الفصل الثالث

حلول أنظمة المعادلات الخطية
Solving Linear Systems

في هذا الفصل سوف ندرس بعض الطرائق العددية لحل أنظمة المعادلات الخطية من الشكل:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

بالنسبة للمجاهيل x_i ، $i = 1,2,\ldots,n$ ، حيث إن a_{ij} و b_i من أجل $i, j = 1,2,\ldots,n$ أعداداً حقيقية.

لأنظمة المعادلات الخطية (3.1) علاقة بالكثير من التطبيقات العلمية، الهندسية والطبيعية. فمثلاً، لحساب الجهد الكهربائي في شبكة كهربائية يتطلب حل نظاماً من المعادلات الخطية. أيضاً لأنظمة المعادلات الخطية علاقة ببعض المسائل في التحليل العددي حيث إنها تنشأ أثناء حل المعادلات التفاضلية العادية والجزئية.

هناك بعض العمليات الحسابية المسموح بها والتي لا تؤثر على حل النظام الخطي (3.1). إذا رمزنا بالرمز E_i للمعادلة i من النظام الخطي (3.1) فإنه يمكن تلخيص هذه العمليات بالتالي:

١ – تبديل معادلتين كل مكان الأخرى، نرمز لهذه العملية بالرمز $E_i \leftrightarrow E_j$.

٢ – ضرب المعادلة E_i بالعدد $\gamma \neq 0$ ووضع المعادلة الناتجة مكان المعادلة E_i، نرمز لهذه العملية بالرمز $\gamma E_i \to E_i$.

٣ – ضرب المعادلة E_i بالعدد $\gamma \neq 0$ وإضافة ذلك للمعادلة E_j ووضع الناتج مكان المعادلة E_j، نرمز لهذه العملية بالرمز $E_j + \gamma E_i \to E_j$.

نظرية (٣,١)

إذا تم الحصول على نظام خطي من نظام خطي آخر باستخدام العمليات السابقة فإن هذين النظامين يكونان متساويان.

مثال (٣,١)

الأنظمة الخطية التالية متساوية:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned} \tag{3.3}$$

و

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ -2x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

من الواضح أن الحل الوحيد للنظام الخطي (3.4) هو $x_1 = 1$ و $x_2 = 0$ والذي هو حل للنظامين الخطيين (3.2) و(3.3). وحيث إن النظام الخطي الأخير يتم الحصول عليه من النظامين الآخرين فإن هذا يدل على أن إجراء العمليات الحسابية المذكورة سابقا على النظام الخطي (3.2) لم يُغير من قيمة الحل.

في الواقع، بعض الطرائق التي سوف ندرسها في هذا الفصل ترتكز على هـذه الحقيقة، التي تتضمن تحويل النظام الخطي من شكله العـام (3.1) إلى أشـكال مـساوية

يسهل حلها. يطلق على هذه الطرائق اسم " الطرائق المباشرة " والتي يمكن استخدامها لإيجاد حل مضبوط (فعلي) للنظام الخطي متأثراً فقط بأخطاء التدوير المتعلقة بالحاسب. هناك طرائق أخرى سوف نناقشها وهي الطرائق التكرارية والتي تحسب قيم تقريبية لحل النظام الخطي (3.1).

يمكن استخدام المصفوفات كأداة فعالة لتمثيل أنظمة المعادلات الخطية. وبناء على ذلك فإنه كبداية مناسبة لدراسة الأنظمة الخطية فإننا سوف نستعرض في البند التالي بعض التعريفات والنظريات الأساسية في علم المصفوفات.

(٣,١) المصفوفة الجبرية
Matrix Algebra

تعريف (٣,١)

المصفوفة $\mathbf{A}$ هي عبارة عن ترتيب مستطيل من الأعداد تكون مرتبة على شكل صفوف وأعمدة.

تعريف (٣,٢)

إذا كانت المصفوفة $\mathbf{A}$ تحتوي على m صف و n عمود فإنه يقال إن المصفوفة $\mathbf{A}$ من النوع $m\times n$ ويرمز لها بالرمز $\mathbf{A}_{m\times n}$. إذا كانت $m=n$ فإن المصفوفة تكون مربعة.

إذا كانت $\mathbf{A}$ مصفوفة فإنه عادة تستخدم الرموز a_{ij}، $(\mathbf{A})_{ij}$ أو $\mathbf{A}(i,j)$ للإشارة إلى عناصر المصفوفة عند تقاطع الصف i مع العمود j. عادة تُكتب المصفوفة $\mathbf{A}$ من النوع $m\times n$ بالشكل:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots \\ a_{m1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

تعريف (٣,٣)

إذا كانت المصفوفة مكونة من n صف وعمود واحد فتسمى متجه عمود وتكتب بالشكل:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

أما إذا كانت المصفوفة مكونة من صف واحد و n عمود فتسمى متجه صف وتكتب بالشكل:

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n] \tag{3.7}$$

تعريف (٣,٤)

لتكن $\mathbf{A}$ مصفوفة من النوع $m \times n$، منقول المصفوفة ويرمز له بالرمز $\mathbf{A}^T$ هو مصفوفة معرفة بـ $(\mathbf{A}^T)_{ij} = a_{ji}$ وتكتب بالشكل:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots\cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{m2} \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

إذا كانت المصفوفة $\mathbf{A}$ من النوع $n \times n$ وكان $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ فإن المصفوفة تسمى مصفوفة متماثلة (متناظرة).

نذكر هنا أنه إذا كانت $\mathbf{A}$ مصفوفة و γ عدد حقيقي فإن $\gamma\mathbf{A}$ تكون أيضاً مصفوفة معرفة بـ $(\gamma\mathbf{A})_{ij} = \gamma a_{ij}$. إذا كانت $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ مصفوفتان من النوع $m \times n$ ومعرفة بـ $(\mathbf{A})_{ij} = a_{ij}$ و $(\mathbf{B})_{ij} = b_{ij}$ فإن $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ تكون مصفوفة من نفس النوع ومعرفة بـ $(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. كما أنه يقال إن $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ إذا كانت $a_{ij} = b_{ij}$ لكل $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le n$. وإذا كانت $\mathbf{A}$ مصفوفة من النوع $m \times p$ و $\mathbf{B}$ مصفوفة من النوع $p \times n$ فإن حاصل الضرب $\mathbf{AB}$ يكون مصفوفة من النوع $m \times n$ ومعرفة بالتالي:

$$(\mathbf{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \tag{3.9}$$

مثال (٣,٢)

١- إذا كانت $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ و $\gamma = 2$ فإن:

$$\gamma\mathbf{A} = 2\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ -4 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

٢- لتكن $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ و $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ فإن:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & -1 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix}$$

٣- لنعين المصفوفات المتساوية فيما يلي:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}،\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}\ \text{و}\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

بما أن $a_{ij} = b_{ij}$ لكل $i, j = 1,2,3$ فإن $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. ولكن $\mathbf{A} \neq \mathbf{C}$ وذلك لأن $a_{23} \neq c_{23}$.

٤- إذا كان $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ و $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ فإن حاصل الضرب $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ يكون:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

نظرية (٣,٢)

لتكن $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ ثلاث مصفوفات من النوع $m \times n$ ولتكن α و γ أعداد حقيقية. فإن الخواص التالية صحيحة:

١- $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

٢- $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$.

٣- $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$ ، حيث إن $\mathbf{0}$ المصفوفة الصفرية من النوع $m \times n$. المقصود بالمصفوفة الصفرية هي تلك التي تكون جميع عناصرها أصفاراً.

٤- $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = -\mathbf{A} + \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

٥- $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$.

٦- $(\alpha + \gamma)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \gamma\mathbf{A}$.

٧- $\alpha(\gamma\mathbf{A}) = (\alpha\gamma)\mathbf{A}$.

هناك مصفوفات خاصة سوف نحتاج لها أثناء دراستنا للطرائق المباشرة والتكرارية لحل النظام الخطي (3.1). لهذه المصفوفات بعض الخواص الخاصة كما هو موضح فيما يلي:

تعريف (٣,٥)

١- يقال إن المصفوفة $\mathbf{U}$ من النوع $n\times n$ مصفوفة مثلثية عليا إذا كان $u_{ij}=0$ لكل $i>j$. أي أن عناصر المصفوفة التي تقع تحت القطر تكون أصفاراً.

٢- تسمى المصفوفة $\mathbf{L}$ من النوع $n\times n$ مصفوفة مثلثية دنيا إذا كان $l_{ij}=0$ عندما $i<j$. هذا يعني أن كل عناصر المصفوفة والتي تقع فوق القطر مساوية للصفر.

٣- المصفوفة القطرية $\mathbf{D}=(d_{ij})$ من النوع $n\times n$ هي المصفوفة التي عناصرها تحقق $d_{ij}=0$ لكل $i\neq j$. إذا كانت $d_{ii}=1$ من أجل $i=1,2,\ldots,n$ فإن المصفوفة القطرية في هذه الحالة تسمى مصفوفة أحادية ويرمز لها بالرمز $\mathbf{I}_n$. للمصفوفة الأحادية الخاصية التالية:

$$\mathbf{I}_n\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{I}_n \tag{3.10}$$

حيث إن A مصفوفة مربعة من النوع $n\times n$.

نظرية (٣,٣)

لتكن $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$ ، $\mathbf{C}$ و $\mathbf{F}$ مصفوفات من الأنواع $n\times m$ ، $m\times k$ ، $k\times p$ و $m\times k$، بالترتيب، وليكن α عدد حقيقي فإن الخواص التالية محققة:

١- $\mathbf{A(BC)}=\mathbf{(AB)C}$

٢- $\mathbf{A(B+F)}=\mathbf{AB}+\mathbf{AF}$

٣- $\mathbf{I}_n\mathbf{B}=\mathbf{B}$ و $\mathbf{B}\mathbf{I}_n=\mathbf{B}$.

٤- $\alpha(\mathbf{AB})=(\alpha\mathbf{A})\mathbf{B}$

نظرية (٣,٤)

يكون للمصفوفة المربعة معكوس واحد على الأكثر.

نظرية (٣,٥)

إذا كانت $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ مصفوفتان بحيث إن $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ فإن $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$.

نستنتج من نظرية (٣,٥) أنه إذا كان للمصفوفة المربعة $\mathbf{A}$ معكوس أيمن $\mathbf{B}$ فإن $\mathbf{B}$ تكون وحيدة وأن $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$. وبناء على ذلك فإننا نسمي $\mathbf{B}$ معكوس المصفوفة $\mathbf{A}$ ونقول أن $\mathbf{A}$ قابلة للعكس أو غير منفردة (غير شاذة) كما هو موضح في التعريف التالي:

تعريف (٣,٦) (معكوس المصفوفة)

١ - يقال إن المصفوفة المربعة $\mathbf{A}$ من النوع $n\times n$ غير منفردة إذا كان هناك مصفوفة $\mathbf{A}^{-1}$ من النوع نفسه وتحقق $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. المصفوفة $\mathbf{A}^{-1}$ تسمى معكوس المصفوفة $\mathbf{A}$. ويقال إن المصفوفة في هذه الحالة مصفوفة غير شاذة (غير منفردة).

٢ - يقال إن المصفوفة $\mathbf{A}$ شاذة (منفردة) إذا لم يوجد لها معكوس.

مثال (٣,٣)

معكوس المصفوفة $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ هو $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ حيث إن:

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2$$

إذا كان للمصفوفة $\mathbf{A}$ معكوس فإن النظام الخطي (3.1) يكون له حل وحيد $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

إذا كانت $\mathbf{A}^{-1}$ متوفرة فلا بأس من حساب $\mathbf{x}$ بهذه الطريقة أما إذا كانت غير متوفرة فإن حسابها لهدف إيجاد الحل مكلف مقارنة بالطرائق التي سوف ندرسها في

هذا الكتاب وهي عادة تستخدم لحساب هذا الحل. لاحظ أنه إذا كانت **A** قابلة للعكس فإن $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ تعني أن $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (المتجه الصفري) هو الحل الوحيد.

تعريف (٣,٧) (محدد المصفوفة)

يُعرف محدد المصفوفة **A** من النوع $n \times n$ بالتالي:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad \text{لأي} \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{3.11}$$

أو

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad \text{لأي} \quad j = 1,2,\ldots,n \tag{3.12}$$

حيث إن $A_{ij} = (-1)^{i+j} W_{ij}$ هو المتعامل المتعلق بـ W_{ij}، حيث إن W_{ij} هو عبارة عن محدد للمصفوفة الجزئية من المصفوفة **A** بعد حذف الصف i والعمود j، وهي من النوع $(n-1)\times(n-1)$.

مثال (٣,٤)

لنحسب محدد المصفوفة:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

بوضع $n = 3$ و $i = 3$ في المعادلة (3.11) نجد أن:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \sum_{j=1}^{3} a_{3j} A_{3j} \\ &= -2(-1)^{3+1} \det\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - 3(-1)^{3+2} \det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + 6(-1)^{3+3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \\ &= -2(-6) + 3(-12) + 6(2+4) = 12 \end{aligned}$$

في الواقع هناك علاقة بين قيمة المحدد وقابلية المصفوفة للعكس، حيث إنه إذا كان محدد المصفوفة يساوي الصفر فإن المصفوفة تكون شاذة، أي ليس لها معكوس.

نظرية (٣,٦)

لأي مصفوفات عشوائية $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$، العمليات التالية تكون محققة إذا أمكن إنجازها:

١- $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

٢- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$.

٣- $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

٤- إذا كانت $\mathbf{A}^{-1}$ موجودة فإن $(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$.

٥- $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$.

تعريف (٣,٨) (المصفوفة المحزمة)

تسمى المصفوفة $\mathbf{A}$ من النوع $n\times n$ مصفوفة محزمة إذا وُجد عددين صحيحين p و q حيث إن $1 < p, q < n$ بحيث إن $a_{ij} = 0$ إذا كان $i + p \le j$ أو $j + q \le i$. السعة لحزام المصفوفة هو $\omega = p + q - 1$.

تعريف (٣,٩) (المصفوفة ثلاثية الأقطار)

المصفوفة ثلاثية الأقطار هي عبارة عن مصفوفة محزمة ذات حزام سعته $\omega = 3$.

مثال (٣,٥)

١- المصفوفة:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

عبارة عن مصفوفة ثلاثية الأقطار.

٢- المصفوفة:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة محزمة وسعة حزامها $\omega = 3+3-1 = 5$، وهي مصفوفة خماسية الأقطار.

تعريف (٣,٩)

يقال إن المصفوفة $\mathbf{A} = (a_{ij})$ من النوع $n \times n$ مصفوفة قطعية السيطرة إذا كان:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \tag{3.13}$$

من أجل $i = 1,2,\ldots,n$.

مثال (٣,٦)

المصفوفة:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

مصفوفة قطعية السيطرة حيث إن:

$|4| > |-1| + |1|$ ، $|3| > |2| + |0|$ و $|6| > |-2| + |-3|$.

نظرية (٣,٧)

إذا كانت $\mathbf{A}$ مصفوفة قطعية السيطرة من النوع $n \times n$ فإن $\mathbf{A}$ مصفوفة غير شاذة.

تعريف (٣,١٠) (مصفوفة موجبة بالتحديد)

إذا كانت المصفوفة $\mathbf{A}$ من النوع $n\times n$ مصفوفة متماثلة وتحقق $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ لكل متجه عمود $\mathbf{x} \neq 0$ ذو البعد n فإن $\mathbf{A}$ تسمى مصفوفة موجبة بالتحديد.

نظرية (٣,٨)

إذا كانت المصفوفة المربعة $\mathbf{A}$ من النوع $n\times n$ مصفوفة موجبة بالتحديد فإن $\mathbf{A}$ تكون مصفوفة غير شاذة.

مما سبق يتضح أنه باستخدام رموز المصفوفات يمكن كتابة النظام الخطي (3.1) بالشكل المصفوفي:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{3.14}$$

حيث إن:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} ،\quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}،$$

والذي يساعدنا على إيجاد الحل $\mathbf{x}$ كما سوف نرى في البنود اللاحقة. نشير هنا إلى أن المصفوفة $\mathbf{A}$ تسمى مصفوفة المعاملات.

في الختام نشير إلى أنه من النظريتين (٣,٧ و٣,٨) نستنتج أنه إذا كانت $\mathbf{A}$ مصفوفة قطعية السيطرة أو موجبة بالتحديد فإنه يكون للنظام الخطي (3.14) حل وحيد، وذلك لأن $\mathbf{A}$ تكون مصفوفة غير شاذة.

(٣,٢) طريقة الحذف الجاوسي

Gauss Elimination

الفكرة الرئيسة لطريقة الحذف الجاوسي لحل النظام الخطي (3.1) هي استخدام بعض العمليات المسموح بها لكتابته بالشكل المثلثي المساوي:

$$\widehat{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \widehat{\mathbf{b}} \quad (3.15)$$

حيث إن:

$$\widehat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \cdots\cdots & \hat{a}_{1n} \\ 0 & \hat{a}_{22} & \cdots\cdots & \hat{a}_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & \hat{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

مصفوفة مثلثية عليا ومتجهي العمود:

$$\widehat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{b}_n \end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} .$$

والذي يمكن حله بسهولة باستخدام التعويض الخلفي:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{\hat{b}_n}{\hat{a}_{nn}} \\ x_i &= \frac{1}{\hat{a}_{ii}}[\hat{b}_i - \sum_{j=i+1}^{n} \hat{a}_{ij} x_j] \end{aligned} \quad (3.16)$$

من أجل $i = n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ وذلك إذا كان $\hat{a}_{ii} \neq 0$ لكل $i = 1,2,\ldots,n$.

