الفصل السابع

الأعداد المركبة
Complex Numbers

(٧ , ١) تعريف
Definition

إذا ضربنا عدداً صحيحاً أو عدداً كسرياً ، سالباً كان أم موجباً بنفسه فإن الناتج يكون دائماً عدداً غير سالب. الآن ماهو الجذر التربيعي للعدد -9 ؟ للإجابة عن هذا السؤال نحتاج إلى تقديم مفهوم العدد التخيلي والذي يرمز له بالرمز i والمعرف على أنه الجذر التربيعي للعدد -1

$$i^2 = -1 \qquad (٧ , ١)$$

حاصل ضرب العدد الحقيقي b حيث $b^2 \geq 0$ بالعدد i هو عدد تخيلي أيضاً. إذا كان a عدداً حقيقياً فالمجموع z للعددين a و ib

$$z = a + ib \qquad (٧ , ٢)$$

يُدعى عدداً مركباً. إن كتابة العدد المركب على هذه الصورة لا يسبب صعوبة جوهرية للمفهوم ولكنه يلقي الضوء على طبيعة توليد مثل هذه الأعداد ، وهي مكونة من جزأين حقيقي وتخيلي

$$Re\{z\} = a \quad \text{و} \quad Im\{z\} = b \qquad (٧,٣)$$

إن اعتبارنا $Im\{z\}$ هو b وليس ib كما هو متوقع يرجع إلى أنه يمثل سعة المركبة التخيلية.

على الرغم من أن إنشاء الأعداد المركبة يوحي بشيء من العشوائية، إلاّ أنها تُستخدم في العديد من التطبيقات التي تخص مسائل الحياة العملية. ولكن هدفنا هنا يقتصر على دراسة الخواص الأساسية للأعداد المركبة.

(٧ , ٢) أساسيات جبرية
Basic Algebra

نبدأ بالعمليتين الأساسيتين وهما عملية الجمع وعملية الطرح. لجمع أو طرح الأعداد المركبة نقوم بجمع أو طرح مركباتها الحقيقية والتخيلية

$$(a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i(b \pm d) \qquad (٧,٤)$$

حيث a ، b ، c ، d أعداد حقيقية[١]. لاحظ أن افترضنا ضمنياً عند كتابتنا لحدود الأعداد المركبة بأنها تتمتع بالخواص الجبرية نفسها التي تمتع بها الأعداد الحقيقية ما عدا استبدال i^2 بالعدد -1. وعليه فمن السهل رؤية أن حاصل ضرب العددين المركبين $a + ib$ و $c + id$ هو

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc) \qquad (٧,٥)$$

(١) $(1 + 2i) - (5 - i) = -4 + 3i$

لأن $i^2bd = -bd$ [٢]. أما لقسمة الأعداد المركبة فنحتاج إلى مفهوم المرافق المركب للمقام وهو مانبدأ به قبل تعريف القسمة.

يُعَرّف مرافق العدد المركب z ويرمز له بالرمز z^* على أنه العدد الذي تكون مركبته الحقيقية هي المركبة الحقيقية للعدد z ومركبته التخيلية تأخذ إشارة عكس إشارة المركبة التخيلية للعدد z.

أي أن $Re\{z^*\} = Re\{z\}$ وأن $Im\{z^*\} = -Im\{z\}$. وبهذا يكون

$$z^* = (a + ib)^* = a - ib \qquad (٧,٦)$$

تتمتع الأعداد المركبة ومرافقتها بالعلاقات التالية

$$\begin{aligned} z + z^* &= 2a = 2Re\{z\} \\ z - z^* &= 2ib = 2iIm\{z\} \\ zz^* &= a^2 + b^2 = |z|^2 \end{aligned} \qquad (٧,٧)$$

