الفصل الأول

مفاهيم أساسية
Basic Principles

تتطلب دراسة التحليل العددي معرفة مسبقة لبعض المفاهيم في التحليل الرياضي و تلك المتعلقة بالحاسب الآلي. نستعرض في هذا الفصل بعض المفاهيم الأساسية في التحليل وكذلك سوف نناقش أخطاء التدوير المتعلقة بالحاسب واستقرار الحلول العددية (المحسوبة) وتقاربها.

(١,١) مفاهيم أساسية في التحليل ونظرية تايلور
Basic Principles in Analysis and Taylor Theorem

سوف نستعرض هنا بعض التعريفات والنظريات الأساسية في التحليل نبدأها بتعريف النهاية، الاتصال و التفاضل.

تعريف (١,١)

إذا كانت f دالة معرفة على المجموعة X من خط الأعداد الحقيقي، فإنه يقال إن للدالة f نهاية L عند العدد c، ونكتب $\lim_{x\to c} f(x) = L$ إذا كان لأي عدد موجب ε، يوجد عدد موجب δ بحيث إن $|f(x)-L|<\varepsilon$ لأجل $x\in X$ و $0<|x-c|<\delta$.

تعريف (١,٢)

لتكن f دالة معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية X و ليكن $c \in X$، فإنه يقال إن f دالة متصلة عند c إذا كان $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. ويقال إن f دالة متصلة على المجموعة X إذا كانت متصلة عند كل عدد في X.

تعريف (١,٣)

لتكن f دالة معرفة في فترة مفتوحة تحتوي على c، فإنه يقال إن f دالة قابلة للتفاضل عند c إذا كانت النهاية:

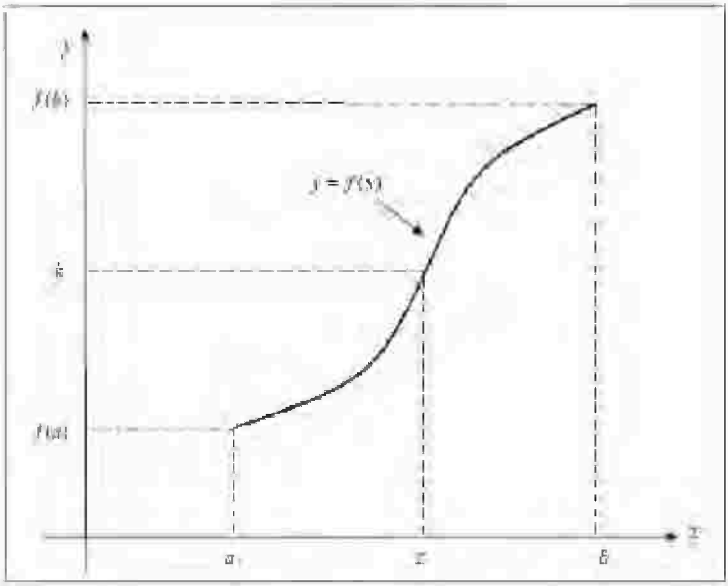
$$f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \tag{1.1}$$

موجودة. بما أن هذه النهاية قد لا تكون موجودة لبعض الدوال أو/ و لبعض قيم c، فإنه يكون من المحتمل أن يكون تفاضل الدالة غير موجود. فمثلاً، لا يوجد تفاضل للدالة $f(x) = \ln(x)$ عند $x = 0$.

نظرية (١,١) (نظرية القيمة المتوسطة)

لتكن f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$، و K أي عدد يقع بين $f(a)$ و $f(b)$. فإنه يوجد عدد c في (a,b) بحيث إن $f(c) = K$. انظر الشكل رقم (١,١).

لا يُعطى برهان هذه النظرية في المقررات الأساسية في التحليل، ولكنه موجود في معظم الكتب المتقدمة في التحليل. فمثلاً، يمكن مراجعة هذا البرهان في كتاب فولكس (١٩٧٨م).



الشكل رقم (١,١). شكل توضيحي للنظرية (١,١).

تعد هذه النظرية ذات فائدة لإثبات وجود حل لمعادلة غير خطية ذات متغير واحد والتي سوف ندرسها في الفصل الثاني. المثال (١,١) يوضح ذلك.