قبل الشروع بمناقشة طريقة الحذف الجاوسي بالشكل العام، سوف نستعرضها من خلال المثال التالي:

مثال (٣,٧)

هنا سنستخدم طريقة الحذف الجاوسي لحل النظام الخطي:

$$\begin{aligned} E_1: &\quad x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ E_2: &\quad 2x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 9 \\ E_3: &\quad -3x_1 - 10x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ E_4: &\quad 2x_1 + 12x_2 + x_3 + x_4 = 15 \end{aligned} \tag{3.17}$$

الهدف هو حذف معاملات العناصر التي تحت القطر حتى نحصل على نظام خطي يسهل حله. كبداية، لنحذف المتغير x_1 من المعادلات E_j، من أجل $j = 2,3,4$ وذلك بإجراء العمليات التالية $(E_2 - 2E_1) \to E_2$، $(E_3 + 3E_1) \to E_3$ و $(E_4 - 2E_1) \to E_4$، على الترتيب، حيث نحصل على:

$$\begin{aligned} E_1: &\quad x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ E_2: &\quad 4x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ E_3: &\quad -4x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 4 \\ E_4: &\quad 8x_2 + 3x_3 - x_4 = 11 \end{aligned}$$

وبشكل مشابه يمكن حذف المتغير x_2 من المعادلتين E_j، من أجل $j = 3,4$، وذلك باستخدام العمليات الحسابية $(E_3 + E_2) \to E_3$ و $(E_4 - 2E_2) \to E_4$ للحصول على:

$$\begin{aligned} E_1: &\quad x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ E_2: &\quad 4x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ E_3: &\quad -3x_3 + 3x_4 = 9 \\ E_4: &\quad x_3 + x_4 = 1 \end{aligned}$$

وباستخدام العملية $(E_4 + \frac{1}{3}E_3) \to E_4$ يمكن حذف المتغير x_3 من المعادلة الرابعة للحصول على:

$$\begin{aligned}
E_1 &: \quad x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\
E_2 &: \quad 4x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\
E_3 &: \quad -3x_3 + 3x_4 = 9 \\
E_4 &: \quad 2x_4 = 4
\end{aligned}$$

وهذا نظاماً خطياً مصفوفة معاملاته عبارة عن مصفوفة مثلثية عليا وبالتالي يمكن استخدام التعويض الخلفي (3.16) لإيجاد الحل كما يلي:

$$x_4 = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_3 = -\frac{1}{3}[9 - 3x_4] = -\frac{1}{3}[9 - 3(2)] = -1$$

$$x_2 = \frac{1}{4}[5 - x_3 + x_4] = \frac{1}{4}[5 + 1 + 2] = 2$$

$$x_1 = [2 - 2x_2 + x_3 - x_4] = 2 - 4 - 1 - 2 = -5$$

وبالتالي فإن حل النظام الخطي (3.17) هو: $x_1 = -5$ ، $x_2 = 2$ ، $x_3 = -1$ و $x_4 = 2$.

نستأنف الآن مناقشة طريقة الحذف الجاوسي بشكلها العام لحل النظام الخطي (3.1). لعمل ذلك نكتب هذا النظام بالشكل المصفوفي $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ونستخدم ما تسمى بالمصفوفة الموسعة للنظام الخطي (3.1) والتي يمكن كتابتها بالشكل:

$$[\mathbf{A} : \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} & \vdots & b_n \end{bmatrix} \qquad (3.18)$$

والتي هي عبارة عن مصفوفة من النوع $n \times (n+1)$ حيث إن العمود $(n+1)$ هو عبارة عن متجه العمود $\mathbf{b}$.

كما سبق أن ذكرنا فإن هدف طريقة الحذف الجاوسي هو حذف العناصر التي تقع تحت قطر المصفوفة، بالتالي فإن المرحلة الأولى للطريقة هي حذف المتغير x_1 من المعادلات E_j، من أجل $j=2,3,\ldots,n$ وذلك بتنفيذ العمليات التالية:

$$(E_j - m_{j1}E_1) \to E_j \tag{3.19}$$

حيث إن $m_{j1}=\dfrac{a_{j1}}{a_{11}}$، من أجل $j=2,3,\ldots,n$، وذلك بفرض أن $a_{11}\neq 0$، لنحصل على:

$$[\mathbf{A}^{(2)}:\mathbf{b}^{(2)}]=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots\cdots & a_{1n}^{(1)} & : b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots\cdots & a_{2n}^{(2)} & : b_2^{(2)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots\cdots & a_{nn}^{(2)} & : b_n^{(2)} \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

الرمز الموجود أعلى العناصر a_{1j}، $1\le j\le n$ و b_1 للدلالة على أن هذه العناصر لم تتأثر بالعمليات الحسابية (3.19)، أي أن $a_{1j}^{(1)}=a_{1j}$، $1\le j\le n$ و $b_1^{(1)}=b_1$. نشير هنا إلى أنه إذا لم يكن هناك تغيير للصفوف فإن عنصر الارتكاز (هنا a_{11}) ومعادلة الارتكاز (المعادلة الأولى) لا تتأثر بالعمليات الحسابية. من ناحية أخرى، الرمز (2) الموجود على باقي العناصر هو للإشارة إلى أن هذه العناصر قد تأثرت بالعمليات الحسابية (3.19). في الواقع، سنرمز بالرمز $a_{ij}^{(k+1)}$ للعناصر التي قد تأثرت بالعمليات الحسابية المرافقة للمرحلة k لكل $k=1,2,\ldots,n-1$.

الآن إذا كان عنصر الارتكاز $a_{22}^{(2)}\neq 0$، فإنه يمكن حذف المتغير x_2 من المعادلات E_j، من أجل $j=3,4,\ldots,n$ وذلك بتنفيذ العمليات:

$$(E_j - m_{j2}E_2) \to E_j$$

حيث إن $m_{j2} = \dfrac{a_{j2}}{a_{22}}$، من أجل $j = 3,4,\ldots,n$ للحصول على:

$$[\mathbf{A}^{(3)} : \mathbf{b}^{(3)}] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots\cdots & a_{1n}^{(1)} & : b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots\cdots & a_{2n}^{(2)} & : b_2^{(2)} \\ \vdots & 0 & a_{33}^{(3)} & a_{3n}^{(3)} & : b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} \cdots\cdots & a_{nn}^{(3)} & : b_n^{(3)} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

وهكذا، فإنه بعد إنجاز المرحلة $(k-1)$ نكون حصلنا على

$$[\mathbf{A}^{(k)} : \mathbf{b}^{(k)}] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots\cdots & & a_{1n}^{(1)} & : b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots\cdots & & a_{2n}^{(2)} & : b_2^{(2)} \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{kk}^{(k)} \cdots\cdots & a_{kn}^{(k)} & : b_k^{(k)} \\ \vdots & & 0 & \vdots & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & a_{nk}^{(k)} & a_{nn}^{(k)} & : b_n^{(k)} \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

إذا كان عنصر الارتكاز $a_{kk}^{(k)}$ لا يساوي الصفر فإنه يمكن إنجاز العمليات الحسابية:

$$(E_j - m_{jk}E_k) \to E_j \tag{3.23}$$

حيث إن $m_{jk} = \dfrac{a_{jk}}{a_{kk}}$، من أجل $j = k+1, k+2, \ldots, n$ لحذف x_k من المعادلات E_j، من أجل $j = k+1, k+2, \ldots, n$. أما إذا كان $a_{kk}^{(k)} = 0$ فإنه لا يمكن إجراء العمليات الحسابية (3.23) وذلك لعدم التمكن من حساب m_{jk}. والأسلوب المتبع في هذه الحالة هو البحث عن عنصر في العمود k يقع تحت القطر ولا يساوي الصفر.

إذا كان $a_{pk}^{(k)} \neq 0$، حيث إن $k+1 \leq p \leq n$، فإننا ننجز تغيير مواقع الصفيين $E_k \leftrightarrow E_p$، ومن ثم نتابع الحذف كما سبق. أما إذا كان $a_{pk}^{(k)} = 0$ لكل $p = k, k+1, \ldots, n$، فإن هذا يعني أنه لا يوجد حل وحيد لهذا النظام الخطي وتتوقف العمليات الحسابية. (راجع المثالين ٣,١٠ و ٣,١١).

إذا تمت جميع عمليات الحذف الجاوسي بنجاح فإن المصفوفة الموسعة تأخذ الشكل:

$$[\mathbf{A}^{(n)} : \mathbf{b}^{(n)}] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n}^{(1)} & \vdots b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots\cdots\cdots & a_{2n}^{(2)} & \vdots b_2^{(2)} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots \quad \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} & \vdots b_n^{(n)} \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

والتي تمثل نظام المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ddots \qquad \vdots \quad & \quad \vdots \\ \ddots \quad \vdots \quad & \quad \vdots \\ \ddots \; \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{3.25}$$

المساوي للنظام الخطي الأصلي (3.1). يمكن استخدام التعويض الخلفي (3.16) لإيجاد الحل $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$. نشير هنا إلى أننا لم نكتب الرموز الدالة على تغيير العناصر a_{ij} لعدم الحاجة لها في المعادلة (3.25).

أخيراً، نذكر أنه إذا كان $a_{nn}^{(n)} = 0$، فإن هذا يعني أن طريقة الحذف قد تمت ولكن لا يوجد للنظام الخطي حل وحيد. يستعرض المثال التالي كيفية استخدام هذا الأسلوب لحل النظام الخطي الموجود في المثال (٣,٧).

مثال (٣,٨)

المصفوفة الموسعة للنظام الخطي الموجود في المثال (٣,٧) تأخذ الشكل:

$$[\mathbf{A}:\mathbf{b}]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & : & 2 \\ 2 & 8 & -1 & 1 & : & 9 \\ -3 & -10 & -1 & 1 & : & -2 \\ 2 & 12 & 1 & 1 & : & 15 \end{bmatrix}$$

وباستخدام العمليات الحسابية $E_j \rightarrow (E_j - m_{j1}E_1)$، من أجل $j = 2,3,4$، حيث إن $m_{21} = 2$، $m_{31} = -3$ و $m_{41} = 2$ نحصل على:

$$[\mathbf{A}^{(2)}:\mathbf{b}^{(2)}]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & : & 2 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & : & 5 \\ 0 & -4 & -4 & 4 & : & 4 \\ 0 & 8 & 3 & -1 & : & 11 \end{bmatrix}$$

ولحذف x_2 من المعادلتين E_j، من أجل $j = 3,4$ نستخدم العمليات الحسابية $E_j \rightarrow (E_j - m_{j2}E_2)$، من أجل $j = 3,4$، حيث إن $m_{32} = -1$ و $m_{42} = 2$ لنحصل على:

$$[\mathbf{A}^{(3)}:\mathbf{b}^{(3)}]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & : & 2 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & : & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & : & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & : & 1 \end{bmatrix}$$

وباستخدام العملية الحسابية $E_4 \rightarrow (E_4 - m_{43}E_3)$، حيث إن $m_{43} = -\frac{1}{3}$ يكون لدينا المصفوفة الموسعة:

$$[\mathbf{A}^{(4)} : \mathbf{b}^{(4)}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & : & 2 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & : & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & : & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & : & 4 \end{bmatrix}$$

والتي تمثل النظام الخطي المثلثي:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ 4x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \\ -3x_3 + 3x_4 &= 9 \\ 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

والذي يمكن حله بالتعويض الخلفي للحصول على الحل $\mathbf{x} = [-5,2,-1,2]^T$، كما في المثال (٣,٧).

لقد ذكرنا أثناء مناقشتنا طريقة الحذف الجاوسي أنه قد يواجهنا عنصر ارتكاز يكون مساوياً للصفر. المثال التالي يستعرض مثل هذه الحالة.

مثال (٣,٩)

استخدم طريقة الحذف الجاوسي لحل النظام الخطي:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

المصفوفة الموسعة لهذا النظام هي:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 & : & 1 \\ -1 & 3 & 3 & -1 & : & 1 \\ 3 & -7 & 2 & 2 & : & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & : & 5 \end{bmatrix}$$

وبإنجاز العمليات الحسابية $(E_j - m_{j1}E_1) \to E_j$، من أجل $j = 2,3,4$ ، حيث إن $m_{21} = -1$، $m_{31} = 3$ و $m_{41} = 1$ نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 & : & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & : & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 5 & : & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & : & 4 \end{bmatrix}$$

وبما أن عنصر الارتكاز مساوياً للصفر ($a_{22} = 0$) فإنه لا يمكن متابعة العمليات الحسابية لطريقة الحذف الجاوسي. ولكننا نبحث عن العنصر $a_{p2} \neq 0$، $3 \le p \le 4$ حيث إننا نلاحظ أن $a_{32} = 2 \neq 0$. بناء على ذلك فإننا نجري عملية الاستبدال $E_2 \leftrightarrow E_3$ للحصول على:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 & : & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 5 & : & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & : & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & : & 4 \end{bmatrix}$$

وبمتابعة طريقة الحذف الجاوسي حصلنا على:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 & : & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 5 & : & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & : & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & : & 3 \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 & : & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 5 & : & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & : & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & : & 5 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن حل النظام الخطي هو $\mathbf{x} = [9,3,0,-1]^T$.

خوارزمية (٣,١): الحذف الجاوسي والتعويض الخلفي

تستخدم هذه الخوارزمية طريقة الحذف الجاوسي والتعويض الخلفي لحل النظام الخطي: $\mathbf{Ax = b}$ إذا أعطينا عدد المجاهيل n، عناصر المصفوفة $\mathbf{A}$ والمتجه $\mathbf{b}$ فإن الخوارزمية: تحسب الحل $\mathbf{x}$ للنظام الخطي.

الخطوة ١: من أجل $k = 1,2,\ldots,n-1$ اعمل الخطوات ٢ - ٤.

الخطوة ٢: ابحث عن أصغر عدد صحيح موجب l بحيث إن $a_{lk} \neq 0$ و $k \le l \le n$.

إذا لم يوجد عدد صحيح يحقق ذلك فاطبع " لا يوجد حل وحيد"، قف.

الخطوة ٣: إذا كان $l \neq k$ فبدل مواضع الصفين l و k كل مكان الآخر. (لعمل ذلك. يمكنك الاستعانة بالخوارزمية ٣,٢).

الخطوة ٤: من أجل $i = k+1, k+2,\ldots,n$ اعمل الخطوات ٥ - ٩.

الخطوة ٥: احسب $m_{ik} = \dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}$.

الخطوة ٦: ضع $a_{ik} = 0$.

الخطوة ٧: احسب $b_i = b_i - m_{ik} b_k$.

الخطوة ٨: من أجل $j = k+1, k+2,\ldots,n$ احسب $a_{ij} = a_{ij} - m_{ik} a_{kj}$.

الخطوة ٩: إذا كان $a_{nn} = 0$ فاطبع " لا يوجد حل وحيد"، قف.

الخطوة ١٠: احسب $x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$.

الخطوة ١١: من أجل $i = n-1, n-2,\ldots,2,1$ احسب $x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}[b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j]$.

الخطوة ١٢: اطبع الحل $\mathbf{x}$. قف.

يوضح المثالين التاليين أنه في حالة فشل الخوارزمية (٣,١) يكون هناك احتمالين، الأول منهما هو وجود عدد لانهائي من الحلول للنظام الخطي المراد حله، أما الاحتمال الثاني فهو عدم وجود حل على الإطلاق. وفي كلتا الحالتين تكون مصفوفة المعاملات للنظام الخطي شاذة، أي أنه لا يوجد حل وحيد كما أسلفنا.

مثال (٣,١٠)

اعتبر النظام الخطي:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 \qquad &= 4 \end{aligned}$$

والذي مصفوفته الموسعة هي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & : & 1 \\ 2 & -2 & 1 & : & 3 \\ 3 & -1 & 0 & : & 4 \end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة الحذف الجاوسي حصلنا على:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & : & 1 \\ 0 & -4 & 3 & : & 1 \\ 0 & -4 & 3 & : & 1 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & : & 1 \\ 0 & -4 & 3 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}.$$

المصفوفة الأخيرة تمثل النظام الخطي المثلثي:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ -4x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

وهذا يعني أنه لدينا معادلتين بثلاثة مجاهيل، من المعادلة الثانية نحصل على:

$$x_2 = -\frac{1}{4}[1 - 3x_3]$$

وبما أنه لا يمكن حساب قيمة معينة لـ x_3 وأنها يمكن أن تأخذ أي قيمة بين $-\infty$ و $+\infty$، فإنه يوجد عدد لا نهائي من الحلول للنظام الخطي.

مثال (٣,١١)

لنعتبر النظام الخطي:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 \qquad &= 5 \end{aligned}$$

وبإنجاز العمليات الحسابية المتعلقة بالحذف الجاوسي حصلنا على النظام الخطي المثلثي:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ -4x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

والذي منه يتضح أن المعادلة الثالثة غير منطقية، في مثل هذه الحالات لا يوجد لدينا أي حل للنظام الخطي.

نختتم هذا البند بمناقشة عدد العمليات الحسابية اللازمة لحل النظام الخطي (3.1) باستخدام الحذف الجاوسي والتعويض الخلفي. بداية نلاحظ أنه للحصول على المصفوفة (3.20) من المصفوفة (3.18) نحتاج إلى $(n-1)$ عملية قسمة، $n(n-1)$ عملية ضرب و $n(n-1)$ عملية جمع/ طرح. بالمثل فإنه نحتاج إلى $(n-2)$ عملية قسمة، $(n-1)(n-2)$ عملية ضرب و $(n-1)(n-2)$ علية جمع/ طرح للحصول على المصفوفة (3.21). بالاستمرار في هذا الأسلوب، فإنه عندما حصلنا على المصفوفة (3.24) نكون قد أنجزنا عمليات قسمة عددها $(n-1)+\cdots+2+1$، عمليات ضرب عددها $1\times2+\cdots+(n-1)\times n$ وعمليات جمع/ طرح عددها $1\times2+\cdots+(n-1)\times n$.