وسنُعَرّف معنى $|z|$ لاحقاً. الملاحظة المهمة في العلاقات (٧,٧) هي أن حاصل الضرب $zz^* = a^2 + b^2$ عدداً حقيقياً؛ لأنه لا يحتوي على العدد i. بهذا نستطيع حساب المركبة الحقيقية والمركبة التخيلية لخارج قسمة عددين مركبين وذلك بضرب البسط والمقام بمرافق المقام

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} \qquad (٧,٨)$$

---

(٢) $(1 + 2i)(3 - i) = 5 + 5i$

على سبيل المثال، لحساب $\frac{1+2i}{3-i}$ نضربه بالعدد $\frac{3+i}{3+i}$ لنحصل على مقام $3^2+1^2=10$ وبسط $1+7i$ فيكون الناتج هو العدد $\frac{1}{10}+i\frac{7}{10}$.

(٧ ,٣) مخطط أرجاند

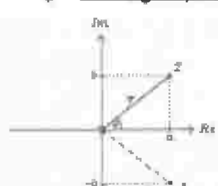
The Argand Diagram

فيما سبق نظرنا إلى الأعداد المركبة من الناحية الجبرية ولكن في كثير من الأحيان يكون من المناسب النظر إلى هذه الأعداد من الناحية الهندسية أيضاً وهذا أمر سهل بمساعدة مخطط أرجاند حيث يمثل المحور الأفقي (محور x) المركبة الحقيقية ويمثل المحور الرأسي (محور y) المركبة التخيلية. وعليه إذا كانت احداثيات النقطة (x,y) هي (a,b) فإن هذه النقطة تقابل العدد المركب $a+ib$ ، ومرافقه z^* ماهو إلاّ الإنعكاس في محور السينات. من الممكن تمثيل نقطة في المستوى بدلالة بُعدها عن نقطة الأصل ، وليكن r والزاوية θ التي يصنعها نصف القطر r مع الاتجاه الموجب لمحور السينات مقاسة باتجاه عكس إتجاه عقارب الساعة. يُسمى r في هذا النظام ، معيار أو مقدار أو سعة العدد z ، كما تُسمى الزاوية θ الإزاحة الزاوية أو زاوية الطور للعدد z.

باستخدام حساب مثلثات بسيطة كالمقدمة في البند (٢ ,٣) نستطيع إيجاد علاقات بين r و θ ، وبين a و b في مخطط أرجاند[٣] وهي

$$a = r\cos\theta \qquad \text{و} \qquad b = r\sin\theta \qquad (٧,٩)$$

أو بصورة عكسية

(٣)


$$r^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{و} \qquad \theta = tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \qquad (٧,١٠)$$

وبمقارنة (٧ , ٧) مع (٧ , ١٠) نجد أن $zz^* = r^2$ حيث $r = |z|$ هو معيار العدد المركب. للتعامل مع الجزء الثاني للعلاقة (٧ , ١٠) لاحظ أنه إذا كان $z = -1 - i$ فنجد بتمثيل z بواسطة مخطط أرجاند أن الزاوية θ تساوي $\frac{5\pi}{4}$ راديان أو 225° ، وعلى الرغم من أن هذه إحدى قيم $tan^{-1}(1)$ إلا أن القيمة الأخرى للمقدار $tan^{-1}(1)$ وهي 45° لا تمثل الإزاحة الزاوِّية الصحيحة. وملاحظة أخيرة هي أن قيمة θ تقع بين 0 و 2π ، لأن إضافة أو طرح مضاعفات 360° إلى الزاوية θ يؤدي إلى الحصول على النقطة نفسها في مخطط أرجاند.