مثال (١,١)

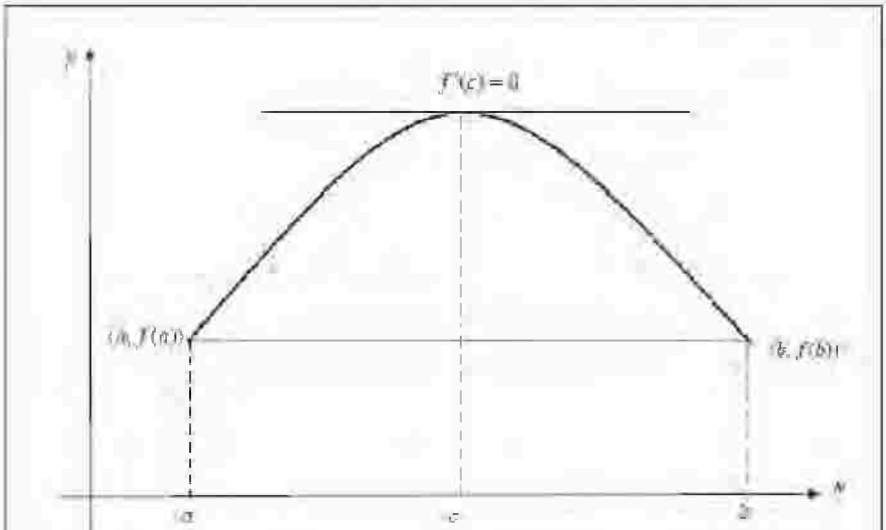
نريد استخدام النظرية (١,١) لإثبات أنه يوجد للمعادلة غير الخطية $x^2 - x - 2 = 0$ حلاً في الفترة المغلقة $[1.5,3]$.

بداية بوضع $f(x) = x^2 - x - 2$ يكون لدينا $f(1.5) = -1.25 < 0$ و $f(3) = 4 > 0$ وبما أن الدالة $f(x)$ على الفترة $[1.5,3]$ وأن $K = 0$ يقع بين $f(1.5)$ و $f(3)$ فإنه حسب النظرية (١,١) يوجد عدد، وليكن α، في هذه الفترة بحيث إن $f(\alpha) = 0$. في الواقع، $\alpha = 2$ هو حل للمعادلة وهو موجود في الفترة.

نشير هنا إلى أن النظرية تساعدنا على التحقق من وجود الحل إذا كان $f(a)f(b)<0$ و $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[a,b]$، ولكننا لا نستطيع استخدامها لإثبات أن الحل وحيد. يمكن إثبات وحدانية الحل بدراسة الدالة على الفترة. فمثلاً، بالنسبة للمعادلة الموجودة في المثال (١,١) يمكن بسهولة إثبات أن الدالة $f(x)$ تصاعدية على الفترة وأن قيمها القصوى هي $f(1.5)=-1.25$ و $f(3)=4$. بناء عليه فإن منحنى الدالة يقطع محور x مرة واحدة فقط وهذا يعني أن الحل وحيد.

نظرية (١,٢) (نظرية رول)

لتكن f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ وقابلة للتفاضل على الفترة المفتوحة (a,b). إذا كانت $f(a)=f(b)$ فإنه يوجد على الأقل عدد واحد c في (a,b) بحيث إن $f'(c)=0$. انظر الشكل رقم (١,٢).



الشكل رقم (١,٢). شكل توضيحي لنظرية رول.

في الواقع عند تطبيق النظرية (١,٢) وبشكل متتابع على $f, f', ..., f^{(n-1)}$ من أجل $n \geq 1$ نحصل على النظرية التالية:

نظرية (١,٣) (نظرية رول العامة)

لتكن f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ ولتكن f قابلة للتفاضل n مرة على (a,b). إذا كان $f(x) = 0$ عند الأعداد المتباينة $x_0, x_1, ..., x_n$ والموجودة في $[a,b]$، فإنه يوجد عدد c في (a,b) بحيث إن: $f^{(n)}(c) = 0$.

سوف نستخدم نظرية رول العامة في تحليل الخطأ للاستكمال باستخدام كثيرات الحدود والذي سوف ندرسه في الفصل الرابع. كما أننا سوف نستخدم النظريات التالية لتحليل الخطأ لبعض الطرائق العددية.

نظرية (١,٤) (نظرية القيم القصوى)

لتكن f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$، فإنه يوجد عددين c_1 و c_2 في $[a,b]$ بحيث إن $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ لكل $x \in [a,b]$.

نظرية (١,٥) (نظرية القيمة المتوسطة للمجموع)

لتكن f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$، ولتكن $x_1, x_2, ..., x_n$ تنتمي إلى الفترة $[a,b]$. إضافة إلى ذلك، لتكن $w_1, w_2, ..., w_n$ أعداداً حقيقية لها نفس الإشارة. فإنه، يوجد عدد c في $[a,b]$ بحيث إن:

$$\sum_{j=1}^{n} w_j f(x_j) = f(c) \sum_{j=1}^{n} w_j$$

نظرية (١,٦) (نظرية القيمة المتوسطة للتكامل)

لتكن f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$، و $g(x)$ دالة قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$ وأن $g(x)$ لا تتغير إشارتها على هذه الفترة. فإنه يوجد عدد c في (a,b) بحيث إن:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx \tag{1.2}$$

ملاحظة:

إذا كانت $g(x)=1$ لكل $x\in[a,b]$، فإن نظرية (١,٦) تضمن وجود عدد c في $[a,b]$ بحيث إن:

