الفصل الثامن

المتجهات
Vectors

(٨,١) التعريف والإحداثيات الديكارتية
Definition & Cartesian Coordinates

ربما أن أبسط طريقة لتوضيح المتجه النظر إلى قلم الرصاص كمؤشر ، فطول قلم الرصاص هو كمية قياسية ، أي أنه عدد مرتبط مع وحدة قياس (0.05 متراً لقلم الرصاص). إن ذلك ليس كافياً لاعتبار قلم الرصاص على أنه متجه ، بل نحتاج أيضاً إلى تحديد اتجاهه. وعليه فإن المتجه يتحدد باتجاه وكمية قياسية تُسمى طول أو معيار المتجه وهي عدد موجب. إن العديد من المفاهيم الفيزيائية كالإزاحة والسرعة متجهات وبذلك يجب التعامل معها بطريقة مختلفة عن الكميات القياسية مثل الكتلة والطول والزمن.

سنستخدم الرمز $\vec{X}$ للتعبير عن المتجه والرمز $|\vec{X}|$ للتعبير عن طول المتجه. تُسمى المتجهات ذات الطول 1 مثل $\vec{X}/|\vec{X}|$ متجهات وحدة.

على عكس الكميات القياسية فإننا نحتاج إلى أكثر من عدد لتمثيل المتجه. فمثلاً ، بإسقاط قلم الرصاص على مستوى ثنائي البعد كسطح طاولة فإننا نحتاج إلى عددين لتعريف طوله واتجاهه ، بالتحديد ، نحتاج إلى إزاحتين في اتجاهي x و y لنستطيع الوصول من طرف قلم الرصاص إلى طرفه الآخر. تُسمى هاتان الإزاحتان مُرَكَّبتي

المتجه وهما كميتان قياسيتان تبينان المسافة المقطوعة بموازاة محوري x و y للوصول من طرف إلى الطرف الآخر للمتجه. أي إذا افترضنا أن إحدى طرفي قلم الرصاص هي نقطة الأصل فنستطيع التعبير عن موقع الطرف الحاد للقلم على النحو $x\vec{i} + y\vec{j}$ حيث $\vec{i}$ و $\vec{j}$ متجها وحدة متعامدان ، الأول بإتجاه محور x والثاني بإتجاه محور y.

إذا رفعنا الآن الطرف الحاد للقلم عن سطح الطاولة مع بقاء الطرف الآخر عند نقطة الأصل فإننا نحتاج الآن إلى مركبة ثالثة بإتجاه محور z ومتجه وحدة $\vec{k}$ عمودي على كل من $\vec{i}$ و $\vec{j}$. رياضياً ، نقول أننا انتقلنا من فضاء متجهات ثنائي البعد إلى فضاء متجهات ثلاثي البعد. يأخذ الطرف الحاد للقلم في الفضاء ثلاثي البعد الشكل $\vec{X} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ أو اختصاراً الثلاثي (x, y, z).[1] بتوظيف مبرهنة فيثاغورس نستطيع إيجاد مربع طول المتجه بدلالة مركباته

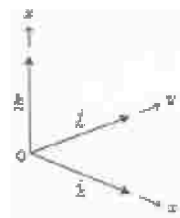
$$\left|\vec{X}\right|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (٨ , ١)$$

من الممكن أيضاً التعبير عن مركبات المتجه الثلاث باستخدام متغيرات ذات دليل سفلي x_m حيث $m = 1,2,3$ وحيث $x = x_1$ و $y = x_2$ و $z = x_3$.

تُسمى متجهات الوحدة المتعامدة مثنى مثنى $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ ، أساس نظام الإحداثيات الديكارتي. لقد تم الإتفاق على اعتبار $\vec{k}$ متجَهاً إلى الأعلى نحونا إذا تخيلنا أننا نشير إلى الأسفل للمستوى xy الإعتيادي. كما أنه من الممكن تبني قاعدة اليد اليمنى لتمثيل $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ حيث يمثل الإبهام $\vec{k}$ وتمثل السبَّابة والوسطى كل من $\vec{i}$ و $\vec{j}$ على التوالي.