(٧ , ٤) القوى التخيلية

The Imaginary Exponential

لعل أهم نتيجة في التحليل المركب هي النتيجة التي تتعلق بحساب قوة العدد التخيلي

$$e^{i\theta} = cos\,\theta + i\,sin\,\theta \qquad (٧,١١)$$

إن هذه المساواة ليست واضحة من الوهلة الأولى ولكن من الممكن التحقق من صحتها بسهولة بتعويض $x = i\theta$ في متسلسلة تايلور (٦ , ٦) وفصل القوى الفردية عن القوى الزوجية للمتغير θ. الآن ، بمقارنة ذلك مع المساويتين (٦ , ٤) و(٦ , ٥) مع ملاحظة أن $i^2 = -1$ نحصل على المعادلة (٧ , ١١). إن ضرب العدد r بالعدد

$e^{i\theta}$ [٤] يسمح لنا بكتابة العدد المركب بدلالة المعيار والإزاحة الزاوية

$$a + ib = r(\cos\theta + \sin\theta) = re^{i\theta} \qquad (٧,١٢)$$

حيث θ, r, b, a هي كما في المعادلتين (٩ ,٧) و (١٠ ,٧).

سنرى قريباً أن الصيغة الأسية للعدد المركب تُسهل علينا عملية الضرب والقسمة، كما أنها مهمة جداً لإيجاد الجذور والتعامل مع اللوغاريتمات.

لنفرض أن z_1 و z_2 عددان مركبان لهما السعتان r_1 و r_2 والإزاحتان الزاوّيتان θ_1 و θ_2 على التوالي. أي أن $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ و $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$. عندئذ ، باستخدام قوانين الأسس المُقَدمة في البند (١،٢) نجد أن

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \qquad (٧,١٣)$$

أي أنه بمقارنة الطرف الأيمن مع الشكل القياسي $re^{i\theta}$ نجد أن معيار حاصل الضرب يساوي حاصل ضرب المعيارين وأن الإزاحة الزاوّية لحاصل الضرب يساوي مجموع الإزاحتين الزاوّيتين. وبصورة مشابهة نجد أن معيار خارج القسمة يساوي خارج قسمة المعيارين والإزاحة الزاوّية تساوي الفرق بين الإزاحتين الزاوّيتين

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} \qquad (٧,١٤)$$

---

(٤) $e^{i\pi/4} = (1+i)/\sqrt{2}$

$e^{i\pi/2} = i$

$e^{i3\pi/4} = (-1+i)/\sqrt{2}$

$e^{i\pi} = -1$

إن حاصل ضرب عدداً مركباً مع مرافقه هو حالة خاصة من المعادلة (٧،١٣) حيث $z_2 = z_1^*$. ومن ثم فإن $r_2 = r_1$ و $\theta_2 = -\theta_1$ ونحصل مباشرة على النتيجة التي رأيناها سابقاً $zz^* = |z|^2$.

(٧ , ٥) الجذور واللوغاريتمات

Roots & Logarithms

تساءلنا في بداية هذا الفصل عن إمكانية إيجاد الجذر التربيعي للعدد -9 ، ومن الواضح أنه من الممكن الآن التخمين بأن جذري العدد -9 هما $\pm 3i$. والسؤال المطروح الآن، هل توجد طريقة عامة لإيجاد الجذور التربيعية للعدد المركب ؟ أي إيجاد قيم العدد المركب z الذي يحقق $z^2 = -9$. بكتابة الطرف الأيمن (-9) على الصورة $re^{i\theta}$ نجد أن $z^2 = -9 = 9e^{i(\pi \pm 2n\pi)}$ حيث n عدد صحيح ، لأن سعة العدد -9 هي 9 والإزاحة الزاوية هي $\pi \pm 2n\pi$ مقاسة بالراديان.

الآن ، بأخذ القوة $\frac{1}{2}$ (الجذر التربيعي) لطرفي المساواة نجد استناداً إلى قوانين البند (١ , ٢) أن $z = 9^{1/2}e^{i(\pi+2n\pi)/2} = 3e^{i\left(\frac{\pi}{2}\pm n\pi\right)}$. وبتعويض قيمة زوجية للعدد n (مثلاً ، $n = 0$) نحصل على الحل $z = 3i$ ، وبتعويض قيمة فردية للعدد n (مثلاً ، $n = 1$) نجد أن $z = -3i$.