وهذا يعني أن عدد عمليات الضرب التي نحتاجها تكون مساوية لعدد عمليات الجمع والطرح، ويمكن إعادة كتابتها كما يلي:

$$\begin{aligned}1\times 2+2\times 3+\cdots+(n-1)\times n &= \sum_{i=1}^{n}(i-1)i\\ &= \sum_{i=1}^{n} i^2-\sum_{i=1}^{n} i\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{n(n+1)}{6}(2n+1-3)=\frac{1}{3}[n(n-1)(n+1)]\end{aligned}$$

لاحظ أن عدد عمليات القسمة يمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$1+2+\cdots+(n-1)=\sum_{i=1}^{n-1} i=\frac{1}{2}n(n-1)$$

إذن، لتقليص المصفوفة من شكلها المعطى (3.18) إلى الشكل الموضح في (3.24) نحتاج إلى $\frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$ عملية ضرب، $\frac{1}{2}n(n-1)$ عملية قسمة و $\frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$ عمليات جمع/ طرح.

بقي علينا أن نحسب عدد العمليات اللازمة لإنجاز التعويض الخلفي. نلاحظ أنه لإنجاز أول خطوة في التعويض الخلفي والمعرّفة في (3.16) نحتاج إلى عملية قسمة واحدة فقط. وبالنسبة لإنجاز باقي العمليات الموجودة في المعادلة (3.16) فإننا نحتاج إلى $(n-1)$ عملية قسمة، $1+2+\cdots+(n-1)$ عملية ضرب و $1+2+\cdots+(n-1)$ عمليات جمع/ طرح. بناء عليه فإن عدد العمليات الحسابية اللازمة لإنجاز التعويض الخلفي هي: n عملية قسمة، $\frac{1}{2}n(n-1)$ عملية ضرب و $\frac{1}{2}n(n-1)$ عمليات جمع/ طرح.

مما سبق يتضح أن عدد العمليات الحسابية اللازمة لتنفيذ طريقة الحذف الجاوسي والتعويض الخلفي هي: $\frac{1}{6}n(n-1)(2n+5)$ عملية ضرب، $\frac{1}{2}n(n+1)$ عملية قسمة و $\frac{1}{6}n(n-1)(2n+5)$ عمليات جمع/ طرح.

يجدر الإشارة هنا إلى أنه إذا كانت n عدد كبير فإن المجموع الكلي العمليات الحسابية هو (تقريباً) $\frac{1}{3}n^3$ عمليات ضرب/ قسمة و $\frac{1}{3}n^3$ عمليات جمع/ طرح.

(٣,٣) طريقة الحذف الجاوسي مع الارتكاز
Gauss Elimination with Pivoting

لقد ذكرنا في البند السابق أنه إذا كان عنصر الارتكاز $a_{kk}^{(k)}$ مساوياً للصفر فإنه لابد من تغيير مواقع الصفين $E_k \leftrightarrow E_l$ وذلك إذا كان $a_{lk}^{(k)} \neq 0$، حيث إن $k+1 \le l \le n$. مناقشتنا السابقة كانت ترتكز على الحقيقة أن العمليات الحسابية لحل النظام الخطي (3.1) قد نُفذت باستخدام أعداد ذات أرقام عشرية غير منتهية. ولكن، من الناحية التطبيقية، عادة تستخدم أعداد ذات أرقام عشرية منتهية. وفي مثل هذه الحالات ليس من الصعب إيجاد بعض الأمثلة التي توضح فشل الخوارزمية (٣,١) وذلك بسبب سيطرة أخطاء التدوير على الحسابات. المثال التالي يوضح أحد هذه الحالات.

مثال (٣,١٢)

المتجه $\mathbf{x} = [10,1]^T$ هو الحل الوحيد للنظام الخطي:

$$\begin{bmatrix} 0.0003 & 1.566 \\ 0.3454 & -2.436 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.569 \\ 1.018 \end{bmatrix}$$

الآن إذا استخدمنا أعداد ذات أربعة أرقام عشرية معنوية لتنفيذ طريقة الحذف الجاوسي والتعويض الخلفي لحل هذا النظام فإنه يكون لدينا:

$$m_{21}=\frac{a_{21}}{a_{11}}=\frac{0.3454}{0.0003}=1151$$

وبإنجاز العملية $(E_2-m_{21}E_1)\to E_2$ نحصل على:

$$\begin{bmatrix}0.0003 & 1.566\\ 0 & -1804\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.569\\ -1805\end{bmatrix}$$

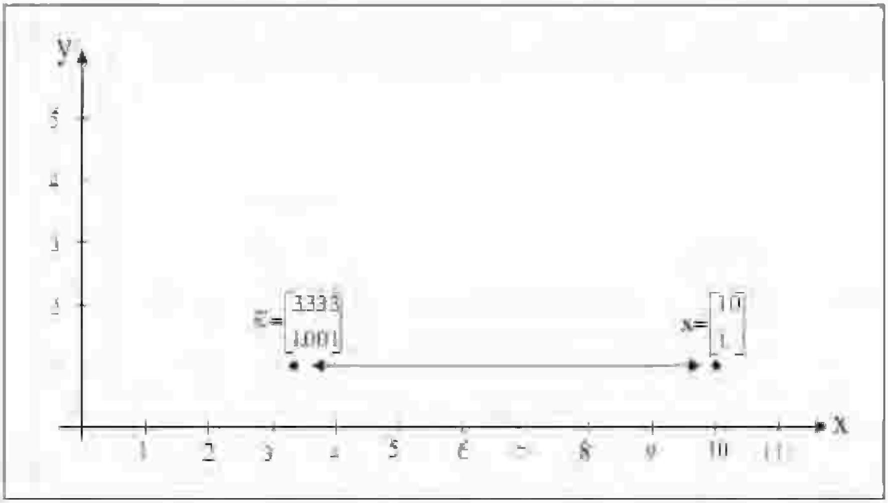
ومنه نجد أن:

$$x_2=\frac{-1805}{-1804}=1.001$$

و

$$x_1=\frac{1}{0.0003}[1.569-(1.566)(1.001)]=3.333$$

وبالتالي هناك فرق كبير بين الحل المضبوط والحل العددي $\bar{\mathbf{x}}=[3.333,1.001]^T$ ، ويتضح ذلك في الشكل رقم (٣,١) الذي يتضمن مواقع الحلين في الفضاء $\Re^2$.



الشكل رقم (٣,١). مقارنة الحل المضبوط $\mathbf{x}$ والحل العددي $\bar{\mathbf{x}}$ للمثال (٣,١٢).

يمكن تفسير سبب الخطأ الكبير (نسبياً) الذي حصل في هذا المثال كما يلي:
نلاحظ أن عنصر الارتكاز $a_{11} = 0.0003$ صغير جداً وبما أنه، كما نعلم، أن الحسابات ستقف إذا كان عنصر الارتكاز مساوياً للصفر فإنه من الطبيعي أن تكون النتائج سيئة إذا كان عنصر الارتكاز قريب من الصفر واستخدام أعداد ذات أرقام عشرية منتهية والتي تترافق معها أخطاء التدوير. بشكل عام، إذا كانت القيمة المطلقة لعنصر الارتكاز $|a_{kk}|$ صغيرة مقارنة بالقيمة $|a_{lk}|$ فإن القيمة المطلقة للمضروب $|m_{lk}|$ تكون أكبر من الواحد. وإذا كان $|a_{kk}| << |a_{lk}|$ فإن $|m_{lk}| >> 1$ وبناء على ذلك فإن أي أخطاء تدوير مرافقة لحساب عناصر الصف E_k سوف تتضاعف $|m_{lk}|$ مرة. وعليه فإن أخطاء التدوير تكبر وتتراكم إذا كانت $|m_{lk}| > 1$، بينما إذا كانت $|m_{lk}| < 1$ فإن أخطاء التدوير تصغر مع استمرار الحسابات. فمثلاً بالنسبة للمثال السابق نلاحظ أن $|m_{21}| = 1151 >> 1$ وبالتالي فإن أخطاء التدوير الموجودة في عناصر الصف الأول تتضاعف أكثر من ألف مرة مما يؤدي إلى حساب حل غير مقبول. يمكن التغلب على هذه المشكلة بإعادة ترتيب الصفوف بحيث تبقي القيمة المطلقة للمضروب أقل من واحد. الطريقة الكفيلة بعلاج هذه المشكلة هي طريقة الارتكاز الجزئي ويمكن طرحها كما يلي:

(١,٣,٣) أسلوب الارتكاز الجزئي

عند المرحلة k من طريقة الحذف الجاوسي نختار عنصر في العمود k وتحت القطر يكون ذا أكبر قيمة مطلقة، أي نبحث عن العدد الصحيح l، حيث إن $k \le l \le n$ بحيث إن:

$$|a_{lk}^{(k)}| = \max_{k \le i \le n} |a_{ik}^{(k)}| \tag{3.26}$$

إذا كان $l \neq k$ نجري عملية التغيير $E_k \leftrightarrow E_l$.

مثال (٣,١٣)

هنا نستخدم طريقة الحذف الجاوسي مع الارتكاز الجزئي لحل النظام الخطي الموجود في المثال السابق وذلك استناداً على أعداد ذات أربعة أرقام عشرية معنوية في حساباتنا.

نلاحظ أولاً أن $|a_{21}| = \max\{|a_{11}|, |a_{21}|\} = 0.3454$، وبالتالي نجري العملية $E_1 \leftrightarrow E_2$ للحصول على:

$$\begin{bmatrix} 0.3454 & -2.436 \\ 0.0003 & 1.566 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.018 \\ 1.1569 \end{bmatrix}$$

ولحذف x_1 من المعادلة الثانية نجد أن:

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{0.0003}{0.3454} = 0.0009$$

وبإجراء العملية $(E_2 - m_{21}E_1) \to E_2$ نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 0.3454 & -2.436 \\ 0 & 1.568 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.018 \\ 1.570 \end{bmatrix}$$

ومنه يكون لدينا:

$$x_2 = \frac{1.570}{1.568} = 1.001$$

و

$$x_1 = \frac{1}{0.3454}[1.569 + (2.436)(1.001)] = 10.01$$

أي أن الحل العددي الجديد هو $\tilde{\mathbf{x}} = [10.01, 1.001]^T$ وهو أفضل بكثير من الحل العددي الذي حصلنا عليه في المثال السابق. طبعاً، لا يمكن مقارنته مع الحل المضبوط هندسياً كما فعلنا مع الحل العددي السابق حيث إنه (حسب مقياس الرسم) يتطابق مع الحل المضبوط في نفس المكان.

تتضمن الخوارزمية (٣,٢) الخطوات اللازمة لإنجاز الارتكاز الجزئي، أما بالنسبة للحذف الجاوسي والتعويض الخلفي فيمكن الرجوع إلى الخوارزمية (٣,١).

خوارزمية (٣,٢): الارتكاز الجزئي

إذا أعطينا عدد المجاهيل n، عناصر المصفوفة **A** والمتجه **b** فإن الخوارزمية تستخدم الارتكاز الجزئي أثناء الحذف الجاوسي.

ملاحظة: $kcol$ هو العمود k في طريقة الحذف الجاوسي.

الخطوة ١: $Apivot = |a_{kcol,kcol}|$

الخطوة ٢: Ipivot=kcol

الخطوة ٣: $k1 = kcol + 1$

الخطوة ٤: من أجل $Irow = k1, k1+2, \ldots, n$ اعمل الخطوتين ٥ و ٦

الخطوة ٥: $A\max = |a_{Irow,Irow}|$

الخطوة ٦: إذا كان ($A\max > Apivot$) فضع $Ipivot = Irow$ و $Apivot = A\max$

الخطوة ٧: إذا كان ($Ipivot = kcol$) فاكتب، لا حاجة لتغيير الصفوف، قف.

الخطوة ٨: من أجل $i = kcol, kcol+1, \ldots, n$ اعمل الخطوات ٩ - ١١

الخطوة ٩: $save = a_{kcol,i}$

الخطوة ١٠: $a_{kcol,i} = a_{Ipivot,i}$

الخطوة ١١: $a_{Ipivot,i} = save$

الخطوة ١٢: $save = b_{kcol}$

الخطوة ١٣: $b_{kcol} = b_{Ipivot}$

الخطوة ١٤: $b_{Ipivot} = save$

الخطوة ١٥: نفذ الحذف الجاوسي مع التعويض الخلفي باستخدام خوارزمية (١,٣).

مثال (٣,١٤)

لنستخدم طريقة الحذف الجاوسي مع الارتكاز الجزئي لحل النظام الخطي الذي مصفوفته الموسعة:

$$[\mathbf{A}:\mathbf{b}]=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ 3 & -4 & 1: & 2\\ 2 & -5 & 3: & -1\end{bmatrix}$$

نلاحظ هنا أن $|a_{21}|=\max\limits_{1\le j\le 3}|a_{j1}|$ وبذلك نجري تغيير الصفوف $E_1 \leftrightarrow E_2$ لنحصل على:

$$\begin{bmatrix}3 & -4 & 1: & 1\\ 1 & -1 & -1: & 1\\ 2 & -5 & 3: & -1\end{bmatrix}$$

وبإجراء العمليتين $(E_2-\frac{1}{3}E_1)\rightarrow E_2$ ، $(E_3-\frac{1}{2}E_1)\rightarrow E_3$ نحصل على:

$$\begin{bmatrix}3 & -4 & 1: & 1\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3}: & \frac{1}{3}\\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{7}{3}: & -\frac{7}{3}\end{bmatrix}$$

وبما أن $|a_{32}|>|a_{22}|$ نجري العملية $E_3 \leftrightarrow E_2$ لنحصل على:

$$\begin{bmatrix}3 & -4 & 1: & 1\\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{7}{3}: & -\frac{7}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3}: & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

وبإنجاز العملية $(E_3 + \frac{1}{7}E_2) \to E_3$ يكون لدينا:

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & : & 1 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{7}{3} & : & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -1 & : & 0 \end{bmatrix}$$

وباستخدام التعويض الخلفي حصلنا على الحل $\mathbf{x} = [2,1,0]^T$.

إنه من الصعب (إن لم يكن من المستحيل) تحديد كيف يمكن أن تؤثر استراتيجيات الارتكاز المختلفة على دقة الحل المحسوب للنظام الخطي (3.1). الإستراتيجية المقبولة حالياً قد تكون إستراتيجية الارتكاز السلمي. في هذه الإستراتيجية، عند المرحلة k من طريقة الحذف الجاوسي نحسب:

$$s_k = \max_{k \le j \le n} |a_{kj}^{(k)}| \tag{3.27}$$

ثم نختار العنصر $a_{lk}^{(k)}$، $k \le l \le n$ الذي يحقق:

$$\frac{|a_{lk}^{(k)}|}{s_l} = \max_{k \le j \le n} \frac{|a_{jk}^{(k)}|}{s_j} \tag{3.28}$$

وإذا كان $l \ne k$ نعمل التغيير $E_k \leftrightarrow E_l$. نشير هنا إلى أنه إذا كان $s_i = 0$ لبعض k فإن هذا يعني أنه لا يوجد حل وحيد للنظام الخطي، وذلك لأن كل عناصر الصف k تساوي الصفر. سنترك للقارئ كتابة خوارزمية الارتكاز الجزئي السلمي في التمارين.

مثال (٣,١٥)

نستعرض فيما يلي إستراتيجية الارتكاز الجزئي السلمي. بحل النظام الخطي الذي مصفوفته الموسعة:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 : & 1 \\ 3 & 2 & 1 : & 1 \\ 2 & 0 & 4 : & -2 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $s_1 = \max_{1\le j\le 3} |a_{1j}| = 2$ ، $s_2 = \max_{1\le j\le 3} |a_{2j}| = 3$ و $s_3 = \max_{1\le j\le 3} |a_{3j}| = 4$

وبالتالي فإن $\frac{|a_{11}|}{s_1} = \frac{1}{2}$ ، $\frac{|a_{21}|}{s_2} = 1$ و $\frac{|a_{31}|}{s_3} = \frac{1}{2}$.

وبما أن $\max_{1\le j\le 3} \frac{|a_{j1}|}{s_j} = \frac{|a_{21}|}{s_2}$ فنعمل تغيير الصفوف $E_1 \leftrightarrow E_2$ للحصول على:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 : & 1 \\ 1 & -2 & 1 : & 1 \\ 2 & 0 & 4 : & -2 \end{bmatrix}$$

وبإنجاز العمليتين $(E_2 - \frac{1}{3}E_1) \to E_2$ ، $(E_3 - \frac{2}{3}E_1) \to E_3$ نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 : & 1 \\ 0 & -\frac{8}{3} & \frac{2}{3} : & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{10}{3} : & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

وبما أن $2.5 = \max_{2\le j\le 3} \frac{|a_{j2}|}{s_j} = \frac{|a_{32}|}{s_3}$ ننجز العملية $E_2 \leftrightarrow E_3$ للحصول على:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 : & 1 \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{10}{3} : & -\frac{8}{3} \\ 0 & -\frac{8}{3} & \frac{2}{3} : & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

وبإنجاز العملية الحسابية $E_3 \rightarrow (E_3 - 2E_2)$ لنحصل على:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 : & 1 \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{10}{3} : & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & -6 : & 6 \end{bmatrix}$$

وأخيراً، باستخدام التعويض الخلفي نحصل على الحل $\mathbf{x} = [1,-0.5,-1]^T$.