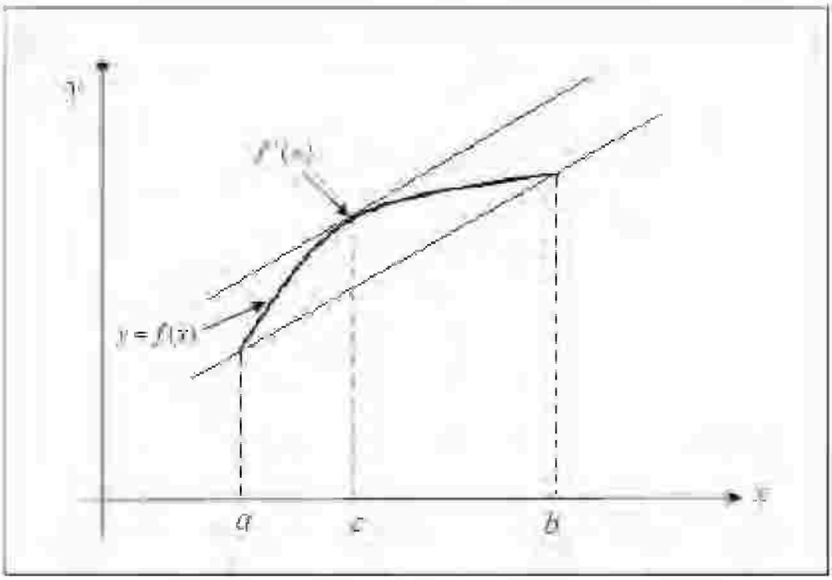
$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

تعد نظرية تايلور (متسلسلة تايلور) ذات أهمية قصوى للتحليل العددي، حيث إن النظرية تعطينا طريقة بسيطة لتقريب دالة $f(x)$ بواسطة كثيرة حدود وكذلك نستخدمها لاستنتاج بعض الطرائق العددية لحل مسائل رياضية مختلفة. كما تعد نظرية القيمة المتوسطة في التفاضل من النظريات الأساسية لاستنتاج نظرية تايلور ولذلك سوف نذكرها أولاً.

نظرية (١,٧) (نظرية القيمة المتوسطة في التفاضل)

لتكن $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[a,b]$، و f قابلة للتفاضل على (a,b). فإنه يوجد عدد c في (a,b) بحيث إن: $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$، انظر الشكل رقم (١,٣).

نشير هنا إلى أننا سوف نستخدم النظرية (١,٧) لمساعدتنا في إثبات بعض النظريات التي سوف ترد في الفصل الثاني مثل نظرية النقطة الثابتة.



الشكل رقم (١,٣). شكل توضيحي للنظرية (١,٧).

نظرية (١,٨) (نظرية تايلور)

لتكن $f \in C^{n+1}[a,b]$ ، وأن x_0 عدد موجود في $[a,b]$. فإنه لكل $x \in [a,b]$ يوجد دالة $\xi(x)$ والتي تقع بين x_0 و x و تحقق:

$$f(x)=P_n(x)+R_{n+1}(x) \tag{1.3}$$

حيث إن:

$$P_n(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-x_0)^k}{k!}f^{(k)}(x_0). \tag{1.4}$$

$$R_{n+1}(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi(x)) \tag{1.5}$$

تسمى $P_n(x)$ كثيرة حدود تايلور من الدرجة n للدالة $f(x)$ حول العدد x_0. أما $R_{n+1}(x)$ فإنه يسمى الحد المتبقي المرتبط بكثيرة الحدود $P_n(x)$. المتسلسلة اللانهائية والتي يتم الحصول عليها بأخذ نهاية $P_n(x)$ عندما $n \to \infty$ تسمى متسلسلة تايلور للدالة $f(x)$ حول x_0. عندما $x_0 = 0$، فإنه يشار إلى كثيرة حدود ومتسلسلة تايلور بالاسمين كثيرة حدود ومتسلسلة ماكلورين، بالترتيب. نذكر هنا أن الحد المتبقي $R_{n+1}(x)$ يسمى أيضاً الخطأ المقطوع.

ملاحظة:

من النظرية (١,٧) يتضح أن $f(x_0) = P_n(x_0)$ وأن الخطأ المقطوع يساوي صفراً عندما $x = x_0$.

مثال (١,٢)

استخدم نظرية تايلور لإيجاد كثيرة حدود من الدرجة الثالثة للدالة $f(x) = \ln(x)$ حول $x_0 = 1$. أوجد الخطأ المقطوع لهذه الحالة.