كمثال آخر على مثل هذه الحسابات ، دعنا نحسب الجذر التكعيبي للعدد i أي حلول المعادلة $z^3 = i$. في هذه الحالة أيضاً ، نضع الطرف الأيمن على الصيغة $re^{i\theta}$ فنجد $z^3 = i = e^{i(\pi/2 \pm 2n\pi)}$ لأي عدد صحيح n. وبرفع طرفي المعادلة للقوة $\frac{1}{3}$ نجد أن $z = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\pm 2n\pi\right)/3} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}\pm\frac{2n\pi}{3}\right)}$ ونحصل على ثلاثة حلول مختلفة بتعويض القيم $n = 0,1,2$ ، وهذه الحلول هي $(\sqrt{3}+i)/2$ و $(-\sqrt{3}+i)/2$ و $-i$ على التوالي. لاحظ أن جميع القيم الأخرى للعدد n تولد لنا القيم الثلاث أعلاه فقط (على سبيل المثال $n = 3$ يماثل $n = 0$).

باستخدام مخطط أرجاند نجد أن الجذور التكعيبية للعدد i هي رؤوس مثلث متساوي الأضلاع[٥].

إن هذا التوزيع المنتظم للحلول على محيط الدائرة هو ظاهرة عامة لمثل هذه المسألة حيث أن الجذور m لعدد مركب تقع على رؤوس مضلع منتظم من النوع m.

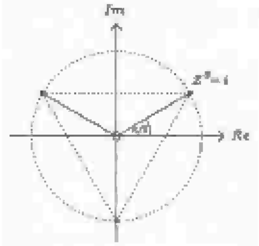
إضافة إلى استخدام الصيغة $re^{i\theta}$ لحساب الجذور والقوى فمن الممكن الإستفادة منها لتمديد مجال اللوغاريتهات. نعلم أن مجال اللوغاريتم في الأعداد الحقيقية هو الأعداد الحقيقية الموجبة ، ولكن ، الآن بالإستعانة بقواعد البند (٢ , ١) نستطيع إيجاد لوغاريتم أي عدد

$$ln\left(re^{i\theta}\right) = ln(r) + i\theta \qquad (٧ , ١٥)$$

حيث السعة r موجب بالتعريف والإزاحة الزاوّية θ تساوي صفراً في حالة الأعداد الحقيقية. وبما أن الإزاحة الزاوّية θ تساوي $\theta \pm 2n\pi$ حيث n عدد صحيح فنجد أن المركبة التخيلية للوغاريتم تأخذ عدداً غير منته (ولكنه متقطع) من القيم ، القيمة الرئيسية هي القيمة الواقعة بين $-\pi$ و π راديان كما هو متفق عليه.[٦]

---

(٥)



(٦) $ln(2i) = ln\left[2e^{i(\pi/2 \pm n\pi)}\right] = ln\ 2 + i(\pi/2 \pm n\pi)$

(٦ , ٧) مبرهنة ديموڤير وحساب المثلثات
De Moivre's Theorem & Trigonometry

نحصل على إحدى النتائج المهمة في حساب المثلثات من بند القوى التخيلية (٤ , ٧) والمعادلة (٥ , ١)

$$\left(e^{i\theta}\right)^m = e^{im\theta}$$

وبتوظيف المعادلة (١١ , ٧) على طرفي المعادلة أعلاه نحصل على مبرهنة ديموڤير

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^m = \cos(m\theta) + i\sin(m\theta) \qquad (٧ , ١٦)$$

وهذا بدوره يزودنا ، على سبيل المثال ، بقانون ضعف الزاوية لكل من دالتي الجيب وجيب التمام ، فمثلاً بوضع $m = 2$ نجد أن

$$\cos(2\theta) + i\sin(2\theta) = \cos^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta$$

وبمقارنة المركبات الحقيقية والمركبات التخيلية نحصل مباشرة على قانوني ضعف الزاوية للمعادلتين (١٤ , ٣) و (١١ , ٣) على التوالي.