نختتم هذا البند بالإشارة إلى أنه توجد إستراتيجية ارتكازية أخرى، وهي عبارة عن البحث عن العددين الصحيحين p و q، من أجل $k \le p,q \le n$ بحيث إن القيمة المطلقة للعنصر $a_{pq}^{(k)}$ تكون أكبر ما يمكن. وبعد ذلك نعمل تغيير للصفوف و/ أو للأعمدة إذا لزم ذلك. تسمى هذه الإستراتيجية بإستراتيجية الارتكاز الكلي وهي في الواقع تتطلب جهد كبير للتطبيق وبناء على ذلك فإنها قليلة الاستخدام رغم دقة النتائج التي يمكن الحصول عليها بواسطتها.

(٣,٤) التحليل المثلثي للمصفوفات
LU Factorization

في هذا البند سوف نناقش تحليل المصفوفة $\mathbf{A}$ من النوع $n \times n$ إلى حاصل ضرب المصفوفتين $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ ، حيث إن $\mathbf{L}$ مصفوفة مثلثية دنيا و $\mathbf{U}$ مصفوفة مثلثية عليا، كلاهما من النوع $n \times n$.

يمكن إثبات أن طريقة الحذف الجاوسي هي عبارة عن أسلوب معين لإيجاد تحليل للمصفوفة بالشكل $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ ، وذلك إذا لم يكن هناك أي تغيير لصفوف المصفوفة أثناء عملية الحذف. النظرية التالية تتضمن ذلك.

نظرية (٣,٩)

لتكن $\mathbf{A}$ مصفوفة من النوع $n\times n$، وأنه قد تم تنفيذ طريقة الحذف الجاوسي على النظام الخطي $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ بدون تغيير لمواضع الصفوف، فإن هذا يعني أن المصفوفة $\mathbf{A}$ قد تم تحليلها إلى حاصل ضرب مصفوفة مثلثية دنيا $\mathbf{L}$ ومصفوفة مثلثية عليا $\mathbf{U}$، أي أن:

$$\mathbf{A}=\mathbf{LU}$$

حيث إن:

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots\cdots\cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots \quad \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{L}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \ddots & \cdots\ \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \quad \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots \quad 1 \quad \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots \quad \ddots & 0 \\ m_{n1} & \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots & m_{nk} & 1 \end{bmatrix}$$

البرهان:

نعلم أن المرحلة الأولى من طريقة الحذف الجاوسي تتضمن تصفير العناصر a_{j1} من أجل $j=2,3,\ldots,n$ باستخدام العمليات الحسابية (3.19) وذلك بفرض أن $a_{11}\neq 0$. في الواقع يمكن إنجاز هذه المرحلة بضرب المصفوفة $\mathbf{A}$ من اليسار بمصفوفة المضروب:

$$\mathbf{M}^{(1)}=\begin{bmatrix} 1 & 0\cdots\cdots\cdots & 0 \\ -m_{21} & 0\cdots\cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{n1} & 0\cdots\cdots\cdots & 0 \end{bmatrix}$$

للحصول على:

$$\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots\cdots & a_{1n}^{(1)} & : b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots\cdots & a_{2n}^{(2)} & : b_2^{(2)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots\cdots & a_{nn}^{(2)} & : b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

هنا استخدمنا نفس الرموز التي تم استخدامها في البند (٣,٢).

بشكل عام، عند المرحلة k من طريقة الحذف الجاوسي نحصل على:

$$\mathbf{A}^{(k)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots\cdots & & a_{1n}^{(1)} & : b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots\cdots & & a_{2n}^{(2)} & : b_2^{(2)} \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{kk}^{(k)} \cdots\cdots & a_{kn}^{(k)} & : b_k^{(k)} \\ \vdots & & 0 & \vdots & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & a_{nk}^{(k)} & a_{nn}^{(k)} & : b_n^{(k)} \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

وبفرض أن $a_{kk}^{(k)} \neq 0$، فإنه يمكن حذف العناصر $a_{jk}^{(k)}$ من أجل $j=k+1,k+2,\ldots,n$ بضرب (3.29) من اليسار بمصفوفة المضروب:

$$\mathbf{M}^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \cdots\cdots\cdots & & 0 \\ \vdots\ddots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & -m_{k+1,k} & 1 \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 \cdots & 0 & -m_{nk} & 0 \cdots 0 & & 1 \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

للحصول على:

$$\mathbf{M}^{(k)}\mathbf{A}^{(k)} = \mathbf{A}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots\cdots\cdots & & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots\cdots\cdots & & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{k+1,k+1}^{(k+1)} & \cdots a_{k+1,n}^{(k+1)} \\ \vdots & & 0 & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 & a_{n,k+1}^{(k+1)} & a_{nn}^{(k+1)} \end{bmatrix}$$

وهكذا فإنه عند المرحلة الأخيرة فإننا نحصل على المصفوفة المثلثية العليا:

$$\mathbf{A}^{(n)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots\cdots\cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots \quad \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

حيث إن:

$$\mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{M}^{(n-1)}\mathbf{M}^{(n-2)}\cdots\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{A} \tag{3.31}$$

وذلك بفرض أن عناصر الارتكاز $a_{kk}^{(k)}$، من أجل $k=1,2,\ldots,n-1$ لا تساوي الصفر. المعادلة (3.31) تعطينا جزء من التحليل $\mathbf{A}=\mathbf{LU}$ وهو المصفوفة المثلثية العليا $\mathbf{U}=\mathbf{A}^{(n)}$. لإيجاد المصفوفة المثلثية الدنيا $\mathbf{L}$ لنعرّف المصفوفة:

$$\mathbf{L}^{(k)}=[\mathbf{M}^{(k)}]^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \cdots\cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & m_{k+1,k} & 1\ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & m_{nk} & 0\cdots 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.32)$$

من أجل $k=1,2,\ldots,n-1$. وبالتالي فإن المصفوفة المثلثية الدنيا $\mathbf{L}$ في تحليل المصفوفة $\mathbf{A}$ هي عبارة عن حاصل ضرب المصفوفات $\mathbf{L}^{(k)}$، $k=1,2,\ldots,n-1$:

$$\mathbf{L}=\mathbf{L}^{(1)}\mathbf{L}^{(2)}\cdots\mathbf{L}^{(n-1)}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & & 0 \\ m_{21} & 1 & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \ \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots \ \ddots & 0 \\ m_{n1} & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & m_{nk} & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.33)$$

وذلك لأن حاصل ضرب المصفوفة $\mathbf{U}=\mathbf{A}^{(n)}$ يعطينا:

$$\begin{aligned}\mathbf{LU}&=\mathbf{L}^{(1)}\mathbf{L}^{(2)}\cdots\mathbf{L}^{(n-1)}\mathbf{M}^{(n-1)}\cdots\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{A}\\ &=\mathbf{L}^{(1)}\mathbf{L}^{(2)}\cdots\mathbf{L}^{(n-2)}\mathbf{I}\mathbf{M}^{(n-2)}\cdots\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{A}\\ &=\cdots\cdots=\mathbf{A}\end{aligned}$$

وهذا يثبت المطلوب.

لنناقش الآن تحليل المصفوفة $\mathbf{A}$ من النوع $n \times n$ بشكل عام، أي أن:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

لإنجاز هذا التحليل لا بد أن يكون لدينا قيم l_{ii} أو u_{ii} من أجل $i=1,2,\ldots,n$. هناك في الواقع ثلاثة أساليب مشهورة وهي كالتالي:

١ - أسلوب دوليتل (Doolittle) ويتضمن وضع $l_{ii}=1$ من أجل $i=1,2,\ldots,n$.

٢- أسلوب كروت (Crout) وهنا يتم وضع $u_{ii}=1$ من أجل $i=1,2,\ldots,n$.

٣- أسلوب شولسكي (Choleski) وفي هذا الأسلوب نضع $l_{ii}=u_{ii}$ لجميع قيم i. يتم تطبيق هذا الأسلوب عندما تكون المصفوفة $\mathbf{A}$ مصفوفة موجبة بالتحديد.

المثال التالي يستعرض كيفية استخدام أسلوب دوليتل لتحليل مصفوفة رباعية الأبعاد إلى حاصل ضرب المصفوفتين $\mathbf{L}$ و $\mathbf{U}$ ذات أبعاد رباعية.

مثال (٣,١٦)

لنحلل المصفوفة:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 8 & -1 & 1 \\ -3 & -10 & -1 & 1 \\ 2 & 12 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

إلى حاصل الضرب $\mathbf{A}=\mathbf{LU}$ ، وذلك بوضع $l_{ii}=1$ ، من أجل $i=1,2,3,4$.

من الواضح أن التحليل يأخذ الشكل:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\2&8&-1&1\\-3&-10&-1&1\\2&12&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\l_{21}&1&0&0\\l_{31}&l_{32}&1&0\\l_{41}&l_{42}&l_{43}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}&u_{14}\\0&u_{22}&u_{23}&u_{24}\\0&0&u_{33}&u_{34}\\0&0&0&u_{44}\end{bmatrix}=\mathbf{LU}$$

بما أن $l_{11}=1$ فإنه يمكن إيجاد قيم عناصر الصف الأول في $\mathbf{U}$ وذلك بضرب الصف الأول من $\mathbf{L}$ في الصف الأول لـ $\mathbf{U}$ وبمساواة كل حاصل ضرب بالعناصر التي توافقه من المصفوفة $\mathbf{A}$ نحصل على:

$$a_{1j}=l_{11}u_{1j}\ \Rightarrow\ u_{1j}=\frac{a_{1j}}{l_{11}}$$

من أجل $j=1,2,3,4$. ومنه يكون لدينا $u_{11}=1$ ، $u_{12}=2$ ، $u_{13}=-1$ و $u_{14}=1$ ، وهي عناصر الصف الأول في $\mathbf{U}$.

الآن بما أن u_{11} أصبحت معروفة فإنه يمكن إيجاد عناصر العمود الأول للمصفوفة $\mathbf{L}$ وذلك بضرب الصفوف الثلاثة الأخيرة من $\mathbf{L}$ في العمود الأول من $\mathbf{U}$ وبمساواة حاصل الضرب بالعناصر التي توافقها في المصفوفة $\mathbf{A}$ ليكون لدينا:

$$a_{i1}=l_{i1}u_{11}\quad\Rightarrow\quad l_{i1}=\frac{a_{i1}}{u_{11}}$$

من أجل $i=2,3,4$ ، ومنه نحصل على العمود الأول لـ $\mathbf{L}$: $l_{21}=2$ ، $l_{31}=-3$ و $l_{41}=2$.

وبعد ذلك يتم إيجاد عناصر الصف الثاني لـ $\mathbf{U}$ وذلك بضرب الصف الثاني من $\mathbf{L}$ بالأعمدة الثلاثة الأخيرة من $\mathbf{U}$ والمساواة للحصول على:

$$a_{2j} = l_{21}u_{1j} + l_{22}u_{2j} \quad \Rightarrow \quad u_{2j} = \frac{1}{l_{22}}[a_{2j} - l_{21}u_{1j}]$$

من أجل $j = 2,3,4$ ، ومنه يكون لدينا عناصر الصف الثاني لـ **U** وهي: $u_{22} = 4$، $u_{23} = 1$ و $u_{24} = -1$. وبمعرفة الصف الثاني من **U** يمكننا إيجاد العمود الثاني في **L** وذلك بضرب الصفين الثالث والرابع من **L** في العمود الثاني من **U** ومساواتها بما يوافقها من المصفوفة **A** حيث يكون لدينا:

$$a_{i2} = l_{i1}u_{12} + l_{i2}u_{22} \quad \Rightarrow \quad l_{i2} = \frac{1}{u_{22}}[a_{i2} - l_{i1}u_{12}]$$

من أجل $i = 3,4$، وبالتالي نحصل على $l_{32} = -1$ و $l_{42} = 2$. وبعد ذلك نوجد عناصر الصف الثالث للمصفوفة **U** وذلك بضرب الصف الثالث للمصفوفة **L** بالعمودين الثالث والرابع للمصفوفة **U** ومن ثم مساواتها بما يوافقها من **A** للحصول على:

$$a_{3j} = l_{31}u_{1j} + l_{32}u_{2j} + l_{33}u_{3j} \quad \Rightarrow \quad u_{3j} = \frac{1}{l_{33}}[a_{3j} - l_{31}u_{1j} - l_{32}u_{2j}]$$

من أجل $j = 3,4$ ، ومنه يكون لدينا $u_{33} = -3$ و $u_{34} = 3$. الآن نحسب عناصر العمود الثالث لـ **L** وهنا هو العنصر l_{43} فقط، وذلك بضرب الصف الرابع من **L** في العمود الثالث من **U** ومساواة حاصل الضرب بما يوافقه في المصفوفة **A** حيث يكون لدينا:

$$a_{43} = l_{41}u_{13} + l_{42}u_{23} + l_{43}u_{33} \quad \Rightarrow \quad l_{43} = \frac{1}{u_{33}}[a_{43} - l_{41}u_{13} - l_{42}u_{23}] = -\frac{1}{3}$$

وأخيراً، نحسب الصف الرابع لـ **U** وهو يتكون من العنصر u_{44} فقط، وذلك بضرب الصف الرابع من **L** في العمود الرابع من **U** للحصول على:

$$a_{44} = l_{41}u_{14} + l_{42}u_{24} + l_{43}u_{34} + l_{44}u_{44} \quad \Rightarrow \quad u_{44} = \frac{1}{l_{44}}[a_{44} - l_{41}u_{14} - l_{42}u_{24} + l_{43}u_{34}] = 2$$

إذن تحليل المصفوفة **A** يأخذ الشكل:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 8 & -1 & 1 \\ -3 & -10 & -1 & 1 \\ 2 & 12 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

قد يتساءل القارئ ماذا نستفيد من تحليل المصفوفة **A** إلى حاصل الضرب **LU** بالنسبة لحل المسألة الرئيسة وهي حل النظام الخطي $\mathbf{Ax = b}$ ؟. الإجابة على هذا التساؤل كالتالي:

إذا كان لدينا التحليل $\mathbf{A = LU}$ فإنه يمكن كتابة النظام الخطي $\mathbf{Ax = b}$ بالشكل $\mathbf{LUx = b}$ وبوضع $\mathbf{z = Ux}$ يكون لدينا النظامين الخطيين:

$$\mathbf{Lz = b} \tag{3.35}$$

$$\mathbf{Ux = z} \tag{3.36}$$

ومن ثم يمكن حل النظام الخطي (3.35) باستخدام التعويض الأمامي:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{b_1}{l_{11}} \\ z_i &= \frac{1}{l_{ii}}[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} z_j] \end{aligned} \tag{3.37}$$

من أجل $i = 2,3,\ldots,n$. وبمعرفة المتجه **z** يمكن حل النظام الخطي (3.36) باستخدام التعويض الخلفي للحصول على الحل **x** .

مثال (٣,١٧)

هنا نستعرض استخدام التحليل $\mathbf{A = LU}$ لحل النظام الخطي $\mathbf{Ax = b}$ حيث إن $\mathbf{A}$ هي المصفوفة الموجودة في المثال (٣,١٦) و $\mathbf{b} = [2,9,-2,15]$.

بداية من المثال السابق يكون لدينا:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -2 \\ 15 \end{bmatrix}$$

وبوضع $\mathbf{Ux = z}$ يكون لدينا:

$$\mathbf{Lz} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -2 \\ 15 \end{bmatrix}$$

وباستخدام التعويض الأمامي (3.37) نجد أن:

$$z_1 = 2$$
$$2z_1 + z_2 = 9 \quad \Rightarrow \quad z_2 = 9 - 2z_1 = 5$$
$$-3z_1 - z_2 + z_3 = -2 \quad \Rightarrow \quad z_3 = -2 + 3z_1 + z_2 = 9$$
$$2z_1 + 2z_2 - \frac{1}{3}z_3 + z_4 = 15 \quad \Rightarrow \quad z_4 = 15 - 2z_1 - 2z_2 + \frac{1}{3}z_3 = 4$$

ومن ثم يكون لدينا النظام الخطي $\mathbf{Ux = z}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

وباستخدام التعويض الخلفي (3.16) نحصل على الحل $\mathbf{x} = [-5,2,-1,2]^T$.

الخوارزمية (٣،٣) توضح الأسلوب المتبع لإيجاد التحليل $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ ، للمصفوفة $\mathbf{A}$ ذات النوع $n \times n$ ، وذلك بحيث تكون قيم عناصر قطر المصفوفة $\mathbf{L}$ معطاة (يمكن تعديلها إذا كانت عناصر قطر المصفوفة $\mathbf{U}$ هي المعطاة). ومن ثم استخدام هذا التحليل لحل النظام الخطي $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ باستخدام التعويض الأمامي والخلفي.

خوارزمية (٣،٣): التحليل $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$

إذا أعطينا عدد المجاهيل n ، عناصر المصفوفة $\mathbf{A}$ وقطر المصفوفة $\mathbf{L}$ فإن الخوارزمية توجد التحليل $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$. وإذا كان لدينا المتجه $\mathbf{b}$ فإن الخوارزمية تحل النظام الخطي $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

ملاحظة: eps هو عدد صغير موجب.

الخطوة ١: من أجل $i = 1,2,\ldots,n$ عيّن قيم لـ l_{ii} .

الخطوة ٢: من أجل $i = 1,2,\ldots,n$ اعمل الخطوات ٣ و٤

الخطوة ٣: من أجل $j = i,i+1,\ldots,n$ احسب $u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}}[a_{ij} - \sum_{m=1}^{i-1} l_{im}u_{mj}]$

إذا كان $|u_{ii}| < eps$ ، فاكتب " لا يمكن تحليل المصفوفة " ، قف.