أولاً نعلم أن كثيرة حدود تايلور من الدرجة الثالثة تكون بالشكل:

$$P_3(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(x_0)$$

وبما أن $f(x_0) = 0$ ، $f'(x_0) = 1$ ، $f''(x_0) = 1$ و $f'''(x_0) = 2$ حيث إن $x_0 = 1$ ، فإنه يكون لدينا:

$$P_3(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$$

لاحظ أن $f(1) = p_3(1)$. الخطأ المقطوع في هذه الحالة هو:

$$R(x) = \frac{(x-1)^4}{24} f^{(4)}(\xi) = \frac{(x-1)^4}{4} \frac{1}{\xi^4}$$

لنعتبر استخدام كثيرة حدود تايلور الموجودة في المثال السابق لحساب قيمة تقريبية للعدد $\ln 1.2$. من الواضح أنه عندما $x = 1.2$ فإننا نحصل على:

$$\ln 1.2 \approx P_3(1.2) = 0.2 - 0.5(0.2)^2 + \frac{1}{3}(0.2)^3 = 0.1826667$$

نلاحظ أنه لبعض قيم ξ التي تقع بين 1 و 1.2 يكون لدينا $\frac{1}{\xi^4} \le 4\times10^{-4}$ 4×10^{-4}، وبالتالي يمكن اعتبار 0.1826667 كتقريب للعدد $\ln 1.2$ بحيث يكون الخطأ أقل من 4×10^{-4}. من ناحية أخرى، الفرق بين قيم $\ln 1.2$ و $P_3(1.2)$ هو $|\ln 1.2 - P_3(1.2)| \cong 0.00035$، والذي يتوافق مع الحد الأعلى للخطأ الذي تم الحصول عليه.

نختتم هذا البند بطرح كثيرة الحدود تايلور بمتغيرين والتي نحتاج الاستعانة بها لدراسة بعض الطرائق العددية التي سوف ندرسها في هذا الكتاب.

نظرية (١,٩) (نظرية تايلور بمتغيرين)

لتكن الدالة $f(x,y)$ متصلة تفاضلياً $n+1$ مرة لكل (x,y) في R، حيث R ترمز لجوار النقطة (x_0,y_0) في المستوى xy. فإنه لكل $(x,y)\in R$ يوجد نقطة (ξ,η) على المستقيم الواصل بين النقطتين (x,y) و (x_0,y_0) وتحقق:

$$f(x,y) = P_n(x,y) + R_{n+1}(x,y)$$

حيث إن:

$$P_n(x,y) = f(x_0,y_0) + [(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)]$$
$$+\frac{1}{2!}[(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + 2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)$$
$$+(y-y_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)] + \cdots$$
$$+\frac{1}{n!}[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(x-x_0)^{n-i}(y-y_0)^i\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i}\partial y^i}(x_0,y_0)]$$

و

$$R_{n+1}(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}[\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}(x-x_0)^{n+1-i}(y-y_0)^i\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-i}\partial y^i}(\xi,\eta)]$$

لن نناقش هنا كيفية تطبيق نظرية تايلور بمتغيرين لكتابة كثيرة حدود لتقريب دالة ما ذات متغيرين لأن ذلك ليس أحد أهداف الكتاب. ولكننا نترك للقارئ المهتم مناقشة ذلك في التمارين.

(١,٢) الحسابات وأخطاء التدوير

Computations and Rounding Errors

نحن نعلم أن النظام الرقمي المستخدم في الحياة اليومية هو النظام العشري. فمثلاً، يمكن التعبير عن العدد 564.79 بالتالي:

$$564.79 = 5\times10^2 + 6\times10^1 + 4\times10^0 + 7\times10^{-1} + 9\times10^{-2}$$

فالعدد 10 هو قاعدة النظام العشري. من ناحية أخرى، تعتمد الحاسبات الآلية في تشغيلها على الطاقة الكهربائية وحيث إن الدفعات الكهربائية تكون إما تشغيل أو إيقاف فإن الحواسيب تقرأ هذه الدفعات والتي ترسلها محتوياتها الكهربائية. وإذا مثلنا دفعة "الإيقاف" بالرمز 0 و "التشغيل" بالرمز 1، فإن ما تحتاج إليه

الحاسبات هو نظام رقمي يحتوي على 0 و 1 لتمثيل الأعداد الحقيقية. يسمى هذا النظام بالنظام الثنائي و يكون له الأساس 2. فمثلاً، يمكن التعبير عن العدد 13.1875 كما يلي:

$$
\begin{aligned}
(1101.0011) &= 1\times 2^3+1\times 2^2+0\times 2^1+1\times 2^0+0\times 2^{-1}+0\times 2^{-2}+1\times 2^{-3}+1\times 2^{-4}\\
&=8+4+0+1+0+0+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\\
&=13+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\\
&=\frac{211}{16}
\end{aligned}
$$

والعدد 859 يمكنا التعبير عنه بالنظام الثنائي كما يلي:

$$
\begin{aligned}
(1101011011) &= 1\times 2^9+1\times 2^8+0\times 2^7+1\times 2^6+0\times 2^5+1\times 2^4+1\times 2^3+0\times 2^2\\
&\quad +1\times 2^1+1\times 2^0\\
&=512+256+0+64+0+16+8+0+2+1=859
\end{aligned}
$$