---

(١)



على الرغم من أننا سنقصر دراستنا للمتجهات في الفضاءات ثلاثية البعد ، إلاّ أنه من الممكن تعميم ذلك ودراسة المتجهات في الفضاءات ذات البعد N حيث N عدد صحيح أكبر من أو يساوي 3. في الحقيقة بعد اكتشاف الحاسبات الحديثة يستطيع العلماء والمهندسين معالجة متجهات بُعدها مليون $(N = 10^6)$ حيث تُحفظ المتجهات في ذاكرة الحاسب كعديد $(a_1, a_2, \cdots, a_N)$ من المركبات القياسية.

(٢ , ٨) الجمع ، الطرح والضرب بأعداد قياسية

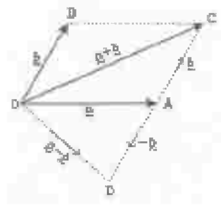
Addition, Subtraction & Multiplication by Scalars

إضافة إلى إمكانية إيجاد طول واتجاه المتجهات فهي تتمتع بخواص بسيطة أخرى. حاصل جمع متجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هو متجه $\vec{c}$ ويُكتب $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ حيث $c_m = a_m + b_m$ لكل $m = 1,2,3$ وذلك لأن تساوي متجهين يحتم تساوي مركباتها المتقابلة.

وطرح المتجهين نحصل عليه من عملية جمع المتجه $\vec{a}$ والمتجه $-\vec{b}$ المعاكس لإتجاه $\vec{b}$ ، أي أن $\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})$ يعني أن $d_m = a_m - b_m$. في المثلث الذي رؤوسه نقطة الأصل والنقطتين A و B اللتان تمثلان المتجهان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ يكون $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$ هو المتجه من B إلى A ويُرمز له أحياناً بالرمز $\overrightarrow{BA}$.(٢)

حاصل ضرب متجه بعدد عملية سهلة أيضاً فإذا كان $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ فإن اتجاه $\vec{b}$ مماثل لاتجاه $\vec{a}$ إذا كان λ عدداً موجباً وعكس اتجاه $\vec{a}$ إذا كان λ عدداً سالباً. في كلتا

(٢)



الحالتين يكون معيار $\vec{b}$ يساوي حاصل ضرب $|\lambda|$ مع معيار $\vec{a}$.[٣] أحد النتائج المهمة هو تحديد متجه الموضع الذي تكون نهايته منتصف المتجه $\overrightarrow{AB}$:

$$\vec{e} = \vec{a} + \vec{d}/2 = \vec{a} + (\vec{b} - \vec{a})/2 = (\vec{a} + \vec{b})/2$$

في ضوء هذه القواعد الأساسية نستطيع استخدام متجه موضع عام $\vec{r}$ لتحديد إحداثيات النقاط الواقعة على المستقيمات والمنحنيات والسطوح في الفضاء ثلاثي البعد. مثالنا الأول هو

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}) \qquad (٨,٢)$$

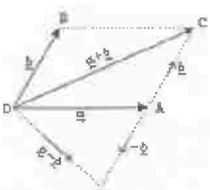
وهذه هي المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطتين A و B حيث $\vec{a}$ هو متجه الموضع من نقطة الأصل إلى النقطة A الواقعة على المستقيم وحيث $\lambda(\vec{b} - \vec{a})$ هو المتجه $\overrightarrow{AB}$ مضروباً بالعدد λ. إذا كان كل من $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متجه موضع معلوم لكل من A و B على التوالي فنستطيع إيجاد λ بدلالة المركبات (x, y, z) للمتجه $\vec{r}$، ونحصل على المعادلة الديكارتية للمستقيم كنتيجة لهذه الحسابات.

أما مثالنا الثاني فهو

$$\vec{r} = \vec{a} + \mu(\vec{b} - \vec{a}) + v(\vec{c} - \vec{a}) \qquad (٨,٣)$$

---

(٣)



وهي المعادلة المتجهة للمستوى المار بالنقاط A و B و C حيث $\vec{a}$ متجه الموضع $\overrightarrow{OA}$ و $\mu(\vec{b}-\vec{a})$ هو حاصل ضرب المتجه $\overrightarrow{AB}$ بالعدد μ و $v(\vec{c}-\vec{a})$ هو حاصل ضرب المتجه $\overrightarrow{AC}$ بالعدد v. فإذا كانت النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة فنقول إن المتجهين $\vec{b}-\vec{a}$ و $\vec{c}-\vec{a}$ يولدان فضاء المتجهات الثنائي البعد المعروف بالمستوى. إن ذلك يعني أنه باختيار مناسب للعددين μ و v نستطيع التحرك كيفما نشاء على المستوى.