الخطوة ٤: من أجل $k = i,i+1,\ldots,n$ احسب $l_{ki} = \frac{1}{u_{ii}}[a_{ki} - \sum_{m=1}^{i-1} l_{km}u_{mi}]$

الخطوة ٥: احسب $z_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$

الخطوة ٦: من أجل $i = 2,3,\ldots,n$ احسب $z_i = \frac{1}{l_{ii}}[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}z_j]$

ملاحظة: لحل النظام الخطي $\mathbf{Ux} = \mathbf{z}$ راجع خطوات التعويض الخلفي في الخوارزمية (٣،١).

الخطوة ٧: اطبع المصفوفتين $\mathbf{L}$ و $\mathbf{U}$ والحل $\mathbf{x}$.

لقد ذكرنا في البند (٣,١) بعض المصفوفات الخاصة ومنها المصفوفة الموجبة بالتحديد، (تعريف ٣,١٠)، حيث أشرنا إلى أن هذه المصفوفة تكون غير شاذة وبالتالي يوجد حل وحيد للنظام الخطي (3.1). في الواقع، هناك بعض الصفات الأخرى لهذه المصفوفة كما توضحه النظرتين التاليتين.

نظرية (٣,٩)

إذا كانت المصفوفة $\mathbf{A}$ ذات النوع $n\times n$ مصفوفة موجبة بالتحديد فإن الخواص التالية تكون متحققة:

١- المصفوفة $\mathbf{A}$ غير شاذة.

٢- $a_{ii}>0$ لكل $1\leq i\leq n$.

٣- $\max\limits_{1\leq i\leq n}|a_{ii}|\geq \max\limits_{1\leq j,k\leq n}|a_{kj}|$.

٤- $a_{ii}a_{jj}>(a_{ij})^2$ لكل $1\leq i,j\leq n$.

نلاحظ من النظرية (٣,٩) بأنه يمكن استخدام طريقة شولسكي لإيجاد التحليل $\mathbf{A}=\mathbf{LU}$، حيث نضع $l_{ii}=u_{ii}$ لكل $1\leq i\leq n$. لاحظ هنا أنه عندما $i=1$ يكون لدينا $a_{11}=l_{11}u_{11}=l_{11}^2$ وبالتالي فإن $l_{11}=\sqrt{a_{11}}$ وهذا لا يكون عدد حقيقي إلا إذا كان $a_{11}>0$. تتضمن النظرية التالية التحليل الخاص بالمصفوفة الموجبة بالتحديد.

نظرية (٣,١٠)

تكون المصفوفة $\mathbf{A}$ ذات الأبعاد $n\times n$ مصفوفة موجبة بالتحديد إذا وفقط إذا كان $\mathbf{A}=\mathbf{LL}^T$، حيث إن $\mathbf{L}$ مصفوفة مثلثية دنيا عناصرها القطرية لا تساوي الصفر ($l_{ii}\neq 0$ لكل $1\leq i\leq n$).

كما هو الحال بالنسبة للتحليل $\mathbf{A}=\mathbf{LU}$ فإنه إذا كان لدينا التحليل $\mathbf{A}=\mathbf{LL}^T$ فإنه يمكن حل النظام الخطي $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ كما يلي:

بما أن $\mathbf{Ax}=\mathbf{LL}^T\mathbf{x}=\mathbf{b}$ فبوضع $\mathbf{L}^T\mathbf{x}=\mathbf{z}$ وحل النظام الخطي المثلثي العلوي $\mathbf{Lz}=\mathbf{b}$ باستخدام التعويض الأمامي (3.37) للحصول على $\mathbf{z}$ ومن ثم نستخدم التعويض الخلفي (3.16) لحل النظام المثلثي $\mathbf{L}^T\mathbf{x}=\mathbf{z}$ بالنسبة لـ $\mathbf{x}$.

الخوارزمية (٣,٤) توضح خطوات تحليل المصفوفة $\mathbf{A}$ إلى حاصل الضرب $\mathbf{LL}^T$، حيث إن $\mathbf{L}$ كما هي معرفة في النظرية (٣,١٠).

خوارزمية (٣,٤): طريقة شولسكي

إذا أعطينا عدد المجاهيل n، عناصر المصفوفة الموجبة بالتحديد $\mathbf{A}$ فإن الخوارزمية توجد التحليل $\mathbf{A}=\mathbf{LL}^T$. وإذا كان لدينا المتجه $\mathbf{b}$ فإنه يمكن إضافة خطوات التعويضين الأمامي والخلفي لحساب حل النظام الخطي $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$.

الخطوة ١: احسب $l_{11}=\sqrt{a_{11}}$.

الخطوة ٢: من أجل $j=2,3,\ldots,n$ احسب $l_{j1}=\dfrac{a_{j1}}{l_{11}}$.

الخطوة ٣: $i=2,3,\ldots,n-1$ اعمل الخطوتين ٤ و٥.

الخطوة ٤: احسب $l_{ii}=\sqrt{a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}^2}$.

الخطوة ٥: من أجل $j=i+1,\ldots,n$ احسب $l_{ji}=\dfrac{1}{l_{ii}}[a_{ji}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{jk}l_{ik}]$.

الخطوة ٦: احسب $l_{nn}=\sqrt{a_{nn}-\sum_{k=1}^{n-1}l_{nk}^2}$.

الخطوة ٧: اطبع l_{ij} من أجل $1\le i\le n$ و $1\le j\le i$.

مثال (٣,١٨)

اعتبر النظام الخطي:

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 \qquad &= \sqrt{2} \\
-x_1 + 2x_2 - x_3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
-x_2 + 2x_3 &= \frac{2}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

سنحلل مصفوفة المعاملات لهذا النظام إلى حاصل الضرب $\mathbf{LL}^T$ وذلك باستخدام الخوارزمية (٣,٥) كما يلي:

في البداية نلاحظ أن $l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{2}$ ومنه يمكن الحصول على:

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0 \text{ و } l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

وبالتالي فإنه يكون لدينا:

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - \sum_{k=1}^{2-1} l_{2k}^2} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{1.5}$$

و

$$l_{32} = \frac{1}{l_{22}}[a_{32} - \sum_{k=1}^{2-1} l_{3k} l_{2k}] = \frac{1}{\sqrt{1.5}}[-1-(0)(\frac{-1}{\sqrt{2}})] = -\frac{1}{\sqrt{1.5}}$$

وأخيراً نجد أن:

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - \sum_{k=1}^{3-1} l_{3k}^2} = \sqrt{2 - 0 - \frac{1}{1.5}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$\mathbf{A}=\mathbf{LL}^T \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{1.5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{1.5}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{1.5} & -\frac{1}{\sqrt{1.5}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

لإيجاد الحل $\mathbf{x}$ نجد أنه من النظام الخطي المثلثي العلوي:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{1.5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{1.5}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

نحصل على المتجه $\mathbf{z}=[1,0,1]^T$ وذلك باستخدام التعويض الأمامي. ومن النظام الخطي المثلثي:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{1.5} & -\frac{1}{\sqrt{1.5}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نحصل على الحل $\mathbf{x}=[1+\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{\sqrt{3}}{2}]^T$ وذلك بالتعويض الخلفي.

(٣,٥) المعايير المتجهية والمصفوفية
Vector and Matrix Norms

نحن نعلم أن القيمة المطلقة لعدد ما هي الأسلوب الأمثل لقياس مقدار(حجم) هذا العدد. أما بالنسبة لقياس حجم المتجه $\mathbf{x}$ ذو البعد n أو المصفوفة $\mathbf{A}$ ذات النوع $n\times n$ فهناك معايير معينة سوف نستعرضها في هذا البند.

تعريف (٣,١١)

المعيار المتجهي على مجموعة المتجهات $\Re^n$ هو عبارة عن دالة حقيقية من $\Re^n$ إلى $\Re$ ويرمز له بالرمز $\|.\|$ ويحقق الخواص التالية:

١- $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ لكل $\mathbf{x}\in\Re^n$.

٢- $\|\mathbf{x}\| = 0$ إذا كان وكان فقط $\mathbf{x}=[0,0,\ldots,0]^t$.

٣- $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{x}\|$ لكل $\alpha\in\Re$ و $\mathbf{x}\in\Re^n$.

٤- $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ لكل $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\Re^n$.

هناك عدة معايير متجهية لقياس حجم المتجه $\mathbf{x}$، التعريف التالي يتضمن معيار القيم العظمى $\|.\|_\infty$ والمعيار الإقليدي $\|.\|_2$ وهي أشهر المعايير استخداماً.

تعريف (٣,١٢)

ليكن $\mathbf{x}\in\Re^n$ فإن المعيارين $\|.\|_\infty$ و $\|.\|_2$ للمتجه $\mathbf{x}\in\Re^n$ معرفة كما يلي:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \tag{3.38}$$

و

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \tag{3.39}$$

نشير إلى أنه يرمز لمعيار القيم العظمى بالرمز l_∞ وللمعيار الإقليدي بالرمز l_2.

يستخدم عادة في الأمثلة العددية المعيار l_∞ لقياس حجم المتجه $\mathbf{x}$. ليس من الصعب التحقق من أن المعيار $\|.\|_\infty$ يحقق الخواص الموجودة في التعريف (٣,١١)، ونترك ذلك للقارئ. كذلك الحال بالنسبة للمعيار l_2.

تعريف (٣,١٣)

ليكن لدينا $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \Re^n$، فإن المسافة بين المتجهين $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ بالنسبة للمعيارين l_∞ و l_2 معرفة كما يلي:

$$\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|_\infty = \max_{1 \le i \le n} | x_i - y_i | \tag{3.40}$$

و

$$\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \tag{3.41}$$

مثال (٣,١٩)

اعتبر المتجهين $\mathbf{x} = [1.2,3.1,2]^T$ و $\mathbf{y} = [1,2.85,2.1]^T$. بما أن:

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = [1.2,3.1,2]^T - [1,2.85,2.1]^T = [0.2,0.25,-0.1]^T$$

فإن:

$$\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|_\infty = \max\{| 0.2 |,| 0.25 |,| -0.1 |\} = 0.25$$

و

$$\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|_2 = \sqrt{(0.2)^2 + (0.25)^2 + (-0.1)^2} = 0.3354$$

نشير هنا إلى أنه يمكن استخدام التعريف (٣,١٣) لحساب الفرق (المسافة) بين الحل المضبوط $\mathbf{x}$ والحل العددي (التقريبي) $\tilde{\mathbf{x}}$ للنظام الخطي $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. فمثلاً، بالنسبة للمثال (٣,١٢) يكون الفرق بين الحل المضبوط $\mathbf{x} = [10,1]^T$ والحل العددي

$\tilde{\mathbf{x}} = [3.333, 1.001]^T$ بالنسبة للمعيار l_∞ هو $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty = 6.667$ وهذا يتوافق مع المسافة بين هذين المتجهين التي تم الحصول عليها بواسطة الرسم، راجع الشكل رقم (٣,١) في البند (٣,٣).

تعريف (٣,١٤)

يقال إن متتالية المتجهات $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$، حيث إن $\mathbf{x}^{(k)} \in \Re^n$ لكل k، تتقارب إلى $\mathbf{x} \in \Re^n$ بالنسبة للمعيار $\|.\|$ إذا كان لأي $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي $N(\varepsilon)$ بحيث إن:

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| < \varepsilon \quad \text{لكل} \quad k \geq N(\varepsilon).$$

نظرية (٣,١١)

تتقارب متتالية المتجهات $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$، $\mathbf{x}^{(k)} \in \Re^n$، إلى $\mathbf{x} \in \Re^n$ بالنسبة للمعيار l_∞ إذا وفقط إذا كان $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$ لكل $1 \leq i \leq n$.

مثال (٣,٢٠)

اعتبر متتالية المتجهات $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ والمعرفة بالتالي:

$$\mathbf{x}^{(k)} = [x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, x_4^{(k)}]^T = [-1 + \frac{2}{k}, 5, \frac{1}{1+k^2}, 1 - e^{-k}]^T$$

بما أن $\lim_{k\to\infty} x_1^{(k)} = -1$، $\lim_{k\to\infty} x_2^{(k)} = 5$، $\lim_{k\to\infty} x_3^{(k)} = 0$ و $\lim_{k\to\infty} x_4^{(k)} = 1$ فإنه حسب النظرية (٣,١١) تتقارب متتالية المتجهات إلى المتجه $\mathbf{x} = [-1, 5, 0, 1]^T$ بالنسبة للمعيار المتجهي l_∞.

تعريف (٣,١٥)

المعيار المصفوفي على مجموعة المصفوفات ذات النوع $n \times n$ ($\Re^{n\times n}$) هو عبارة عن دالة حقيقية، يرمز لها بالرمز $\|.\|$، من $\Re^{n\times n}$ إلى $\Re$ وتحقق الخواص التالية:

١- $\|\mathbf{A}\| \geq 0$ لكل $\mathbf{A} \in \Re^{n\times n}$.

٢- $\|\mathbf{A}\| = 0$ إذا كان وكان فقط $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ (المصفوفة الصفرية)

٣- $\|\alpha\mathbf{A}\| = |\alpha| \|\mathbf{A}\|$ لكل $\alpha \in \Re$ و $\mathbf{A} \in \Re^{n\times n}$.

٤- $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$ لكل $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \Re^{n\times n}$.

٥- $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|$ لكل $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \Re^{n\times n}$.

مع ملاحظة أن الخاصية الخامسة تكون صحيحة طالما كانت عملية الضرب ممكنة، حتى إذا كان حاصل الضرب عبارة عن ضرب مصفوفة بمتجه.

نظرية (٣,١٢)

إذا كان $\|.\|$ أي معيار متجهي على $\Re^n$ ، فإن:

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{Ax}\|$$

عبارة عن معيار مصفوفي.

تعريف (٣,١٦)

لتكن $\mathbf{A} = (a_{ij})$ مصفوفة من النوع $n\times n$، فإن l_∞ للمصفوفة $\mathbf{A}$ معرّف بالتالي:

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{3.42}$$

مثال (٣,٢١)

لحساب $\|\mathbf{A}\|_\infty$ للمصفوفة:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 8 & -3 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن:

$$\sum_{j=1}^{3} |a_{1j}| = |2| + |3| + |-1| = 6$$
$$\sum_{j=1}^{3} |a_{2j}| = |4| + |8| + |-3| = 15$$
$$\sum_{j=1}^{3} |a_{3j}| = |-3| + |3| + |-1| = 7$$

وبناء عليه يكون لدينا $\| \mathbf{A} \|_\infty = \max\{6,15,7\} = 15$.

(٣,٦) تحليل الخطأ للحلول العددية
Error Analysis for the Numerical Solutions

بسبب أخطاء التدوير المرافقة للحسابات فإن أي حل عددي $\tilde{\mathbf{x}}$ للنظام الخطي (3.1) يعتبر حلاً تقريبياً له. في هذا البند سنناقش الصعوبة التي قد تنشأ في تقدير الخطأ المتعلق بالحل التقريبي $\tilde{\mathbf{x}}$ وذلك باعتبار أن الحل المضبوط غير معروف.

إذا كان $\tilde{\mathbf{x}}$ حلاً تقريبياً للنظام الخطي (3.1) فإننا سنعرّف الخطأ المتعلق بهذا التقريب بالشكل:

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} \tag{3.43}$$

عادة لا يكون الخطأ $\mathbf{e}$ معروفاً وذلك لعدم معرفة الحل المضبوط $\mathbf{x}$. من ناحية أخرى، يمكن دراسة الخطأ بحساب ما يسمى بمتجه الترسب (الباقي) والمعرّف في التعريف التالي:

تعريف (٣,١٧)

ليكن $\tilde{\mathbf{x}}$ حلاً تقريبياً للنظام الخطي (3.1)، يمكن كتابة متجه الترسب المتعلق بهذا التقريب كما يلي:

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \tag{3.44}$$

من التعريف (٣,١٧) يتضح أن المتجه $\mathbf{r}$ يحدد فيما إذا كان الحل التقريبي $\tilde{\mathbf{x}}$ قريب من الحل المضبوط $\mathbf{x}$. إذا كان $\mathbf{r}$ يساوي المتجه الصفري فإن هذا يعني أن $\tilde{\mathbf{x}}$ هو الحل المضبوط. وعليه فإن المتجه $\mathbf{e}$ يساوي المتجه الصفري أيضاً. بناء على ذلك فإنه من المتوقع أنه إذا كانت قيم عناصر المتجه $\mathbf{r}$ قريبة من الصفر فإن هذا يعني أن الحل التقريبي $\tilde{\mathbf{x}}$ يكون تقريب جيد للحل المضبوط. في الواقع، ليس بالضرورة أن يكون هذا صحيحاً كما يوضحه المثال التالي.

مثال (٣,٢٢)

المتجه $\mathbf{x}=[1,1]^T$ هو الحل الوحيد للنظام الخطي:

$$\begin{bmatrix} 2.5 & 3 \\ 2.5005 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5.5 \\ 5.5005 \end{bmatrix}$$

اعتبر الحل التقريبي $\tilde{\mathbf{x}}=[2.2,0]^T$. متجه الترسب $\mathbf{r}$ لهذا التقريب بالنسبة للنظام الخطي هو:

$$\mathbf{r}=\begin{bmatrix} 5.5 \\ 5.5005 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2.5 & 3 \\ 2.5005 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2.2 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -0.0006 \end{bmatrix}$$

وعليه فإن $\|\mathbf{r}\|_\infty=0.0006$ وهو صغير جداً مقارنة بالخطأ المضبوط $\|\mathbf{e}\|_\infty=1.2$. وهذا يدل على أن متجه الترسب $\mathbf{r}$ لم يعطينا معلومات صحيحة فيما يتعلق بالفرق بين الحلين التقريبي والمضبوط. وبالتالي لا يمكن اعتباره كمقياس لبعد أو قرب الحل التقريبي $\tilde{\mathbf{x}}$ من الحل المضبوط $\mathbf{x}$.