من المثال الثاني نلاحظ أننا احتجنا إلى عشرة أرقام ثنائية لتمثيل العدد 859. يعد ذلك أهم سلبية في النظام الثنائي، حيث إننا استخدمنا هذا العدد الكبير من الأرقام الثنائية للتعبير عن عدد مكون من ثلاثة أرقام. في الواقع، تحتوي معظم الحاسبات على صيغة صحيحة لتمثيل الأعداد الصحيحة وصيغة النقطة العائمة لتمثيل الأعداد الحقيقية. ويرتبط تمثيل النقطة العائمة بالرموز العلمية. ليكن x عدد حقيقي، فإنه يمكن تمثيل x بالنقطة العائمة بالشكل:

$$x=\pm(0.d_1d_2\ldots d_td_{t+1}\ldots)_\beta\times\beta^e \tag{1.6}$$

حيث إن $(0.d_1d_2\ldots d_td_{t+1}\ldots)_\beta$ هو كسر في النظام الرقمي الذي قاعدته β، يسمى عدد معنوي (عشري)، e هو عدد صحيح يسمى أُس و t عبارة عن عدد الأرقام المعنوية التي تم استخدامها لتمثيل x. نذكر هنا أن الأُس e عادة يحقق المتباينة:

$$-N\le e\le M \tag{1.7}$$

حيث إن M و N أعداد كبيرة صحيحة و موجبة. وإذا وجدنا أثناء الحسابات أن لأحد القيم الحسابية أُس t أكبر من M فإنه لا يكون هناك معنى للنتيجة المحسوبة و تسمى هذه الحالة تدفق فوقي. أما إذا كان أُس أحد القيم الحسابية يحقق $t < -N$، فالنتيجة تعاد إلى الصفر بدون أي رسالة تحذير في معظم الحاسبات و تسمى هذه الحالة بالتدفق السفلي. من ناحية أخرى، لا يمكن استخدام تمثيل لانهائي للأرقام المعنوية وبالتالي فإنه يجب أن تكون الأرقام المعنوية t محدودة لتمثيل العدد x. أي أنه يجب أن نقطع الأرقام المعنوية عند d_t. لنرمز للعدد المقطوع بالرمز $fl(x)$. يوجد أسلوبين للقطع، الأسلوب الأول هو حذف الأرقام $d_{t+1}d_{t+2}...$ للحصول على التمثيل:

$$fl(x) = \pm(0.d_1 d_2 ... d_t)_\beta \times \beta^e \tag{1.8}$$

ويسمى التمثيل المقطوع للعدد x. أما الأسلوب الثاني فهو يتضمن إضافة $\frac{\beta}{2}$ للرقم d_{t+1} ومن ثم حذف الأرقام الناتجة $\delta_{t+1}\delta_{t+2}...$ للحصول على التمثيل:

$$fl(x) = \pm(0.\delta_1 \delta_2 ... \delta_t)_\beta \times \beta^{e_1} \tag{1.9}$$

حيث إن δ_i، $i = 1,2,...,t$ قد تساوي d_i أو لا تساويها و الأُس e_1 قد يساوي e أو لا يساويه. يسمى هذا التمثيل بالتمثيل المدور.

مثال (١,٣)

للعدد $\frac{17}{3}$ تمثيل لا نهائي من الأرقام العشرية

$$\frac{17}{3} = 5.66666... = 0.56666 \times 10^1$$

وبوضع $t = 5$، فإن التمثيل المقطوع للعدد هو:

$$fl(\frac{17}{3}) = 0.56666 \times 10^1 = 5.6666$$

لكتابة التمثيل المدور لهذا العدد فإننا نضيف 5 إلى الرقم السادس، $5+6$. ومن ثم حذف الأرقام العشرية التي تقع بعد الرقم الخامس. إذن يكون لدينا:

$$fl(\frac{17}{3}) = 0.56667\times10^1 = 5.6667$$

نشير هنا إلى أن الخطأ الناتج من استبدال العدد بالتمثيل المقطوع أو المدور يسمى خطأ التدوير. المثال (١,٤) يوضح أخطاء التدوير في الحالتين.

مثال (١,٤)

لتكن $x = \frac{17}{3}$ و $y = \frac{2}{3}$، احسب $x-y$ وذلك باستخدام التمثيل المقطوع و المدور ووضع $t=5$.

أولاً: بالنسبة للتمثيل المقطوع يكون لدينا:

$fl(x) = 0.56666\times10^1$ و $fl(y) = 0.66666\times10^0$.