المثال الأخير هو

$$|\vec{r}-\vec{a}| = R \tag{٨,٤}$$

وهي معادلة كرة نصف قطرها R ومركزها النقطة A. ومن الممكن رؤية ذلك بملاحظة أن $\vec{r}-\vec{a}$ هو المتجه الذي بدايته A ونهايته أي نقطة أخرى وأن رمز المعيار يبين أن طول هذا المتجه يساوي دائماً عدداً ثابتاً وهو نصف القطر R.

(٨,٣) الضرب القياسي

Scalar Product

الضرب القياسي (أو النقطي) هو إحدى عمليات ضرب المتجهات ويعرف على النحو التالي

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\theta \tag{٨,٥}$$

حيث θ هي الزاوية الواقعة بين $\vec{a}$ و $\vec{b}$[٤]. بما أن $cos(-\theta) = cos(\theta)$ فليس هناك حاجة لتحديد اتجاه قياس الزاوية. ومن الواضح أن ناتج الضرب القياسي هو عدد. إذا كان $\vec{b}$ متجه وحدة فمن الواضح أن المقدار $|\vec{a}|cos\theta$ هو إسقاط $\vec{a}$ باتجاه $\vec{b}$. وبالمثل، إذا كان $\vec{a}$ متجه وحدة فإن $|\vec{b}|cos\theta$ هو إسقاط $\vec{b}$ باتجاه $\vec{a}$. وعليه فإن للضرب القياسي أهمية خاصة عندما يكون المطلوب هو معرفة مركبة المتجه (مثل القوة) باتجاه معين.

إذا كانت $\theta = \frac{\pi}{2}$ فإن الضرب القياسي يساوي صفراً، وفي هذه الحالة نقول إن المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متعامدان. كما أن الضرب القياسي يكون موجباً في الحالة التي تكون فيها θ زاوية حادة ويكون سالباً إذا كانت θ زاوية منفرجة. أما إذا كانت $\theta = 0$ فإن $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$ ويكون المتجهان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متوازيين. على وجه الخصوص $\vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^2$ وفي هذه الحالة نستطيع إيجاد معيار $\vec{a}$ بسهولة أيضاً.

$$|\vec{b} - \vec{c}|^2 = (\vec{b} - \vec{c}).(\vec{b} - \vec{c}) = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{b}.\vec{c} \qquad (٨,٦)$$

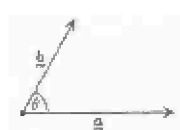
لاحظ أن المعادلة (٨,٦) تزودنا ببرهان قصير لقاعدة جيب التمام التي قدمناها في المعادلة (٣,٢٣).

نستطيع أيضاً حساب الضرب القياسي بنظام الإحداثيات الديكارتي على النحو التالي

$$\vec{a}.\vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}).(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \qquad (٨,٧)$$

---

(٤)



وذلك بضرب الأقواس وملاحظة أن $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{j} = 0$ وأن $|\vec{i}|^2 = |\vec{j}|^2 = |\vec{k}|^2 = 1$ لأن $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ متجهات وحدة. وعليه فالضرب القياسي هو مجموع حاصل ضرب الإحداثيات المتقابلة.

إن إيجاد الضرب القياسي لمعادلة متجه يولدّ لنا معادلات قياسية وبهذا نستطيع معالجة هذه المعادلات مستفيدين من قواعد الجبر الاعتيادية. ونحذر القارئ بأن القسمة على متجه غير معرفة ولذا على القارئ عدم محاولة ذلك.