المناقشة السابقة تثير التساؤل التالي: كيف لنا أن نعرف فيما إذا كان المتجه $\mathbf{r}$ سوف يعطينا المعلومات الصحيحة عن الحل التقريبي؟. النظرية التالية تجيب على هذا التساؤل.

نظرية (٣,١٣)

ليكن لدينا النظام الخطي $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ حيث إن $\mathbf{A}$ مصفوفة غير شاذة من النوع $n\times n$. إذا كان $\tilde{\mathbf{x}}\in\Re^n$ حلاً تقريبياً لهذا النظام فإنه لأي معيار طبيعي تكون المتباينات التالية متحققة:

$$\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|\le\|\mathbf{r}\|\|\mathbf{A}^{-1}\| \tag{3.45}$$

$$\frac{\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|}\le\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|},\qquad \|\mathbf{b}\|\neq 0 \tag{3.46}$$

حيث إن $\mathbf{r}$ هو متجه الراسب المتعلق بالتقريب $\tilde{\mathbf{x}}$ بالنسبة لهذا النظام.

البرهان:

بداية نلاحظ أن:

$$\mathbf{r}=\mathbf{b}-\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{Ax}-\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}})$$

وبما أن $\mathbf{A}$ مصفوفة غير شاذة فإنه يكون لدينا:

$$\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}$$

ومنه نحصل على:

$$\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|=\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}\|\le\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{r}\|$$

وهي المتباينة (3.45).

الآن لإثبات المتباينة الأخرى نلاحظ أولاً أن $\mathbf{b}=\mathbf{Ax}$ يؤدي إلى أن $\|\mathbf{b}\|\le\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|$.

وبقسمة طرفي المتباينة (3.45) على $\|\mathbf{x}\|\ge\frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{A}\|}$ يكون لدينا:

$$\frac{\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|}\le\frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|/\|\mathbf{A}\|}\le\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

وهو المطلوب.

من النظرية (٣,١٣) يتضح أنه توجد علاقة بين القيم $\| \mathbf{A}^{-1} \|$ و $\| \mathbf{A} \| \| \mathbf{A}^{-1} \|$ ، متجه الترسب والحل التقريبي. في الواقع صيغة الخطأ النسبي (3.46) هي الأكثر استخداماً وهي محدودة بمقدار يحتوي على ما يسمى بعدد الشرط للمصفوفة $\mathbf{A}$ وهو:

$$\chi(\mathbf{A}) = \| \mathbf{A} \| \| \mathbf{A}^{-1} \| \tag{3.47}$$

باستخدام رمز عدد الشرط للمصفوفة يمكن كتابة المتباينتين (3.45) و(3.46) بالشكل:

$$\| \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} \| \le \chi(\mathbf{A}) \frac{\| \mathbf{r} \|}{\| \mathbf{A} \|} \tag{3.48}$$

$$\frac{\| \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} \|}{\| \mathbf{x} \|} \le \chi(\mathbf{A}) \frac{\| \mathbf{r} \|}{\| \mathbf{b} \|}, \qquad \| \mathbf{b} \| \neq 0 \tag{3.49}$$

على الترتيب. من الواضح أنه لحساب حداً أعلى للخطأ المطلق فإنه من الأفضل استخدام المتباينة (3.45) وذلك توفيراً للجهد الذي سيبذل لحساب معيار المصفوفة لأجل حساب قيمة عدد الشرط وتلافياً من حساب حاصل القسمة الموجود في المتباينة (3.48). أما إذا كان المطلوب هو حد أعلى للخطأ النسبي فإن الجهد الحسابي لاستخدام المتباينين (3.46) و(3.49) يكون متساوياً.

نظرية (٣,١٤)

لتكن $\mathbf{A}$ مصفوفة من النوع $n \times n$ وغير شاذة، فإنه لأي معيار $\|.\|$ فإن عدد الشرط لهذه المصفوفة يحقق $\chi(\mathbf{A}) \ge 1$.

البرهان:

باستخدام خواص المعيار المصفوفي يكون لدينا:

$$\chi(\mathbf{A}) = \| \mathbf{A} \| \| \mathbf{A}^{-1} \| \ge \| \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} \| = \| \mathbf{I} \| = 1$$

حيث إن $\mathbf{I}$ هي مصفوفة الوحدة من النوع $n \times n$.

نشير هنا إلى أنه إذا كانت قيمة عدد الشرط للمصفوفة **A** قريبة من الواحد فإنه يقال إن **A** مصفوفة حسنة التصرف. أما إذا كانت قيمة عدد الشرط بعيدة عن الواحد فإنها تسمى سيئة التصرف. المقصود بالتصرف هنا هو أنه كلما اقتربت قيمة الشرط من الواحد تكون المعلومات التي يوفرها لنا متجه الترسب صحيحة. بالمقابل إذا كانت قيمة عدد الشرط بعيدة عن الواحد تكون المعلومات غير صحيحة. نستعرض ذلك بدراسة المسألة الموجودة في المثال السابق فيما يلي:

مثال (٣,٢٣)

بداية نلاحظ أن مصفوفة المعاملات في المثال السابق هي $\begin{bmatrix} 2.5 & 3 \\ 2.5005 & 3 \end{bmatrix}$

وبالتالي فإن $\|\mathbf{A}\| = 5.5005$. كما أن معكوسها هو:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2000 & 2000 \\ 1667 & -1666.66667 \end{bmatrix}$$

ومنه يكون لدينا $\|\mathbf{A}^{-1}\| = 4000$. وبالتالي فإن عدد الشرط يكون:

$$\chi(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\| = (5.5005)(4000) = 22002 >> 1$$

وهو كبير جداً، وبناء عليه لا يمكن الاعتماد على المعلومات التي يوفرها لنا متجه الترسب لاختبار دقة الحل العددي. وهذا ما حصل بالفعل في المثال السابق حيث إن $\|\mathbf{r}\| = 6\times10^{-4}$ وهي قيمة قريبة من الصفر بينما الخطأ المضبوط $\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty = 1.2$ وهو كبير جداً (نسبياً، أي نسبة إلى حجم الحل المضبوط $\|\mathbf{x}\| = 1$). في الواقع يمكن حساب حداً أعلى للخطأ المطلق حيث نحصل على:

$$\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\| \le \|\mathbf{r}\|\|\mathbf{A}^{-1}\| = 6\times10^{-4}(4000) = 2.4$$

وهو أكبر من الخطأ المضبوط كما يجب أن يكون. وكذلك يمكن حساب الحد الأعلى للخطأ النسبي وهو:

$$\frac{\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \chi(\mathbf{A})\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|} = (22002)\frac{6\times10^{-4}}{5.5005} = 2.4$$

من هاتين النتيجتين نستنتج أن القيم $\|\mathbf{A}^{-1}\|$ و $\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|$ تلعب دوراً أساسياً في حساب الحد الأعلى للخطأ.

من الناحية النظرية نلاحظ أن عدد الشرط للمصفوفة يعتمد كلياً على معياري المصفوفة ومعكوسها. ولكن، تطبيقياً، يكون هناك أخطاء تدوير أثناء حساب المعكوس وبالتالي يعتمد حساب المعكوس على دقة العمليات الحسابية المستخدمة. إذا كانت العمليات الحسابية قد نُفذت باستخدام أعداد تحتوي على t رقم عشري معنوي فإن القيم التقريبية لعدد الشرط للمصفوفة $\mathbf{A}$ هو معيار المصفوفة مضروب في معيار معكوس المصفوفة التقريبي. في الواقع، عدد الشرط يعتمد أيضاً على الطريقة التي استُخدمت لحساب معكوس المصفوفة. (راجع المثال السابق، ماذا تلاحظ ؟).

لقد ذكرنا سابقاً أن أخطاء التدوير تؤثر على دقة النتائج العددية لحل النظام الخطي (3.1).

في الواقع هناك أسلوب معين يمكن استخدامه لتحسين دقة الحل العددي الذي يتم الحصول عليه باستخدام طريقة الحذف الجاوسي. يسمى هذا الأسلوب بطريقة التصفية التكرارية والتي يمكن عرضها كما يلي:

ليكن لدينا الحل التقريبي $\tilde{\mathbf{x}}$ للنظام الخطي $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ والذي تم الحصول عليه باستخدام طريقة الحذف الجاوسي والتعويض الخلفي استناداً على عمليات حسابية تعتمد على أعداد تحتوي على t رقم عشري معنوي. بوضع $\tilde{\mathbf{x}}^{(1)} = \tilde{x}$ لنعرّف

المتجه $\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}^{(1)}$ حيث إن $\mathbf{x}$ هو الحل المضبوط للنظام الخطي والذي ليس لدينا عنه أية معلومات. إذن متجه الراسب بالنسبة للحل التقريبي $\tilde{\mathbf{x}}^{(1)}$ يأخذ الشكل:

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}^{(1)}) = \mathbf{A}\mathbf{e}^{(1)} \qquad (3.50)$$

والذي يتم حسابه باستخدام أعداد تحتوي على $2t$ رقم عشري معنوي (أي ضعف سعة الأعداد المستخدمة لحساب $\tilde{\mathbf{x}}$).

الآن يمكن حل النظام الخطي $\mathbf{A}\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{r}^{(1)}$ باستخدام طريقة الحذف الجاوسي، لاحظ هنا أن مصفوفة المعاملات هي المصفوفة الأصلية للنظام الخطي وبالتالي يمكن الاستفادة من عمليات الحذف الجاوسي التي نفذت للحصول على الحل $\tilde{\mathbf{x}}$ وعدم إعادة تنفيذها. بعد الحصول على الحل التقريبي $\tilde{\mathbf{e}}^{(1)}$ للنظام الخطي (3.50)، نحسب الحل التقريبي:

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(2)} = \tilde{\mathbf{x}}^{(1)} + \tilde{\mathbf{e}}^{(1)}$$

باستخدام أعداد تحتوي على $2t$ رقم عشري معنوي. نشير هنا إلى أن التقريب $\tilde{\mathbf{x}}^{(2)}$ يكون أفضل من التقريب $\tilde{\mathbf{x}}^{(1)}$. نكرر نفس الخطوات بالنسبة للحل التقريبي $\tilde{\mathbf{x}}^{(2)}$ للحصول على $\tilde{\mathbf{e}}^{(2)}$ ومن ثم حساب $\tilde{\mathbf{x}}^{(3)} = \tilde{\mathbf{x}}^{(2)} + \tilde{\mathbf{e}}^{(2)}$ وهكذا يكون لدينا متتالية من الحلول التقريبية $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ والتي تتقارب إلى الحل المضبوط $\mathbf{x}$. عادة نستمر في حساب عناصر هذه المتتالية حتى نحصل على الدقة:

$$\frac{\| \tilde{\mathbf{e}}^{(k)} \|}{\| \tilde{\mathbf{x}}^{(k)} \|} \approx 10^{-t} \qquad (3.51)$$

حيث إن t هي عدد الأرقام العشرية المعنوية التي استخدمت في العمليات الحسابية. في الواقع عدد التكرارات يزداد بزيادة قيمة عدد الشرط $\chi(\mathbf{A})$. وعندما تكون قيمة $\chi(\mathbf{A})$ كبيرة جداً فإن القيم المطلقة لـ $\tilde{\mathbf{e}}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}, \ldots$ قد لا تتناقص.

إذا كان لدينا الحل التقريبي $\tilde{\mathbf{x}}^{(k)}$ فإنه يمكن تلخيص طريقة التصفية التكرارية في الخطوات التالية:

١- حساب $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}^{(k)}$ باستخدام أعداد تحتوي على $2t$ رقم عشري معنوي.

٢- حل النظام الخطي $\mathbf{A}\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)}$ باستخدام أعداد تحتوي على t رقم عشري معنوي.

٣- حساب $\tilde{\mathbf{x}}^{(k+1)} = \tilde{\mathbf{x}}^{(k)} + \tilde{\mathbf{e}}^{(k)}$ باستخدام أعداد تحتوي على $2t$ رقم عشري معنوي.

وذلك من أجل $k = 1,2,3,\ldots$.

مثال (٣,٢٤)

هنا سوف نستخدم طريقة التصفية التكرارية لحل النظام الخطي:

$$\begin{bmatrix} 3.3330 & 15920 & -10.333 \\ 2.2220 & 16.710 & 9.6120 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15913 \\ 28.544 \\ 8.4254 \end{bmatrix}$$

وذلك باستخدام حسابات ترتكز على أعداد ذات خمسة أرقام عشرية معنوية.

بداية وباستخدام طريقة الحذف الجاوسي نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 3.3330 & 15920 & -10.333 & : & 15913 \\ 0.0000 & -10596 & 16.501 & : & 10580 \\ 0.0000 & -7451.4 & 6.5250 & : & -7444.9 \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{bmatrix} 3.3330 & 15920 & -10.333 & : & 15913 \\ 0.0000 & -10596 & 16.501 & : & 10580 \\ 0.0000 & 0.0000 & -5.0790 & : & -4.7000 \end{bmatrix}$$

وبالتعويض الخلفي حصلنا على الحل العددي $\tilde{\mathbf{x}}^{(1)}=[1.2001,0.99991,0.92538]^T$. إذن متجه الترسب الذي يوافق هذا الحل هو:

$$\mathbf{r}^{(1)}=\mathbf{b}-\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}^{(1)}=\begin{bmatrix}-0.00518\\0.27413\\-0.18616\end{bmatrix}$$

وبحل النظام الخطي $\mathbf{Ae}^{(1)}=\mathbf{r}^{(1)}$ باستخدام الحذف الجاوسي وحسابات ترتكز على أعداد ذات عشرة أرقام عشرية معنوية نحصل على:

$$\tilde{\mathbf{e}}^{(1)}=[-0.20008,0.00009,0.07461]^T$$

وبالتالي فإنه يكون لدينا الحل التقريبي:

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(2)}=\tilde{\mathbf{x}}^{(1)}+\tilde{\mathbf{e}}^{(1)}=[1.0000,1.0000,0.99999]^T$$

في الواقع الحل الوحيد للنظام الخطي الأصلي هو $\mathbf{x}=[1,1,1]^T$ وبالتالي فإن الحل التقريبي $\tilde{\mathbf{x}}^{(2)}$ أفضل بكثير من الحل التقريبي $\tilde{\mathbf{x}}^{(1)}$. وبحساب $\mathbf{r}^{(2)}=\mathbf{b}-\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}^{(2)}$ وحل النظام الخطي $\mathbf{Ae}^{(2)}=\mathbf{r}^{(2)}$ نحصل على:

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(3)}=\tilde{\mathbf{x}}^{(2)}+\tilde{\mathbf{e}}^{(2)}=[1.0000,1.0000,1.0000]^T$$

يجدر الإشارة هنا إلى أنه عادة تستخدم طريقة التصفية التكرارية إذا كانت المصفوفة $\mathbf{A}$ سيئة التصرف. كما نشير إلى أنه يمكن حساب قيمة تقريبية لعدد الشرط لأي مصفوفة غير شاذة وذلك بالتالي:

$$\chi(\mathbf{A})\approx\frac{\|\tilde{\mathbf{e}}\|}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|}10^t \tag{3.52}$$

حيث إن $\tilde{\mathbf{x}}$ حل تقريبي للنظام الخطي تم إيجاده بعمليات حسابية ترتكز على أعداد تحتوي على t رقم عشري معنوي. المتجه $\tilde{\mathbf{e}}$ هو الحل التقريبي للنظام الخطي $\mathbf{Ae}=\mathbf{r}$

والذي تم حسابه بنفس الأسلوب والدقة التي حُسب بها الحل $\tilde{\mathbf{x}}$. كما سبق، المتجه $\mathbf{r}$ هو متجه الراسب بالنسبة للحل التقريبي $\tilde{\mathbf{x}}$.

مثال (٣,٢٥)

لإيجاد قيمة تقريبية لعدد الشرط لمصفوفة المعاملات للنظام الخطي الموجود في المثال (٣,٢٤)، نعلم أن:

$$\tilde{\mathbf{x}} = [1.2001, 0.99991, 0.92538]^T \text{ و } \tilde{\mathbf{e}} = [-0.20008, 0.00009, 0.07461]^T$$

وأن العمليات الحسابية قد نُفذت باستخدام أعداد تحتوي على خمسة أرقام عشرية معنوية ($t = 5$). إذن يكون لدينا:

$$\chi(\mathbf{A}) \approx \frac{\|\tilde{\mathbf{e}}\|}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|}10^t = \frac{0.20008}{1.2001}10^5 = 16671.944 \approx 16672$$

في الواقع القيمة المضبوطة لعدد الشرط لهذه المصفوفة هي $\chi(\mathbf{A}) = 15999$.

الخوارزمية (٣,٥) تساعد على كتابة برنامج للحاسوب يستخدم طريقة التصفية التكرارية لحل النظام الخطي $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. نشير هنا إلى أنه لحل النظام الخطي $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ يمكن استخدام خوارزمية الحذف الجاوسي (٣,١) ومن ثم تخزين العمليات التي تُنفذ، أي $(E_j - m_{ji}E_i) \to E_j$ من أجل $i+1 \le j \le n$ و$1 \le i \le n-1$ وأي تغيير للصفوف، في برنامج فرعي يتم مناداته عند التكرار k لحل النظام الخطي $\mathbf{Ae} = \mathbf{r}$.