وعلاقة أخرى بين القوى التخيلية وحساب المثلثات نحصل عليها من المعادلة (١١ , ٧) ومرافقها المركب $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$. بجمع المعادلتين نحصل على صيغة للدالة $\cos\theta$ وبطرحها نحصل على صيغة للدالة $\sin\theta$.

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad و \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad (٧ , ١٧)$$

وبقسمة صيغة $sin\ \theta$ على صيغة $cos\ \theta$ نحصل مباشرة على صيغة للدالة $tan\ \theta$. تتيح لنا هذه العلاقات (علاوة على فوائد أخرى) التعبير عن قوى دالتي الجيب وجيب التمام بدلالة مضاعفات زوايتيهما. كمثال بسيط على ذلك

$$sin^2\theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}}{-4} = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}}{2}\right)\right]$$
$$= (1 - cos(2\theta))/2$$

وهذا يتفق مع المعادلة (١٥ , ٣).

(٧ , ٧) الدوال الزائدية

Hyperbolic Functions

يوجد مرادفات لجميع الدوال المثلثية المقدمة في الفصل الثالث وتُسمى هذه المرادفات الدوال الزائدية (أو المثلثية الزائدية) ، ولتمييزها عن الدوال المثلثية يضاف الحرف h لنهاية رمز الدالة المثلثية لنحصل على رمز للدالة الزائدية الرديفة. فمثلاً ، $sinh$، $cosh$ ، $tanh$ هي دوال sin ، cos ، tan الزائدية على التوالي. سنرى العلاقة بين هذه الدوال والأعداد المركبة لاحقاً ، ولكن لنبدأ أولاً بتعريف $sinh\ x$ و $cosh\ x$

$$(٧ , ١٨) \quad sinh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad و \quad cosh = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

وبصورة مطابقة للمعادلة (٣ , ٣) تُعَّرف $tanh\ x$ على أنه خارج قسمة $sinh\ x$ على $cosh\ x$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \qquad (٧,١٩)$$

لتوظيف خصائص الدالة الأُسية المقدَمة في البند (٢,٤) وعلى وجه الخصوص سلوك $y = e^{x}$ و $y = e^{-x}$ عندما $x \to \pm\infty$ وعند $x = 0$ نستطيع الحصول على بيانات الدوال $y = \sinh x$ ، $y = \cosh x$ ، $y = \tanh x$[٧].

لإيجاد العلاقة بين الدوال الزائدية والدوال المثلثية (الدائرية) نعوض $\theta = ix$ في المعادلة (٧,١٧) ونقارن ذلك مع المعادلة (٧,١٨) لنحصل على

$$\sin(ix) = i \sinh x \quad \text{و} \quad \cos(ix) = \cosh x \qquad (٧,٢٠)$$

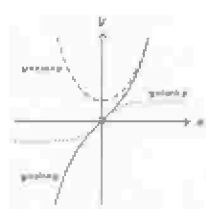
من هذا نرى أن الدوال الزائدية تربطها علاقات مع دوال مثلثية زواياها تخيلية. بتوظيف المعادلة (٧,٢٠)، نستطيع الحصول على متطابقات للدوال الزائدية مكافئة للمتطابقات التي قدمناها في البند (٣,٣). على سبيل المثال ، بما أن $\sin^2(ix) + \cos^2(ix) = 1$ حسب المعادلة (٣,٨) نجد أن

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad (٧,٢١)$$

طريقة المعالجة هذه تؤدي إلى اكتشاف قاعدة أوسبورن التي تنص على أن متطابقات الدوال الزائدية هي نفس متطابقات الدوال المثلثية مع الاختلاف في إشارة $\sinh^2 x$ أو الدوال التي تحوي $\sinh^2 x$ (مثل $\tanh^2 x = \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x}$).[٨]