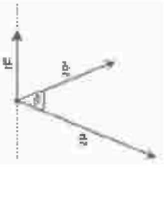
(٤ ,٨) الضرب المتجهي
Vector Product

الضرب المتجهي (أو التصالبي) لمتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هو عملية ضرب متجهات بحيث يكون حاصل الضرب في هذه الحالة متجهاً وتعرف على النحو التالي

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| sin\theta \vec{u} \qquad (٨ ,٨)$$

حيث معيار الضرب المتجهي هو $|\vec{a}||\vec{b}| sin\theta$ و θ هي الزاوية بين المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$. أما اتجاهه فيتحدد بمتجه الوحدة $\vec{u}$ العمودي على المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ومن ثم فهو ناظمي (أوعمودي) على المستوى الذي يحويها والمحدد "بقاعدة اليد اليمنى للمفك" التي تنص على أنه إذا افترضنا أن اليد اليمنى ممسكة بمفك وافترضنا أن اتجاه دوران الأصابع هو من $\vec{a}$ إلى $\vec{b}$ فإن اتجاه الإبهام يتفق مع اتجاه $\vec{u}$.[٥] من ذلك

---

(٥) 

نستنتج مباشرة أن اتجاه $\vec{a} \times \vec{b}$ هو عكس اتجاه $\vec{b} \times \vec{a}$. أي أن

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \qquad (٨,٩)$$

وذلك لأننا نحتاج إلى عكس إتجاه دوران اليد (وعكس إتجاه الإبهام) لنحصل على إتجاه من $\vec{b}$ إلى $\vec{a}$. لاحظ أيضاً أن $sin\theta = 0$ عندما تكون $\theta = 0$ ومن ثم يكون $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ إذا كان المتجهان متوازيان.

لحساب الضرب المتجهي للمتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ في النظام الديكارتي (أي باستخدام الإحداثيات) ، نحتاج أولاً إلى معرفة أن $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$ وأن $\vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k}$ ، $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$ ، $\vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i}$. بعد ذلك نقوم بضرب المتجهين $a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ و $b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ والتبسيط لنحصل على

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - b_3a_2, a_3b_1 - b_3a_1, a_1b_2 - b_1a_2) \qquad (٨,١٠)$$

سنقدم في البند (٩,٣) طريقة أفضل لحساب الضرب المتجهي.

التفسير الهندسي للضرب المتجهي هو أن معياره يساوي مساحة متوازي الأضلاع (أو ضعف مساحة المثلث)[٦] ، ضلعاه المتجاوران هما $\vec{a}$ و $\vec{b}$. في الحقيقة ، تُعَرَّف المساحة المتجهة لمتوازي الأضلاع بأنها $\vec{a} \times \vec{b}$ باتجاه ناظمي على السطح المستوي.

إذا ضربنا طرفي المعادلة (٨,٢) من اليمين بالمتجه $\vec{b} - \vec{a}$ وقمنا بحذف العدد λ ولاحظنا أن $(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{b} - \vec{a}) = 0$ فإننا نحصل على

$$\vec{r} \times (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} \times \vec{b} \qquad (٨,١١)$$

وهي معادلة متجهة أخرى للمستقيم.

---

(٦) مساحة المثلث = $|\vec{a} \times \vec{b}|/2$

(٨ , ٥) الضرب الثلاثي القياسي
Scalar Triple Product

نقدم الآن مفهوم ضرب ثلاثة متجهات $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$. أبسط هذه المفاهيم هو الضرب الثلاثي القياسي ويُكتب $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ أو $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ وناتج هذا الضرب هو عدد قياسي يمكن إيجاده بدلالة الإحداثيات

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \qquad (٨ , ١٢)$$

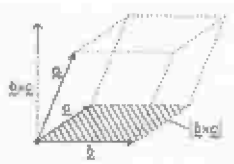
وسنقدم في البند (٣ , ٩) طريقة أفضل لحساب الضرب الثلاثي القياسي.

لاحظ أن الضرب الثلاثي القياسي هو حجم متوازي المستطيلات ذو الأبعاد $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$.[٧] ولرؤية ذلك ، وجدنا في البند (٤ , ٨) مساحة متوازي الأضلاع ذو البعدين $\vec{b}$ و $\vec{c}$ وهي $\vec{b}\times\vec{c}$. الآن الضرب القياسي $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ يولّد الحجم حيث الارتفاع العمودي هو إسقاط $\vec{a}$ على العمودي على قاعدة متوازي الأضلاع. بما الحجم هو كمية قياسية فمعيار الضرب الثلاثي القياسي لايعتمد عن الترتيب المستخدم للمتجهات $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ ولكن يجب توخي بعض الحذر للإشارات حيث نلاحظ باستخدام المعادلة (٨ , ٩) أن $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})$ و $\vec{a}.(\vec{c}\times\vec{b}) = \vec{b}.(\vec{a}\times\vec{c}) = \vec{c}.(\vec{b}\times\vec{a}) = -\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$.