خوارزمية (٣,٥): طريقة التصفية التكرارية

إذا أعطينا عدد المجاهيل n، عناصر المصفوفة $\mathbf{A}$، المتجه $\mathbf{b}$ التفاوت المسموح به Tol ، والعدد الأقصى للتكرارات m فإن الخوارزمية توجد حل تقريبي ، $\mathbf{y}$، النظام الخطي $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

الخطوة ١: حل النظام الخطي $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ باستخدام الخوارزمية (٣,١).

الخطوة ٢: ضع $k = 1$

الخطوة ٣: بينما $k \le m$ أعمل الخطوات ٤-٩

الخطوة ٤: من أجل $i = 1,2,\ldots,n$

احسب $r_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ (لحساب عناصر المتجه $\mathbf{r}$)

الخطوة ٥: حل النظام الخطي $\mathbf{Ae} = \mathbf{r}$ (باستخدام الحذف الجاوسي)

الخطوة ٦: $i = 1,2,\ldots,n$

احسب $y_i = x_i + e_i$ (لحساب عناصر المتجه $\widetilde{\mathbf{x}}^{(k)}$)

الخطوة ٧: إذا كان $\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| \le Tol$ فأكتب الحل التقريبي المطلوب هو: "$\mathbf{y}$"، قف.

الخطوة ٨: ضع $k = k + 1$

الخطوة ٩: من أجل $i = 1,2,\ldots,n$ ضع $x_i = y_i$

الخطوة ١٠: اكتب "لم نحصل على الحل التقريبي المطلوب بعد m تكرار"، قف.

(٣,٧) الطرائق التكرارية لحل أنظمة المعادلات الخطية

Iterative Methods for Solving Linear Systems

الأنظمة الخطية التي تنشأ في الكثير من التطبيقات الهندسية والعلمية تكون مصفوفة معاملاتها عبارة عن مصفوفة هشة، أي المصفوفة التي تكون معظم عناصرها

أصفاراً وذات سعة كبيرة. وإذا تم استخدام الطرائق المباشرة لحل مثل هذه الأنظمة فسوف يتطلب ذلك جهد حسابي كبير (وناتج معظمه أصفاراً)، وتحتاج إلى سعة كبيرة (غير ضرورية) في ذاكرة الحاسوب والتي قد لا يمكن توفرها. لهذا السبب فإن الكثير من الباحثين الذين تواجههم مثل هذه المسائل يلجئون إلى استخدام ما يسمى "الطرائق التكرارية" لحل هذه الأنظمة. تعد الطرائق التكرارية طرائق تقريبية أي أنها لا تحسب الحل مباشرة وإنما تبدأ من حل تقريبي، وليكن $\mathbf{x}^{(0)}$، وتحسب متتالية من المتجهات $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ والتي يُتأمل أن تتقارب إلى الحل المضبوط $\mathbf{x}$. ويمكن توضيح ذلك بالشكل التالي:

$$\mathbf{x}^{(0)} \to \mathbf{x}^{(1)} \to \mathbf{x}^{(2)} \to \cdots \mathbf{x}^{(k)} \to \cdots \to \mathbf{x}$$

الفكرة الرئيسة لهذه الطرائق هي كتابة النظام الخطي $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$، حيث إن $\mathbf{A}$ مصفوفة مربعة من النوع $n\times n$، بالشكل المساوي:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Tx} + \mathbf{c} \tag{3.53}$$

حيث إن $\mathbf{T}$ مصفوفة مربعة من النوع $n\times n$ و $\mathbf{c}$ متجه عمود ذو البعد n. بعد اختيار التقريب الابتدائي $\mathbf{x}^{(0)}$، نحسب متتالية المتجهات $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ باستخدام الصيغة التكرارية:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{Tx}^{(k-1)} + \mathbf{c} \tag{3.54}$$

من أجل $k \geq 1$. تعتمد المصفوفة $\mathbf{T}$ في تكوينها على المصفوفة $\mathbf{A}$ أما المتجه فإن عناصره تستنتج من المصفوفة $\mathbf{A}$ والمتجه $\mathbf{b}$. هناك عدة أساليب لكتابة المصفوفة $\mathbf{T}$ والمتجه $\mathbf{c}$ سوف ندرس هنا ثلاثة أساليب (طرائق) وهي: جاكوبي، جاوس- سيدال والاسترخاء.

(٣,٧,١) طريقة جاكوبي التكرارية

بداية نكتب النظام الخطي $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ بالشكل (3.1) أي أننا نكتبه بالشكل التالي:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2\\
&\vdots\\
&\vdots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n.
\end{aligned}$$

لكتابة هذا النظام بالشكل المساوي (3.53)، فإننا نحل المعادلة i بالنسبة للمجهول x_i لكل $i = 1,2,\ldots,n$ لنحصل على:

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{1}{a_{11}}[a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - b_1]\\
x_2 &= -\frac{1}{a_{22}}[a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n - b_2]\\
&\vdots\\
&\vdots\\
x_n &= -\frac{1}{a_{nn}}[a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1} - b_n]
\end{aligned} \tag{3.55}$$

حيث يكون لدينا:

$$\mathbf{T}_J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots\ldots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}} \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \ldots\ldots & -\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix} \tag{3.56}$$

الآن باستخدام العلاقة (3.55) يمكن كتابة الصيغة التكرارية لطريقة جاكوبي بالشكل التالي:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}] \tag{3.57}$$

من أجل $i = 1,2,\ldots,n$ و $k \geq 1$. وكذلك يمكن كتابتها بالشكل المصفوفي كالتالي:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{T}_J\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c} \tag{3.58}$$

حيث إن $k \geq 1$ والمصفوفة $\mathbf{T}_J$ والمتجه $\mathbf{c}$ كما هي معرفة في (3.56).

إذا تم اختيار المتجه الابتدائي $\mathbf{x}^{(0)}$، فإنه يمكن استخدام الصيغة التكرارية لطريقة جاكوبي لتكوين متتالية من المتجهات التي قد تتقارب إلى الحل المضبوط للنظام الخطي (3.1).

نشير هنا إلى أنه يمكن استنتاج الشكل المصفوفي لطريقة جاكوبي التكرارية (3.58) كما يلي:

أولاً نوزع المصفوفة $\mathbf{A}$ إلى حاصل جمع المصفوفات:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11} & 0\cdots\cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots\cdots 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots 0 & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0\cdots\cdots & 0 \\ -a_{21} & 0\cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \ddots \quad \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots \quad \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & a_{n2}\cdots -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}\cdots\cdots & -a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots\cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\mathbf{D}-\mathbf{L}-\mathbf{U} \qquad (3.59)$$

وبذلك يمكن تحويل النظام الخطي $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ إلى الشكل المساوي:

$$(\mathbf{D}-\mathbf{L}-\mathbf{U})\mathbf{x}=\mathbf{b} \qquad (3.60)$$

والذي منه نحصل على:

$$\mathbf{Dx}-(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x}=\mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{Dx}=(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x}+\mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{x}=\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x}+\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

وبالتالي يكون لدينا الصيغة التكرارية لطريقة جاكوبي (3.58) حيث إن:

$\mathbf{T}_J=\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})$ و $\mathbf{c}=\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$.

تتضمن الخوارزمية (٣,٦) كيفية استخدام طريقة جاكوبي التكرارية. نشير هنا إلى أن البرنامج الذي ينتج من استخدام هذه الخوارزمية لا يُخزن جميع متجهات المتتالية وإنما يُخزن متجهين متتاليين فقط، وبالتالي يستطيع طباعة نتيجة تكرارين متتاليين فقط وهما، حسب رموز الخوارزمية، y_i و x_i من أجل $i=1,2,\ldots,n$.

خوارزمية (٣,٦): طريقة جاكوبي التكرارية

إذا أعطينا عدد المجاهيل n، عناصر المصفوفة $\mathbf{A}$، المتجه $\mathbf{b}$، المتجه الابتدائي $\mathbf{y} = \mathbf{x}^{(0)}$، التفاوت المسموح به Tol والعدد الأقصى للتكرارات M فإن الخوارزمية توجد حل تقريبي $\mathbf{y}$ للنظام الخطي $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

الخطوة ١: ضع $k = 1$

الخطوة ٢: بينما $k \le M$ اعمل الخطوات ٣-٦

الخطوة ٣: من أجل $i = 1,2,\dots,n$ احسب $x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} y_j]$

الخطوة ٤: إذا كان $\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| \le Tol$ فاكتب الحل التقريبي المطلوب هو:" x_i، $i = 1,2,\dots,n$ "، قف.

الخطوة ٥: ضع $k = k + 1$

الخطوة ٦: من أجل $i = 1,2,\dots,n$ ضع $y_i = x_i$

الخطوة ٧: اكتب " لم نحصل على الحل التقريبي المطلوب بعد M تكرار "، قف.

ملاحظات

١- يتضح من الخطوة ٣ في خوارزمية جاكوبي التكرارية أنه يجب أن يكون $a_{ii} \neq 0$ من أجل $i = 1,2,\dots,n$، لذلك إذا كانت المصفوفة $\mathbf{A}$ غير شاذة وأحد عناصر قطرها يكون مساوياً للصفر فإنه يجب إعادة ترتيب المعادلات بحيث يكون كل عناصر القطر لا تساوي الصفر.

٢- الخطوة الرابعة هي خطوة الوقوف وتتضمن شرط الوقوف:

$$\| \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)} \| \le \epsilon \tag{3.61}$$

من أجل $k \geq 1$، حيث إن $\mathbf{x}^{(k)}$ و $\mathbf{x}^{(k-1)}$ الحلين التقريبين عند التكرارين $k-1$ و k على الترتيب. هنا $\epsilon = 5\times10^{-t}$، $t \geq 1$ عدد صحيح هو الدقة المطلوبة للحل التقريبي أو ما يسمى بالتفاوت المسموح به حول الحل. في الواقع يوجد شروط أخرى لإيقاف الحسابات نذكر منها الشرط:

$$\frac{\| \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)} \|}{\| \mathbf{x}^{(k)} \|} \leq \epsilon \tag{3.62}$$

حيث إن $k \geq 1$. كما سبق أن ذكرنا فإن معيار القيمة العظمى، l_∞، هو المستخدم عادة في مثل هذه الحالات.

مثال (٣,٢٦)

هنا نستخدم طريقة جاكوبي التكرارية لإيجاد حلاً تقريبياً للنظام الخطي:

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 2 \end{aligned}$$

بدقة $\epsilon = 5\times10^{-4}$ وذلك ابتداء من المتجه الابتدائي $\mathbf{x}^{(0)} = [1,0,0]^T$.

بداية لنكتب صيغة جاكوبي التكرارية (3.57) لهذا النظام والتي يمكن كتابتها بالشكل:

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= \frac{1}{4}x_2^{(k-1)} - \frac{1}{4}x_3^{(k-1)} + \frac{1}{4} \\ x_2^{(k)} &= -\frac{1}{3}x_1^{(k-1)} - \frac{1}{3}x_3^{(k-1)} + \frac{4}{3} \\ x_3^{(k)} &= -\frac{1}{5}x_1^{(k-1)} - \frac{2}{5}x_2^{(k-1)} + \frac{2}{5} \end{aligned}$$

من أجل $k \geq 1$.

وبوضع $k = 1$ تأخذ هذه الصيغة الشكل:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}x_2^{(0)} - \frac{1}{4}x_3^{(0)} + \frac{1}{4}$$
$$x_2^{(1)} = -\frac{1}{3}x_1^{(0)} - \frac{1}{3}x_3^{(0)} + \frac{4}{3}$$
$$x_3^{(1)} = -\frac{1}{5}x_1^{(0)} - \frac{2}{5}x_2^{(0)} + \frac{2}{5}$$

وبالتعويض عن $x_1^{(0)} = 1$ ، $x_2^{(0)} = 0$ و $x_3^{(0)} = 0$ نحصل على:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(0) - \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$
$$x_2^{(1)} = -\frac{1}{3}(1) - \frac{1}{3}(0) + \frac{4}{3} = 1$$
$$x_3^{(1)} = -\frac{1}{5}(1) - \frac{2}{5}(0) + \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

إذن التكرار (التقريب) الأول هو $\mathbf{x}^{(1)} = [\frac{1}{4}, 1, \frac{1}{5}]^T$. بعد ذلك نضع $k = 2$ ونعوض عن قيم عناصر المتجه $\mathbf{x}^{(1)}$ لنحصل على:

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{4}x_2^{(1)} - \frac{1}{4}x_3^{(1)} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(1) - \frac{1}{4}(\frac{1}{5}) + \frac{1}{4} = 0.45$$
$$x_2^{(2)} = -\frac{1}{3}x_1^{(1)} - \frac{1}{3}x_3^{(1)} + \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}(\frac{1}{4}) - \frac{1}{3}(\frac{1}{5}) + \frac{4}{3} = 1.18333$$
$$x_3^{(2)} = -\frac{1}{5}x_1^{(1)} - \frac{2}{5}x_2^{(1)} + \frac{2}{5} = -\frac{1}{5}(\frac{1}{4}) - \frac{2}{5}(1) + \frac{2}{5} = -0.05$$

وبالتالي فإن التكرار الثاني هو $\mathbf{x}^{(2)} = [0.45, 1.18333, -0.05]^T$. وهكذا نستمر حتى نحصل على الحل التقريبي المطلوب. النتائج العددية لحل هذه المسألة موجودة في الجدول رقم (٣,١) حيث يتضح أن $\mathbf{x}^{(7)}$ هو الحل التقريبي المطلوب. نشير هنا إلى أننا أوقفنا العمليات الحسابية عندما حصلنا على الحل التقريبي الذي يحقق الشرط (3.61) حيث حصلنا على:

$$\mathbf{x}^{(7)} - \mathbf{x}^{(6)} = [0.00021, -0.00017, 0.00024]^T$$

وبالتالي يكون لدينا $\|\mathbf{x}^{(7)} - \mathbf{x}^{(6)}\| = 2.4\times10^{-4} < 5\times10^{-4}$ وهذا يحقق الدقة المطلوبة.

الجدول رقم (٣,١). النتائج العددية للمثال (٣,٢٦).

k	1	2	3	4	5	6
$x_1^{(k)}$	0.25000	0.45000	0.55833	0.59083	0.59833	0.59978
$x_2^{(k)}$	1.00000	1.18333	1.20000	1.20167	1.20028	1.20017
$x_3^{(k)}$	0.20000	-0.05000	-0.16333	-0.19167	-0.19883	-0.19978

(٣,٧,٢) طريقة جاوس- سيدال التكرارية

كما هو واضح من الصيغة التكرارية لطريقة جاكوبي (3.37) فإننا نحسب العنصر $x_i^{(k)}$، $i = 1,2,\dots,n$، باستخدام العناصر $x_j^{(k-1)}$ من أجل $1 \le j \le n$ حيث إن $j \ne i$. ولكن لو استخدمنا العناصر $x_j^{(k)}$ من أجل $1 \le j \le i-1$ والعناصر $x_j^{(k-1)}$ من أجل $i+1 \le j \le n$ لحصلنا على تقريب أفضل وذلك لأن العناصر $x_j^{(k)}$، $1 \le j \le i-1$ هي تقريب أفضل للعناصر التي توافقها في الحل المضبوط من العناصر $x_j^{(k-1)}$، $1 \le j \le i-1$. هذا هو مبدأ طريقة جاوس- سيدال التكرارية والتي يمكن كتابة صيغتها التكرارية بالشكل:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}] \tag{3.63}$$

من أجل $i=1,2,\ldots,n$ و $k\geq 1$. لكتابة خوارزمية جاوس- سيدال التكرارية نتبع نفس الخطوات الموجودة في الخوارزمية (٣,٦) مع استبدال المعادلة التي في الخطوة ٣ بالمعادلة التي تمثل الصيغة التكرارية لطريقة جاوس- سيدال (3.63) أي نستبدلها بما يلي:

$$x_i=\frac{1}{a_{ii}}[b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}y_j]$$

الآن لكتابة الصيغة التكرارية لهذه الطريقة بالشكل المصفوفي، فإنه من العلاقة (3.60) يكون لدينا

$$(\mathbf{D}-\mathbf{L})\mathbf{x}-\mathbf{U}\mathbf{x}=\mathbf{b}\ \Rightarrow\ (\mathbf{D}-\mathbf{L})\mathbf{x}=\mathbf{U}\mathbf{x}+\mathbf{b}\ \Rightarrow\ \mathbf{x}=(\mathbf{D}-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}\mathbf{x}+(\mathbf{D}-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}$$

ومنه يكون لدينا الصيغة التكرارية لطريقة جاوس- سيدال

$$\mathbf{x}^{(k)}=\mathbf{T}_{GS}\mathbf{x}^{(k-1)}+\mathbf{c} \tag{3.64}$$

من أجل $k\geq 1$، حيث إن $\mathbf{T}_{GS}=(\mathbf{D}-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}$ و $\mathbf{c}=(\mathbf{D}-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}$. نشير هنا إلى أنه يمكن استخدام المعادلات الممثلة بالعلاقة (3.63) لاستنتاج الصيغة التكرارية بالشكل المصفوفي (3.64) ولكننا نترك ذلك للمناقشة في التمارين.

مثال (٣,٢٧)

استخدم طريقة جاوس- سيدال التكرارية لحساب حلاً تقريبياً بدقة $\epsilon=5\times10^{-4}$ للنظام الخطي الموجود في المثال (٣,٢٦) وذلك بوضع $\mathbf{x}^{(0)}=[1,0,0]^T$. صيغة جاوس- سيدال التكرارية (3.63) لهذا النظام تكتب بالشكل:

$$\begin{aligned}
x_1^{(k)}&=\frac{1}{4}x_2^{(k-1)}-\frac{1}{4}x_3^{(k-1)}+\frac{1}{4}\\
x_2^{(k)}&=-\frac{1}{3}x_1^{(k)}-\frac{1}{3}x_3^{(k-1)}+\frac{4}{3}\\
x_3^{(k)}&=-\frac{1}{5}x_1^{(k)}-\frac{2}{5}x_2^{(k)}+\frac{2}{5}
\end{aligned}$$

من أجل $k \geq 1$.