وبالتالي نحصل على $fl(x-y) = fl(x) - fl(y) = 0.49999\times10^1$ ، وحيث إن: $x - y = \frac{17}{3} - \frac{2}{3} = \frac{15}{3} = 5$ فإن الخطأ هو :

$$(x-y) - fl(x-y) = 5 - 0.49999\times10^1 = 0.00001$$

أما بالنسبة للتمثيل المدور فإننا نحصل على $fl(x) = 0.56667\times10^1$ ، $fl(y) = 0.66667\times10^0$ و $fl(x-y) = 0.50000\times10^1$ وبالتالي فإن الخطأ هو 0.00000. وهذا يعني أنه حصلنا على تقريب أفضل باستخدام التمثيل المدور.

في الواقع يهتم علم التحليل العددي بتحليل الأخطاء المرافقة للحسابات العددية. يتضمن التعريف التالي على مقياسين مشهورين لقياس الخطأ.

تعريف (١,٤)

لتكن x^* قيمة تقريبية للعدد x، فإن المقدار $|x - x^*|$ يسمى الخطأ المطلق

والمقدار $\frac{|x-x^*|}{|x|}$ يسمى الخطأ النسبي.

مثال (١,٥)

احسب الأخطاء المطلقة و النسبية لكل مما يلي:

(أ) $x=0.200\times10^1$ و $x^*=0.210\times10^1$. الخطأ المطلق هو 0.1 والخطأ النسبي هو 0.5×10^{-1}.

(ب) $x=0.200\times10^{-3}$ و $x^*=0.210\times10^{-3}$. الخطأ المطلق هو 0.1×10^{-4} و الخطأ النسبي هو 0.5×10^{-1}.

(جـ) $x=0.200\times10^3$ و $x^*=0.210\times10^3$. الخطأ المطلق هو 0.1×10^2 و الخطأ النسبي هو 0.5×10^{-1}.

يتضح من هذا المثال أن الخطأ المطلق يعتمد على حجم العدد x وهذا يعني أنه لا يكون مقياساً عملياً. من ناحية أُخرى، يمكننا ملاحظة أن الخطأ النسبي مستقل عن حجم x وبالتالي يكون من الأنسب استخدام الخطأ النسبي لقياس الأخطاء.

من المعروف أنه في الحالات العملية لا نعرف القيمة الفعلية للعدد الحقيقي x، و بالتالي فإن الخطأ يكون غير معروف. بشكلٍ عام، فإننا نكتفي بحدٍ أعلى للخطأ.

لندرس الآن الخطأ النسبي عندما نقوم بقطع أو تدوير العدد الحقيقي x في النظام الرقمي العشري. ليكن x ممثل بما يلي:

$$x=\pm(0.d_1d_2\ldots d_td_{t+1}\ldots)\times10^e$$

سوف نُقرب العدد x بقطع الأرقام $d_{t+1}d_{t+2}\ldots$ للحصول على التمثيل المقطوع:

$$fl(x)=x^*=\pm(0.d_1d_2\ldots d_t)\times10^e$$

وبالتالي فإن الخطأ النسبي المقطوع والمتعلق بالتقريب x^* هو:

$$\frac{|x-x^*|}{|x|}=\left|\frac{(0.d_{t+1}d_{t+2}\ldots)\times10^{e-t}}{0.d_1d_2\ldots d_td_{t+1}\ldots\times10^e}\right|=\left|\frac{0.d_{t+1}d_{t+2}\cdots}{0.d_1d_2\ldots}\times10^{-t}\right|$$

الآن بما أن $1\le d_1\le 9$، فإن القيمة الصغرى للبسط هي 0.1، وحيث إن $|0.d_{t+1}d_{t+2}\ldots|<1$ فإن الخطأ النسبي المقطوع هو:

$$\frac{|x-x^*|}{|x|}\le\frac{10^{-t}}{0.1}=10^{1-t} \tag{1.10}$$

بالمثل يمكن إثبات أنه باستخدام التمثيل التدويري للعدد نحصل على الخطأ النسبي المدور:

$$\frac{|x-x^*|}{|x|}\le\frac{1}{2}10^{1-t} \tag{1.11}$$

كما أنه للنظام الرقمي الذي قاعدته β يكون لدينا الأخطاء النسبية المقطوعة والمدورة التالية:

$$\frac{|x-x^*|}{|x|}\le\beta^{1-t} \tag{1.12}$$

و

$$\frac{|x-x^*|}{|x|}\le\frac{1}{2}\beta^{1-t} \tag{1.13}$$

على الترتيب، انظر التمارين. هذه المناقشة تقودنا إلى التعريف التالي:

تعريف (١,٥)

يقال إن العدد x^* هو تقريب للعدد x حتى t رقم معنوي إذا كان t هو أكبر عدد غير سالب يحقق المتباينة التالية:

$$\frac{|x-x^*|}{|x|}\le 5\times10^{-t}$$

يرتكز هذا التعريف على استخدام الحسابات المُدورة و هي التي تكون مستخدمة على نطاق واسع.