إذا توازا (أو تساوا) أي متجهين في الضرب الثلاثي القياسي فقيمته تساوي صفراً لأن ارتفاع متوازي المستطيلات الذي يمثله يساوي صفراً. إن ذلك يزودنا باختبار بسيط لمعرفة ما إذا كانت المتجهات $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ تقع في مستوى واحد لأن الضرب

---

(٧)



حجم رباعي الوجوه= $|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|/6$

الثلاثي القياسي $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ في هذه الحالة يساوي صفراً. أما ثلاثة متجهات غير واقعة في مستوى واحد فإنها تولدٌ فضاء متجهات ثلاثي البعد ، بمعنى أي متجه (أو نقطة في الفضاء) هو تركيب خطي للمتجهات الثلاث

$$\vec{r} = l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c} \qquad (٨,١٣)$$

حيث l و m و n أعداد قياسية. أما إذا كان اثنان من المتجهات متوازيان فالمتجهات تولدٌ فضاء متجهات ثنائي البعد وبهذه الحالة تقول إنها مرتبطة خطياً. أي يمكن كتابة احداها كتركيب خطي للمتجهين الآخرين

$$\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b} \qquad (٨,١٤)$$

على سبيل المثال ، لإيجاد قيمة l في المعادلة (٨,١٣) نقوم بضرب طرفي المعادلة قياسياً بالمتجه $\vec{b}\times\vec{c}$ لنحصل على معادلة قياسية ومن ثم نقوم بقسمة طرفي المعادلة الأخيرة على المقدار القياسي $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$

في نهاية هذا البند نستخدم الضرب الثلاثي القياسي لإيجاد صيغة أخرى لمعادلة المستوى المتجهة (٨,٣). فبضرب قياسي لطرفي المعادلة (من اليمين أو اليسار) بالمتجه

$$\vec{n} = (\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a}) = \vec{b}\times\vec{c} + \vec{a}\times\vec{b} + \vec{c}\times\vec{a}$$

يضمن لنا هذا الإختيار للمتجه $\vec{n}$ التخلص من الثابتين μ و v لأنهما معاملان لضرب ثلاثي قياسي يحتوي على متجهين متوازيين ومن ثم فإن قيمته تساوي صفراً.

وبما أن المتجه $\vec{n}$ يكون باتجاه العمودي على المستوى الذي يحتوي المتجهان $(\vec{b}-\vec{a})$ و $(\vec{c}-\vec{a})$ فإننا نحصل على

$$\frac{\vec{r}.\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})}{|\vec{n}|}=D \qquad (٨,١٥)$$

حيث قمنا بقسمة طرفي المعادلة على $|\vec{n}|$ ليكون الطرف الأيسر للمعادلة ضرباً قياسياً للمتجه $\vec{r}$ ومتجه وحدة. وهذه المعادلة تزودنا بصورة هندسية واضحة للمستوى.[٨] الطرف الأيسر من المعادلة (٨,١٥) هو إسقاط $\vec{r}$ باتجاه متجه وحدةعمودي على المستوى، وبهذا تكون D هي المسافة العمودية من نقطة الأصل إلى المستوى. ونحصل على المعادلة الديكارتية للمستوى بتعويض $\vec{r}=(x,y,z)$ في المعادلة (٨,١٥).

(٨,٦) الضرب الثلاثي المتجهي

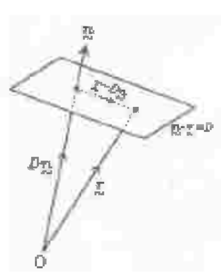
Vector Triple Product

طريقة أخرى لضرب ثلاثة متجهات تعرف بالضرب الثلاثي المتجهي ويُكتب $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ ونتيجة هذا الضرب متجه أيضاً ويعرف على النحو التالي

$$\underbrace{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})}_{AB} = \underbrace{(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}}_{AC} - \underbrace{(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}}_{AB} \qquad (٨,١٦)$$

