرى} \qquad (٤ , ١٥)$$

---

(١٣) المترجم: وقع المؤلف بخطأ بسيط عند وصفه للقيم العظمى والصغرى وقمت بتصحيح هذا الخطأ عند الترجمة.

وعلى الرغم من أن $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ عند نقطة الإنقلاب[١٤]، إلاّ أن كون المُشتقة الثانية تساوي صفراً لا يعني وجود نقطة انقلاب. على سبيل المثال لكل من $y = x^3$ و $y = x^4$ لدينا $\frac{dy}{dx} = 0$ و $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ عند نقطة الأصل. ولكننا نجد من بياني x^3 و x^4 في البند (٢,٣) أن نقطة الأصل قيمة صغرى للدالة x^4 ونقطة انقلاب للدالة x^3.

ولتوضيح المفاهيم المقدمة أعلاه، نأخذ ذرة الهيدروجين كمثال على ذلك. نعلم من ميكانيكا الكم أن احتمال أن يبعد الإلكترون مسافة r عن النواة هو

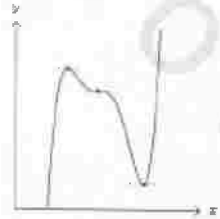
$$p(r) = \frac{4r^2}{a_o^3} e^{-2r/a_o}$$

حيث الثابت $a_o = 0.5292 \times 10^{-10}$ متراً. وعليه فإن بعد الإلكترون يتحقق عند قيمة عظمى للدالة $p(r)$. واستناداً إلى المعادلة (١٤ , ٤) فإن ذلك يتحقق عندما يكون

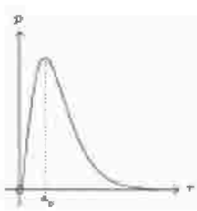
$$\frac{dp}{dr} = \frac{8r}{a_o^3}\left(1 - \frac{r}{a_o}\right) e^{-2r/a_o} = 0$$

أي عندما يكون $r = 0$ أو $r = a_o$ أو $r \to \infty$. ولكن القيمة الوحيدة من بين هذه القيم التي تجعل $\frac{d^2p}{dr^2} < 0$ هي $r = a_o$ وبهذا فموقع الإلكترون يكون على الأغلب عندما $r = a_o$[١٥]. يوجد العديد من المسائل الفيزيائية التي يكون إيجاد

(١٤)



(١٥)



القيم القصوى (الصغرى أو العظمى) لها على قدر كبير من الأهمية ، مثل، مسألة الطاقة الحرة لجبز أو مسألة عدم مواءمة نموذج للقراءات العملية لتجربة ما. ومثال من الحياة اليومية هو طاقة الجاذبية الكامنة حيث تستقر الأجسام في الماء عند أقرب عمق، وعليه فإن القيمة الصغرى هي نقطة التوازن والقيمة العظمى هي نقطة عدم التوازن.

(٤ , ٧) الإشتقاق الضمني واللوغاريتمي
Implicit & Logarithmic Differentiation

لقد افترضنا فيما سبق أن جميع الدوال y هي دوال صريحة في x ، ولكن غالباً ما تكون العلاقة بين y و x من التعقيد بحيث لايمكن إيجاد y كدالة صريحة في x. ولكي نجد المشتقة في مثل هذه الحالات نقوم باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى x لنحصل على المُشتقة الأولى بدلالة x و y. فمثلاً ، إذا كان $x^2y + siny = 6$ فإن

$$\frac{d}{dx}(x^2y) + \frac{d}{dx}(siny) = \frac{d}{dx}(6)$$

حيث استخدمنا الخاصية الخطية (٣ , ٤) في الطرف الأيسر. وباستخدام قواعد الإشتقاق نحصل على

$$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy + cosy\frac{dy}{dx} = 0$$

ومن ذلك نرى أن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{x^2 + cosy}$$

تُسمى هذه الطريقة ، الإشتقاق الضمني[١٦].

يُفَضل في أحيان كثيرة أخذ لوغاريتم طرفي المعادلة قبل الاشتقاق (على الرغم من أن y تكون دالة صريحة في x) ، وخاصة عندما تحتوي الدالة على العديد من الحدود المضروبة والمقسومة مثل

$$y = \frac{(x+5)\sqrt{(7+2x)^3}}{(2x^3+1)cosx}$$

حيث نستطيع باستخدام قواعد اللوغاريتم المقدمة في البند (٢ , ١) تحويل الطرف الأيمن إلى مجموع حدود أبسط

$$ln(y) = ln(x+5) + \frac{3}{2}ln(7+2x) - ln(2x^3+1) - ln\ (cosx)$$

وبهذا نستطيع استخدام الاشتقاق الضمني لإيجاد المُشتقة بسهولة[١٧]. ومن الممكن استخدام هذه الطريقة أيضاً عندما يكون لدينا دوال تحتوي على x كقوة. مثل، $y = (x^2+1)^x$. وبأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل على

$$ln(y) = xln(x^2+1)$$

وباشتقاق الطرفين ضمنياً والتبسيط نجد أن

$$\frac{dy}{dx} = y\left[ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1}\right]$$

(١٦) $\frac{d}{dx} = \frac{dy}{dx} \times \frac{d}{dy}$

(١٧) $\frac{d}{dx}[ln\ (y)] = \frac{dy}{dx} \times \frac{1}{y}$

تمارين

(٤ , ١) استخدم تعريف المُشتقة فقط لإيجاد مُشتقة الدوال التالية

(١) $y = cosx$

(٢) $y = x^n y = x^n$ حيث nn عدد موجب.

(٣) $y = \frac{1}{x}$

(٤) $y = \frac{1}{x^2}$

(٤ , ٢) جد قيم xx التي تكون عندها الدوال التالية غير قابلة للاشتقاق

(١) $y = |x|$

(٢) $y = tanx$

(٣) $y = e^{-|x|}$

(٤ , ٣) أثبت أن ميل العمودي على المستقيم $y = mx + c$ يساوي $\frac{-1}{m}$.

(٤ , ٤) استخدم الخاصية الخطية للاشتقاق ومجموع المتتالية الهندسية غير المنتهية لإثبات أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

حيث $|x| < 1$. ومن ثم احسب قيمة المجموع.

(٤ , ٥) احسب مشتقة $y = cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ حيث $\left|\frac{x}{a}\right| < 1$. هل النتيجة صحيحة لكل قيم y ؟ ماهي مشتقة $tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ ؟

(٤ , ٦) جد المشتقة الأولى بالنسبة إلى xx لكل من الحدود التالية

(١) $(2x+1)^3$

(٢) $\sqrt{3x-1}$

(٣) $cos5x$

(٤) $sin(3x^2+7)$

(٥) $tan^4(2x+3)$

(٦) $xexp(-3x^2)$

(٧) $xln(x^2+1)$

(٨) $\frac{sinx}{x}$

(٤ , ٧) استخدم الاشتقاق اللوغاريتمي لحساب مُشتقة $y = a^x$ حيث a عدد ثابت.

(٤ , ٨) احسب $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يلي

(١) $x = t(t^2+2)$ و $y = t^2$

(٢) $x^2 = ysin(xy)$

(٩ , ٤) جد النقاط الحرجة وصنفها للدوال التالية في المتغير x أو المتغير r حيث ε ، σ ، a_o أعداد ثابتة

(١) $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{6} - x^3$

(٢) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

(٣) $U(r) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right]$

(٤) $p(r) = \frac{r^2}{8a_o^3}\left(2 - \frac{r}{a_o}\right)^2 e^{-r/a_o}$