مثال (١,٦)

لـتكن $x=\frac{10}{6}$ ، $t=5$ و $\beta=10$. التمثيـل المقطـوع للعـدد $\frac{10}{6}$ هـو $fl(\frac{10}{6})=0.16666\times10^{1}$. إذن من المعادلة (1.10) نحصل على:

$$\frac{|\frac{10}{6}-fl(\frac{10}{6})|}{\frac{10}{6}}\le 10^{-4}$$

في الواقع يكون لدينا:

$$\frac{|\frac{10}{6}-fl(\frac{10}{6})|}{|\frac{10}{6}|}\approx 0.4\times10^{-4}$$

بالمقابل فإن التمثيل المُدور للعدد هو $fl(x)=0.16667\times10^{1}$ وبالتالي فإنه من المعادلة (1.11) نحصل على:

$$\frac{|\frac{10}{6}-fl(\frac{10}{6})|}{|\frac{10}{6}|}\le 0.5\times10^{-4}=5\times10^{-5}$$

ومن ناحية أُخرى، فإن:

$$\frac{|\frac{10}{6}-fl(\frac{10}{6})|}{|\frac{10}{6}|}\approx 3\times10^{-5}$$

(١,٣) التقارب
Convergence

هناك الكثير من الطرائق العددية التي لا تحسب الحل العددي (التقريبي) المناسب لمسألة ما بشكل مباشر وإنما تحسب عدة حلول تقريبية متتالية والتي بدورها تعطينا الحل التقريبي المناسب حسب الدقة المطلوبة. في الواقع، هذه الحلول التقريبية تمثل متتالية من الأعداد والتي قد تتقارب إلى الحل التقريبي المنشود. في هذا البند سوف نناقش بعض المفاهيم المتعلقة بتقارب المتتاليات العددية ونُعرّف مفهوم معدل التقارب.

تعريف (١,٦)

لتكن $\{x_n\}_0^\infty$ متتالية من الأعداد الحقيقية. يقال إن هذه المتتالية تتقارب إلى العدد α، ونكتب:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \tag{1.14}$$

إذا كان لكل عدد حقيقي موجب ε يوجد عدد حقيقي $r > 0$ بحيث إن $|x_n - \alpha| < \varepsilon$ طالما كان $n > r$. هنا n عدد صحيح موجب.

مثال (١,٧)

اعتبر المتتالية $\{\frac{n^2+1}{n^2}\}_{n=1}^\infty$. نلاحظ أن:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = 1$$

وذلك لأن $\left|\frac{n^2+1}{n^2} - 1\right| < \varepsilon$ متى ما كان $n > \varepsilon^{-1}$.

تعريف (١,٧)

لتكن $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ متتاليتان مختلفتان. إذا وُجد ثابت C بحيث إن $|x_n| < C|y_n|$، من أجل n كبيرة. فإننا نكتب:

$$x_n = O(y_n) \tag{1.15}$$

إذا كان $y_n \neq 0$ لكل n، فإن هذا يعني أن حاصل القسمة $|\frac{x_n}{y_n}|$ يبقى محدوداً بالعدد C عندما n تؤول إلى ∞. المعادلة (1.15) تعني أن x_n هي O الكبيرة للعدد y_n. من ناحية أُخرى، يقال إن x_n هي o الصغيرة للعدد y_n و تكتب بالشكل:

$$x_n = o(y_n) \tag{1.16}$$

وذلك عندما يكون $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$.

في الواقع، إذا كان $x_n \to 0$ و $y_n \to 0$ عندما $n \to \infty$ وأن $x_n = O(y_n)$ فإن سرعة تقارب x_n إلى الصفر تكون على الأقل نفس سرعة تقارب y_n إلى الصفر. أما إذا كان $x_n = o(y_n)$ فإن تقارب x_n إلى الصفر يكون أسرع من y_n.

مثال (١,٨)

المتتاليتان $\{\frac{n+1}{n^2}\}$ و $\{\frac{1}{n\ln n}\}$ تتقاربان إلى الصفر. يمكن إثبات أن $\frac{n+1}{n^2} = O(\frac{1}{n})$ و $\frac{1}{n\ln n} = o(\frac{1}{n})$، (انظر التمارين).

أثناء دراستنا لتقارب بعض الطرائق التكرارية سوف نستخدم التعريف التالي وهو حالة خاصة من التعريف السابق.

تعريف (١,٨)

لتكن المتتالية $\{x_n\}$ تتقارب إلى العدد α عندما n تؤول إلى ∞، والمتتالية $\{y_n\}$ تتقارب إلى الصفر عندما n تؤول إلى ∞. نقول أن المتتالية $\{x_n\}$ تتقارب إلى

α بمعدل تقاربي $O(y_n)$ إذا كان $\frac{|x_n-\alpha|}{|y_n|} \le C$ من أجل عدد كبير صحيح موجب n، حيث إن C ثابت مستقل عن n.