---

(٨)



$$\vec{r}.(1,2,3)=5$$
$$x+2y+3z=5$$
$$D=5/\sqrt{14}$$

حيث القاعدة "$ABACAB$" تساعدنا على سهولة تذكره. ومثال على استخدام المعادلة (٨ , ١٦) هو إيجاد خط تقاطع مستويين. استناداً إلى المعادلة (٨ , ١٦) نستطيع كتابة معادلتي المستويين على النحو $\vec{r}.\vec{a} = u$ و$\vec{r}.\vec{b} = v$. الآن، بتطبيق القاعدة "$ABACAB$" على الضرب الثلاثي المتجهي نحصل على $\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{r}.\vec{b})\vec{a} - (\vec{r}.\vec{a})\vec{b} = v\vec{a} - u\vec{b}$ حيث اعتبرنا أن $\vec{r}$ واقع في كلا المستويين. وبمقارنة ذلك مع المعادلة (٨ , ١١) نكون قد حصلنا على معادلة خط التقاطع في الإتجاه $(\vec{a} \times \vec{b})$.

(٨ , ٧) الإحداثيات القطبية
Polar Coordinates

يتم تحديد موقع نقطة في الفضاء ثنائي البعد بالإحداثيات الديكارتية (x, y) . وبينا طريقة أخرى في البند (٧ , ٣) لتحديد موقع النقطة باستخدام مسافة r من نقطة الأصل والزاوية θ باتجاه عكس عقارب الساعة التي يصنعها "نصف القطر" مع الاتجاه الموجب لمحور x. هذا الوصف يُسمى الإحداثيات القطبية للنقطة ويُكتب على النحو (r, θ). العلاقة بين الإحداثيين الديكارتي والقطبي مبينة بالمعادلتين (٧ , ٩) و (٧ , ١٠).[٩]

أما للفضاءات ثلاثية البعد فهناك تعميان شائعا الاستخدام. الأول منهما يكون باستبدال x وy بـ r و θ كما هو مبين أعلاه وإبقاء z دون تغيير ، لنحصل على الثلاثي (r, θ, z) المُسمى بالإحداثيات القطبية الاسطوانية. أما في التعميم الثاني فيتم

---

(٩) $x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$r^2 = x^2 + y^2$

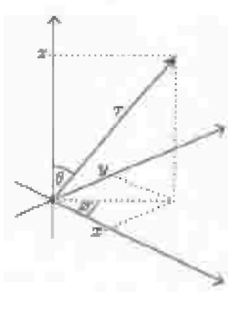
$\theta = \tan^{-1}(y/x)$

تحديد موقع النقطة بالمسافة بينها وبين نقطة الأصل (أو نصف القطر) وزاويتان θ و φ تمثلان بعدها العرضي المرافق وبعدها الطولي. أي أن θ تقاس من محور z على اعتبار أن 0° "هو الشمال" 90° هو المستوى $xy(z = 0)$، 180° هو اتجاه القطب الجنوبي. أما φ فهي الزاوية بعكس اتجاه عقارب الساعة الواقعة بين الاتجاه الموجب لمحور x وإسقاط نصف القطر على مستوى خط الإستواء.(١٠) تُسمى الإحداثيات (r, θ, φ) بالإحداثيات القطبية الكروية. وباستخدام حساب مثلثات بدائي وقليلاً من التفكير نجد أن العلاقة بين r و θ و φ والإحداثيات الديكارتية هي

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\varphi \\
y &= r\sin\theta\sin\varphi \\
z &= r\cos\theta \\
r^2 &= x^2 + y^2 + z^2
\end{aligned}
\qquad (٨, ١٧)
$$

إنه لمن الطبيعي الاعتقاد على عدم أهمية استحداث أنظمة احداثية مختلفة طالما لدينا الإحداثي الديكارتي السهل التعامل معه، ولكننا رأينا في الفصل السابع الفائدة التي قد نجنيها من الإحداثيات القطبية. كما أننا سنبين فوائد أُخرى لهذه الأنظمة في الفصل الثاني عشر خاصة عندما يكون النظام المُستخدم يتوافق مع التصور الهندسي للمسألة تحت الدراسة. ومع أننا قصرنا دراستنا هنا على الأنظمة الديكارتية والأسطوانية والكروية إلاّ أنه يوجد العديد من الأنظمة الإحداثية الأُخرى النادرة الاستخدام.