---

(٧)



(٨) $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$ و $1 - \coth^2 x = -\operatorname{cosech}^2 x$

مُشتقات وتكاملات الدوال الزائدية نحصل عليها بتوظيف خواص إشتقاق وتكامل الدالة الأسية المناسبة. فاستخدام المعادلة (٧, ١٨) ومادة الفصل الرابع نجد أن

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x \quad \text{و} \quad \frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x \qquad (٧, ٢٢)$$

وهكذا.[٩] أما مشتقات الدوال الزائدية العكسية فنحصل عليها بطريقة مماثلة لنظيراتها في الدوال المثلثية العكسية. فمثلاً ، بإشتقاق $x = \sinh y$ بالنسبة إلى x واستخدام المعادلة (٧, ٢٠) نحصل على $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \sin^{-1} x$

$$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (٧, ٢٣)$$

وباستخدام المعادلتين (٧, ١٨) و (٧, ١٩) نستطيع إيجاد صيغ للدوال الزائدية باستخدام اللوغاريتمات ، مثل

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad (٧, ٢٤)$$

حيث $|x| \leq 1$ (لأن $|\tanh x| \leq 1$).

وباشتقاق طرفي المعادلة (٧, ٢٤) نستطيع إيجاد مُشتقة $\tanh^{-1} x$[١٠].

---

(٩) $\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$

(١٠) $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}$

(٧ , ٨) بعض الخواص الهامة

Some Useful Properties

ذكرنا سابقاً أن الأعداد المركبة تقدم لنا طرقاً جيدة لمعالجة العديد من المسائل النظرية المتقدمة. وعلى الرغم من أن الأمثلة التي نقدمها هنا هي أمثلة ذات طبيعة سهلة ، إلاّ أننا سنذكر خواص الأعداد المركبة التي توضح أهمية هذه الأمثلة ، على الأخص المعادلة (١١ , ٧) والخاصية الخطية للجمع والطرح. (مجموع المركبات الحقيقية تساوي المركبة الحقيقية للمجموع). وبهذا يكون

$$\sum_{k=1}^{N} Re\{z_k\} = Re\left\{\sum_{k=1}^{N} z_k\right\} \qquad (٧ , ٢٥)$$

حيث z_k هو العدد المركب في الموقع k و $k = 1,2,3 \cdots, N$. وهذا صحيح أيضاً للمركبات التخيلية والطرح[١١].

إذا كان العدد المركب z دالة في t ، مثل $z = t^2 + i\, cos(t)$ فنجد استناداً إلى الخاصية الخطية (٧ , ٤)

$$\int Re\{z\}\, dt = Re\left\{\int z dt\right\} \quad و \quad \frac{d}{dz}(Re\{z\}) = Re\left\{\frac{dz}{dt}\right\} \qquad (٧ , ٢٦)$$

ويبقى ذلك صحيح أيضاً للمركبات التخيلية.

ترجع أهمية المعادلتين (٧ , ٢٥) و (٧ , ٢٦) إلى أنه غالباً مايكون حساب الطرف الأيمن أسهل من حساب الطرف الأيسر ، ولتوضيح ذلك نأخذ التكامل

(١١)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{sin k\theta}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} Im\left\{\frac{e^{ik\theta}}{k!}\right\} = Im\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k!}\right\}$$

$$I = \int e^{at} \cos(bt) dt \qquad (٧,٢٧)$$

حيث a و b أعداد حقيقية. من الممكن حساب هذا التكامل باستخدام التكامل بالأجزاء مرتين كما في البند (٦,٥) ولكننا سنستخدم الأعداد المركبة لحسابه. ولإنجاز ذلك لاحظ أن الدالة المكاملة تأخذ الصورة

$$\int e^{at} \cos(bt) = \int e^{at} Re\{e^{ibt}\} = Re\{e^{(a+ib)t}\} \qquad (٧,٢٨)$$