نختتم هذا البند بمناقشة تأثير الأخطاء المُدورة على تقارب الطريقة العددية إلى الحل التقريبي المنشود. يدخل هذا في إطار ما يسمى باستقرار الطريقة. في الواقع تكون الطريقة العددية مستقرة إذا كان أي تغيير صغير في القيمة الابتدائية يترتب عليه تغيير صغير في النتائج النهائية، و يقال إن الطريقة غير مستقرة إذا لم يتحقق ذلك. و باعتبار أخطاء التدوير كمتغيرات صغيرة في القيم الابتدائية فإن الطريقة تكون مستقرة إذا كانت هذه الأخطاء تؤدي إلى تغييرات بسيطة في النتائج وبالتالي تتقارب الطريقة إلى الحل المراد إيجاده. من ناحية أُخرى، إذا ترتب على هذه الأخطاء تغييرات كبيرة في النتائج فإن الطريقة قد تتباعد عن الحل المنشود. نشير هنا إلى أنه في الحالة الأُولى ينمو الخطأ نمواً بطيئاً أثناء الحسابات، أما في الحالة الثانية فيكون نموه سريعاً. التعريف التالي يوضح حالتين من حالات نمو الأخطاء والتي عادة ما تنشأ في التطبيقات العملية.

تعريف (١,٩)

ليكن e_n هو نمو الخطأ بعد n عملية حسابية. يقال إن نمو الخطأ هو نمواً خطياً إذا كان $|e_n| \approx Kn$، حيث K ثابت مستقل عن n. ويقال إنه أُسياً إذا كان $|e_n| \approx C^n$، حيث $C > 1$.

في الواقع، من الناحية العملية، لا يمكن تجنب النمو الخطي للخطأ ولكن إذا كان العدد K صغير فإن النتائج عادة تكون مقبولة. من جهة أُخرى، ينبغي تجنب النمو الأُسي للخطأ وذلك لأن العدد C^n قد يكون كبير حتى لو كانت قيمة n صغيرة وهذا يؤدي إلى نتائج غير مقبولة.

(١,٤) تمارين

Exercises

١- أثبت أنه يوجد للمعادلة غير الخطية $x^3-2x-5=0$ حل في الفترة $[2,3]$. ثم أثبت أن هذا الحل وحيد.

٢- أثبت أن $\int_1^2 (1-x)(x-2)f(x)dx = \frac{1}{6}f(c)$ من أجل $c \in [1,2]$.

٣- لتكن $f(x)=\frac{1}{x-2}$. استخدم نظرية تايلور لإيجاد كثيرة حدود من الدرجة الرابعة والتي تساوي هذه الدالة عند $x=3$. ثم استخدم كثيرة الحدود التي أوجدتها لحساب قيمة تقريبية لـ $f(4)$. احسب الخطأ الفعلي المتعلق بهذا التقريب و حداً أعلى لهذا الخطأ.

٤- أوجد درجة كثيرة حدود تايلور والتي تساوي الدالة $f(x)=\ln(x)$ عند $x=1$ وتقرب $f(1.5)=\ln(1.5)$ بدقة 10^{-3}.

٥- عبر عن العددين 17.294 و 637 بالنظام الثنائي.

٦- اكتب التمثيل المقطوع والمدور للأعداد التالية: $\frac{4}{3}$، $\frac{13}{6}$ و $\frac{5}{2}$ عندما $t=6$.

٧- ليكن $x=\frac{13}{6}$ و $y=\frac{7}{3}$، احسب $x+y$ وذلك باستخدام التمثيل المقطوع والمدور لهذه الأعداد عندما $t=5$. ثم احسب الخطأ في كل حالة.، ماذا تلاحظ؟.

٨- احسب الأخطاء المطلقة والنسبية لكل مما يأتي:

أ) $x=0.004$ و $x^*=0.0041$

ب) $x=4$ و $x^*=4.1$.

جـ) $x=400$ و $x^*=410$

ثم قارن الأخطاء مع بعضها البعض وكذلك الأخطاء النسبية. ماذا تلاحظ؟.

٩- أثبت أن المتتالية $\{\frac{n+1}{n^2}\}$ تتقارب إلى الصفر بمعدل تقاربي $O(\frac{1}{n})$.

١٠- أثبت أن المتتالية $\{\frac{1}{n\ln n}\}$ تتقارب إلى الصفر بمعدل تقاربي $o(\frac{1}{n})$.

١١- أثبت أن المتباينة (1.11).

١٢- أثبت أن المتباينات (1.12) و (1.13) للنظام الرقمي الذي قاعدته β.

١٣- لتكن $f(x,y)=\ln(x+y)$. استخدم نظرية تايلور لإيجاد كثيرة حدود من الدرجة الثانية والتي تساوي هذه الدالة عند النقطة $(x,y)=(2,3)$. ثم استخدم كثيرة الحدود التي أوجدتها لحساب قيمة تقريبية لـ $f(2.1,3.1)$. احسب الخطأ الفعلي المتعلق بهذا التقريب و حداً أعلى لهذا الخطأ.