(١٠)



تمارين

(١ ,٨) يبين أي من الكميات التالية هي كميات متجهة

(١) درجة الحرارة

(٢) التسارع

(٣) القوة

(٤) وزن الجزئ

(٥) المساحة

(٦) الطاقة الداخلية

(٧) المجال المغناطيسي

(٢ ,٨) لنفرض أن للنقاط A ، B ، C ، D المتجهات الموضعية $\vec{a} = (1,2,3)$ ، $\vec{b} = (2,0,1)$ ، $\vec{c} = (1,1,1)$ ، $\vec{d} = (5,2,5)$ على التوالي. احسب

(١) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$.

(٢) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} - \vec{d}$.

(٣) $2\vec{a} - 3\vec{b} - 5\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}$

(٤) $\vec{a} + 2\vec{b} + 0\vec{c} - \vec{d}$.

(٥) متجها الموضع لنقطة منتصف كل من $\overline{BC}$ و $\overline{AD}$.

(٣ ,٨) إذا كانت $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ ، $\vec{d}$ هي كما في التمرين (٢ ,٨) فعّين

(١) المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطتين A و C.

(٢) المعادلة المتجهة للمستقيم المار بنقطتي منتصف $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$.

(٣) المعادلة الديكارتية لكل من المستقيمين $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ و $\vec{r} = \vec{c} + \lambda\vec{d}$.

(٨ , ٤) إذا كانت $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$، $\vec{d}$ هي كما في التمرين (٨ , ٢) فجد $\vec{a}.\vec{b}$، $\vec{a}.\vec{c}$، $\vec{a}.\vec{d}$. جد الزاوية بين $\vec{b}$ و $\vec{c}$ والزاوية بين $\vec{c}$ و $\vec{d}$. احسب قيمة كل من $(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}$ و $(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$.

(٨ , ٥) استخدم الضرب القياسي لاثبات المتطابقة المبينة في المعادلة (٣ , ١٣).

(٨ , ٦) إذا كانت $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ ، $\vec{d}$ هي كما في التمرين (٨ , ٢) فاحسب $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ ، $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{d})$ $\vec{a}.(\vec{c}\times\vec{d})$. عيّن الزاوية بين $\vec{b}$ و $\vec{c}$ والزاوية بين $\vec{c}$ و $\vec{d}$. اكتب معادلة المستقيمين في التمرين (٨ , ٣) (iii) بالصيغة المقدمة في المعادلة (٨ , ١١).

(٨ , ٧) استخدم الضرب المتجهي لإثبات قاعدة الجيب المبينة في المعادلة (٣ , ٢٢).

(٨ , ٨) إذا كانت $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ ، $\vec{d}$ هي كما في التمرين (٨ , ٢) فاحسب $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ ، $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{d})$ ، $\vec{a}.(\vec{c}\times\vec{d})$. استخدم ذلك لتعيين الثلاثة متجهات الموضعية الواقعة في مستوى واحد ثم جد الصيغة الإحداثية لمعادلة هذا المستوى ومعادلة المستوى على الصيغة المبينة بالمعادلة (٨ , ١٥). ماهي المسافة العمودية من نقطة الأصل إلى المستوى.

(٨ , ٩) جد الضرب الثلاثي القياسي للمتجهات $(1,2,4)$ و $(2,0,-3)$ و $(-4,4,17)$. هل هي مستقلة خطية ؟ هل بالإمكان كتابة المتجه الثالث كتركيب خطي للمتجهين الآخرين ، وإذا كان كذلك عين التركيب الخطي هذا.

(٨ , ١٠) استخدم نتائج التمرين (٨ , ٤) للتحقق من القاعدة المقدمة في المعادلة (٨ , ١٦).

(١١ ,٨) لنفرض أن مقلوب المتجهات $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ مُعَرَّفة على النحو التالي

$$\vec{a}' = (\vec{b} \times \vec{c})/s$$
$$\vec{b}' = (\vec{c} \times \vec{a})/s$$
$$\vec{c}' = (\vec{a} \times \vec{b})/s$$

حيث $s = \vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})$. أثبت أن $\vec{a}'.\vec{a} = \vec{b}'.\vec{b} = \vec{c}'.\vec{c} = 1$ وأن $\vec{a}'.\vec{b} = \vec{a}'.\vec{c} = 0$ ومن ثم احسب الضرب الثلاثي القياسي لمقلوب المتجهات بدلالة s. إذا كان المتجه $\vec{x}$ تركيباً خطياً لمقلوب المتجهات فأثبت أن معامل a' هو $\vec{a}.\vec{x}$.