الآن، باستخدام الخاصية المبينة في المعادلة (٧,٢٦) نحصل على التكامل السهل التالي

$$I = Re\left\{\int e^{(a+ib)t} dt\right\} = Re\left\{\frac{e^{(a+ib)t}}{a+ib}\right\} + C \qquad (٧,٢٩)$$

حيث C عدد حقيقي ثابت التكامل. وللحصول على المركبة الحقيقية لخارج القسمة في المعادلة (٧,٢٩) نقوم بضرب البسط والمقام بمرافق المقام $a - ib$ ومن ثم بحسابات ليست صعبة نخلص إلى أن

$$\int e^{at} \cos(bt)\, dt = \frac{e^{at}}{a^2 + b^2}[a \cos(bt) + b \sin(bt)] + C$$

لاحظ أيضاً أن المركبة التخيلية تُستخدم لحساب تكامل $e^{at} \sin(bt)$.

تمارين

(١ , ٧) إذا كان $z = 2 + 3i$ فاحسب كل من

(١) $Re\{z\}$

(٢) $Im\{z\}$

(٣) z^*

(٤) $z - z^*$

(٥) $z + z^*$

(٦) z^2

(٧) zz^*

(٢ , ٧) إذا كان $u = 2 + 3i$ و $v = 1 - i$ فجد المركبة الحقيقية والمركبة التخيلية لكل من

(١) $u + v$

(٢) $u - v$

(٣) uv

(٤) $\frac{u}{v}$

(٥) $\frac{v}{u}$

(٧,٣) احسب مايلي إذا كان uu و vv كما في التمرين (٧,٢)

(١) $|u|$

(٢) $|v|$

(٣) $|uv|$

(٤) $\left|\frac{u}{v}\right|$

(٥) $\left|\frac{v}{u}\right|$

(٧,٤) جد المعيار والإزاحة الزاوية (في الفترة من $-\pi$ إلى π) لكل مما يلي ثم عين مواقعها مستعيناً بمخطط أرجاند

(١) 1

(٢) $1+i$

(٣) i

(٤) $-1+i$

(٥) -1

(٦) $1-i$

(٧) $-i$

(٨) $-1-i$

(٧ , ٥) إذا كان $z = 1 + i\sqrt{3}$ فارسم كل مما يلي باستخدام مخطط أرجاند

(١) z

(٢) z^*

(٣) z^2

(٤) z^3

(٥) iz

(٦) $\frac{1}{z}$

(٧ , ٦) حل معادلة الدرجة الثانية $z^2 - z + 1 = 0$.

(٧ , ٧) حل كل من المعادلات التالية ثم ارسم حل الفقرة باستخدام مخطط أرجاند

(١) $z^5 = 1$

(٢) $z^5 = 1 + i$

(٣) $(z+1)^5 = 1$

(٤) $(z+1)^5 = z^5$

(٧ , ٨) استخدم e^{iA} و e^{iB} لإيجاد صيغة كل من $sin(A+B)$ و $cos(A+B)$ المقدمة في البند (٤ , ٣).

(٧ , ٩) استخدم مبرهنة ديموفير لإيجاد كل من $sin\,4\theta$ و $cos\,4\theta$ بدلالة قوى $sin\,\theta$ و $cos\,\theta$.

(٧ , ١٠) أثبت أن $cos^6\theta = (cos\,6\theta + 6\,cos\,4\theta + 12\,cos\,2\theta + 10)/32$.

(٧ , ١١) استخدم المعادلة (٧ , ١٨) لإثبات أن

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

وجد صيغة مشابهة للمقدار $\cosh(x+y)$.

(٧ , ١٢) جد

(١) $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos k\theta}{k!}$$

(٢) $$\int e^{ax} \sin(bx)\, dx$$