وبوضع $k = 1$ تأخذ هذه الصيغة الشكل:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4} x_2^{(0)} - \frac{1}{4} x_3^{(0)} + \frac{1}{4}$$
$$x_2^{(1)} = -\frac{1}{3} x_1^{(1)} - \frac{1}{3} x_3^{(0)} + \frac{4}{3}$$
$$x_3^{(1)} = -\frac{1}{5} x_1^{(1)} - \frac{2}{5} x_2^{(1)} + \frac{2}{5}$$

وبالتعويض عن $x_2^{(0)} = 0$ و $x_3^{(0)} = 0$ في المعادلة الأولى من هذه الصيغة نحصل على:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(0) - \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

وبالتعويض عن $x_1^{(1)} = \frac{1}{4}$ و $x_3^{(0)} = 0$ في المعادلة الثانية يكون لدينا:

$$x_2^{(1)} = -\frac{1}{3}(\frac{1}{4}) - \frac{1}{3}(0) + \frac{4}{3} = 1.25$$

وبالتعويض عن $x_1^{(1)} = 0.25$ و $x_1^{(2)} = 1.25$ في المعادلة الثالثة نجد أن:

$$x_3^{(1)} = -\frac{1}{5}(0.25) - \frac{2}{5}(1.25) + \frac{4}{3} = -0.15$$

إذن التكرار (التقريب) الأول هو $\mathbf{x}^{(1)} = [0.25, 1.25, -0.15]^T$. وهكذا نستمر حتى نحصل على الحل التقريبي المطلوب. النتائج العددية لحل هذه المسألة موجودة في الجدول رقم (٣,٢) حيث يتضح أن $\mathbf{x}^{(5)}$ هو الحل التقريبي المطلوب. نشير هنا إلى أننا أوقفنا العمليات الحسابية عندما حصلنا على الحل التقريبي الذي يحقق الشرط (3.61) حيث حصلنا على:

$$\mathbf{x}^{(5)} - \mathbf{x}^{(4)} = [0.00027, 0.00002, 0.00017]^T$$

وبالتالي يكون لدينا $\| \mathbf{x}^{(5)} - \mathbf{x}^{(4)} \| = 2.7\times10^{-4} < 5\times10^{-4}$ وهذا يحقق الدقة المطلوبة.

الجدول رقم (٣,٢). النتائج العددية للمثال (٣,٢٧).

k	1	2	3	4	5
$x_1^{(k)}$	0.25000	0.60000	0.59417	0.59961	0.59988
$x_2^{(k)}$	1.25000	1.18333	1.19972	1.19970	1.19998
$x_3^{(k)}$	−0.15000	−0.19333	−0.19872	−0.19980	−0.19997

بمقارنة النتائج العددية الموجودة في الجدولين رقمي (٣,١) و(٣,٢) نلاحظ أننا حصلنا على الحل التقريبي المطلوب عند التكرار السابع عندما استخدمنا طريقة جاكوبي بينما حصلنا عليه عند التكرار الخامس باستخدام طريقة جاوس- سيدال، مما يدل على أن معدل تقارب طريقة جاوس- سيدال أسرع من ذلك لطريقة جاكوبي. سوف نثبت في مثال لاحق أنه بالنسبة للنظام الخطي الذي تم حله في المثالين السابقين أن معدل تقارب طريقة جاوس- سيدال أسرع من طريقة جاكوبي. في الواقع، يمكن أثبات أنه لأي نظام خطي تكون مصفوفة معاملاته غير شاذة يكون معدل تقارب طريقة جاوس- سيدال أسرع أو يساوي طريقة جاكوبي.

(٣,٧,٣) طريقة الاسترخاء

يمكن استنتاج الصيغة التكرارية لطريقة الاسترخاء كما يلي: بداية يمكن كتابة الصيغة التكرارية لطريقة جاوس- سيدال بالشكل التالي:

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \frac{1}{a_{ii}}[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}]$$

من أجل $i=1,2,\ldots,n$ و $k\geq 1$. بإدخال العدد الحقيقي ω في الحد الثاني من الطرف الأيمن من هذه المعادلة نحصل على الصيغة التكرارية:

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_{ii}}[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}] \tag{3.65}$$

من أجل $i=1,2,\ldots,n$ و $k\geq 1$، وهي الصيغة التكرارية لطريقة الاسترخاء.

يسمى العدد ω بالعامل الاسترخائي ونلاحظ أنه عندما $\omega=1$ نحصل على الصيغة التكرارية لطريقة جاوس- سيدال، وإذا كان $\omega>1$ فإن (3.65) تسمى الصيغة التكرارية لطريقة الاسترخاء الزائدي المتتالي. أما إذا كان $\omega<1$ فإنها تسمى طريقة الاسترخاء التناقصي المتتالي. في الواقع يمكن اختيار العامل الاسترخائي ω بحيث تكون سرعة التقارب أسرع ما يمكن.

كما هو الحال بالنسبة للصيغتين السابقتين يمكن استنتاج الشكل المصفوفي للصيغة التكرارية لطريقة الاسترخاء. بداية نضرب طرفي المعادلة (3.60) بـ ω لنحصل على:

$$\omega(\mathbf{D}-\mathbf{L}-\mathbf{U})\mathbf{x} = \omega\mathbf{b}$$

وبإضافة وطرح $\mathbf{Dx}$ في الطرف الأيسر يكون لدينا:

$$\mathbf{Dx}-\mathbf{Dx}+\omega\mathbf{Dx}-\omega\mathbf{Lx}-\omega\mathbf{Ux} = \omega\mathbf{b}$$

ومنه نحصل على:

$$(\mathbf{D}-\omega\mathbf{L})\mathbf{x}-(1-\omega)\mathbf{Dx}-\omega\mathbf{Ux} = \omega\mathbf{b} \quad\Rightarrow\quad (\mathbf{D}-\omega\mathbf{L})\mathbf{x} = [(1-\omega)\mathbf{D}+\omega\mathbf{U}]\mathbf{x}+\omega\mathbf{b}$$
$$\Rightarrow\quad \mathbf{x} = (\mathbf{D}-\omega\mathbf{L})^{-1}[(1-\omega)\mathbf{D}+\omega\mathbf{U}]\mathbf{x}+\omega(\mathbf{D}-\omega\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}$$

وبالتالي فإن الصيغة التكرارية لطريقة الاسترخاء بالشكل المصفوفي هي:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{T}_{\mathrm{SOR}}\mathbf{x}^{(k-1)}+\mathbf{c} \tag{3.66}$$

$i=1,2,\dots,n$ و $k\geq 1$، حيث إن $\mathbf{T}_{\text{SOR}}=(\mathbf{D}-\omega\mathbf{L})^{-1}[(1-\omega)\mathbf{D}+\omega\mathbf{U}]$
و $\mathbf{c}=\omega(\mathbf{D}-\omega\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}$.

تستعرض الخوارزمية (٣,٧) كيفية استخدام طريقة الاسترخاء التكرارية لحل النظام الخطي $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$.

خوارزمية (٣,٧): طريقة الاسترخاء التكرارية

إذا أعطينا عدد المجاهيل n، عناصر المصفوفة $\mathbf{A}$، المتجه $\mathbf{b}$، المتجه الابتدائي $\mathbf{y}=\mathbf{x}^{(0)}$، التفاوت المسموح به Tol، العدد الحقيقي ω والعدد الأقصى للتكرارات M فإن الخوارزمية تُوجد حل تقريبي $\mathbf{y}$ النظام الخطي $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$.

الخطوة ١: ضع $k=1$.

الخطوة ٢: بينما $k\leq M$ اعمل الخطوات ٣-٦.

الخطوة ٣: من أجل $i=1,2,\dots,n$.

احسب $x_i=y_i+\dfrac{\omega}{a_{ii}}[b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j-\sum_{j=i}^{n}a_{ij}y_j]$.

الخطوة ٤: إذا كان $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\leq Tol$ فاكتب الحل التقريبي المطلوب هو:" x_i، $i=1,2,\dots,n$"، قف.

الخطوة ٥: ضع $k=k+1$

الخطوة ٦: من أجل $i=1,2,\dots,n$ ضع $y_i=x_i$

الخطوة ٧: اكتب " لم نحصل على الحل التقريبي المطلوب بعد M تكرار "، قف.

مثال (٣,٢٨)

هنا نستخدم طريقة الاسترخاء التكرارية لحل النظام الخطي:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \quad\quad &= 1 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 \quad\quad + 6x_3 &= 3 \end{aligned}$$

وذلك بوضع $\mathbf{x}^{(0)} = [0,0,0]^T$. الجدولان رقما (٣,٣) و(٣,٤) يعطيان النتائج العددية لهذه المسألة عندما $\omega = 1.2$ و$\omega = 1$ على الترتيب. نشير هنا إلى أن الحل الوحيد لهذا النظام هو $\mathbf{x} = [0.75, 0.5, 0]^T$، وبالتالي فإن $\| \mathbf{x}^{(6)} - \mathbf{x} \| = 0.0026$ عندما $\omega = 1.2$ و $\| \mathbf{x}^{(8)} - \mathbf{x} \| = 0.0026$ عندما $\omega = 1$. مع الإشارة إلى أنه عندما $\omega = 1$ يكون لدينا طريقة جاوس- سيدال. إذن، نستنتج من هذا المثال أنه تم تسريع التقارب بزيادة قيمة ω.

الجدول رقم (٣,٣). النتائج العددية للمثال (٣,٢٨) عندما $\omega = 1.2$.

k	1	2	3		5	6
$x_1^{(k)}$	0.60000	0.76800	0.72860	.....	0.74550	0.75190
$x_2^{(k)}$	0.48000	0.47040	0.50420	.....	0.50160	0.49890
$x_3^{(k)}$	0.12000	-0.03840	-0.02480	......	-0.00570	-0.00260

الجدول رقم (٣,٤). النتائج العددية للمثال (٣,٢٨) عندما $\omega = 1$.

k	1	2	3		7	8
$x_1^{(k)}$	0.50000	0.66667	0.69444	.....	0.74550	0.74760
$x_2^{(k)}$	0.33333	0.33390	0.44444	.....	0.49520	0.49740
$x_3^{(k)}$	0.16667	0.05560	0.03700	......	0.00300	0.00160

تتضمن النظرية التالية الشرط الكافي لضمان تقارب الصيغة التكرارية (3.54) لأي اختيار عشوائي $\mathbf{x}^{(0)}$.

نظرية (٣,١٥)

إذا كـــان $\|\mathbf{T}\|<1$ فـــإن متتاليـــة المتجهـــات $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ المعرفـــة بـــ $\mathbf{x}^{(k)}=\mathbf{T}\mathbf{x}^{(k-1)}+\mathbf{c}$، $k\geq 1$ و $\mathbf{c}\neq\mathbf{0}$، تتقـارب إلى الحـل الوحيـد $\mathbf{x}\in\Re^{n}$ للنظـام الخطي $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ لأي اختيار ابتدائي $\mathbf{x}^{(0)}\in\Re^{n}$.

البرهان:

لنكتب النظام الخطي $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ بالشكل المساوي $\mathbf{x}=\mathbf{Tx}+\mathbf{c}$، وبطرح هذا الأخير من $\mathbf{x}^{(k)}=\mathbf{T}\mathbf{x}^{(k-1)}+\mathbf{c}$ نحصل على:

$$\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}=\mathbf{T}\mathbf{x}^{(k-1)}-\mathbf{Tx}=\mathbf{T}(\mathbf{x}^{(k-1)}-\mathbf{x})$$

وبأخذ معيار الطرفين يكون لدينا

$$\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}\|=\|\mathbf{T}(\mathbf{x}^{(k-1)}-\mathbf{x})\|\leq\|\mathbf{T}\|\|\mathbf{x}^{(k-1)}-\mathbf{x}\| \tag{3.67}$$

وبتطبيق المتباينة (3.67) استدلالياً نحصل على:

$$\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}\|\leq\|\mathbf{T}\|\|\mathbf{x}^{(k-1)}-\mathbf{x}\|\leq\|\mathbf{T}\|^{2}\|\mathbf{x}^{(k-2)}-\mathbf{x}\|\leq\cdots\leq\|\mathbf{T}\|^{k}\|\mathbf{x}^{(0)}-\mathbf{x}\| \tag{3.68}$$

وبأخذ نهاية طرفي المتباينة (3.68) عندما k يؤول إلى ما لانهاية نحصل على:

$$\lim_{k\to\infty}\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}\|\leq\lim_{k\to\infty}\|\mathbf{T}\|^{k}\|\mathbf{x}^{(0)}-\mathbf{x}\| \tag{3.69}$$

وبما أن $\|\mathbf{T}\|<1$ فإن $\lim_{k\to\infty}\|\mathbf{T}\|^{k}=0$، وبناء عليه فإنه من المتباينة (3.69) يكون لدينا:

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{x}^{(k)}=\mathbf{x}$$

وهو المطلوب.

النظرية التالية تتضمن حداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب $\mathbf{x}^{(k)}$، أي حداً للمقدار $\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}\|$، حيث إن $\mathbf{x}$ هو الحل المضبوط للنظام الخطي. ونترك برهانها للمناقشة في التمارين.

نظرية (٣,١٦)

إذا كان $\| \mathbf{T} \| < 1$ فإن متتالية المتجهات $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ المعرفة في المعادلة (3.54) تتقارب إلى $\mathbf{x} \in \Re^n$ لأي اختيار ابتدائي $\mathbf{x}^{(0)} \in \Re^n$ وتحقق المتباينة التالية:

$$\| \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x} \| \le \frac{\| \mathbf{T} \|^k}{1 - \| \mathbf{T} \|} \| \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)} \| \tag{3.70}$$

من أجل $k \ge 1$.

من النظريتين السابقتين يتضح أنه بالنسبة للطرائق التكرارية جاكوبي، جاوس- سيدال والاسترخاء تكون متقاربة إذا كان $\| \mathbf{T}_J \| < 1$، $\| \mathbf{T}_{GS} \| < 1$ و $\| \mathbf{T}_{SOR} \| < 1$، على الترتيب. وكما سبق أن ذكرنا فإننا سوف نستخدم فقط معيار القيمة العظمى، l_∞، للتحقق من تقارب الصيغ التكرارية وكذلك لحساب حداً أعلى للخطأ. نستعرض كل ذلك في المثال التالي.

مثال (٣,٢٩)

لقد تم في المثالين (٣,٢٦) و(٣,٢٧) التأكد، من الناحية الحسابية، من تقارب الطريقتين التكراريتين جاكوبي وجاوس- سيدال إلى الحل الوحيد للنظام الخطي الموجود في المثال (٣,٢٦). هنا سوف نثبت أن التقارب لهاتين الطريقتين يكون مضموناً وذلك بتطبيق النظرية (٣,١٥) ومن ثم نوجد حداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب الذي تم الحصول عليه باستخدام طريقة جاكوبي. أما الحد الأعلى للحل التقريبي الذي تم الحصول عليه باستخدام الطريقة الأخرى فيمكن حسابه بشكل مشابه.

بداية نلاحظ أنه يمكن توزيع مصفوفة المعاملات بالشكل:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$$

حيث إن:

$$\begin{bmatrix}4 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ -1 & -2 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

وبالتالي بالنسبة لطريقة جاكوبي يكون لدينا:

$$\mathbf{T}_J=\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & -1\\ -1 & -2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0\end{bmatrix}$$

وبناء على ذلك فإنه يكون لـدينا $\|\mathbf{T}_J\|=\frac{2}{3}<1$ وحـسب النظريـة (٣,١٥) فإن تقارب طريقة جاكوبي للنظام الخطي الموجود في المثال (٣,٢٦) يكـون مـضموناً. كـذلك الحـال بالنـسبة لطريقـة جـاوس- سـيدال، حيـث إننـا نحـصل عـلى $\|\mathbf{T}_{GS}\|=\frac{1}{2}<1$. وبما أن $\|\mathbf{T}_{GS}\|<\|\mathbf{T}_J\|<1$ فإن معدل تقارب طريقة جـاوس- سيدال يكون أسرع من جاكوبي، وهذا يوافق النتائج العددية التـي حـصلنا عليهـا في المثالين (٣,٢٦) و(٣,٢٧).

الآن لنحسب حداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب $\mathbf{x}^{(7)}$ والذي تم الحصول عليه باستخدام طريقة جاكوبي حيث إنه بالتعويض عن $k=7$ ، $\|\mathbf{x}^{(1)}-\mathbf{x}^{(0)}\|=1$ و $\|\mathbf{T}_J\|=\frac{2}{3}$ في المتباينة (3.70) نحصل على:

$$\|\mathbf{x}^{(7)}-\mathbf{x}\|\le\frac{\|\mathbf{T}\|^7}{1-\|\mathbf{T}\|}\|\mathbf{x}^{(1)}-\mathbf{x}^{(0)}\|=\frac{(2/3)^7}{1-1/3}(1)=0.08779$$

في الواقع يمكن استخدام طريقة مباشرة لإيجاد الحل المضبوط للنظام الخطي الموجود في المثال (٣,٢٦) وهو $\mathbf{x}=[0.6,1.2,-0.2]^T$. وبالتالي فإن الخطأ المضبوط هو $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(7)}\|=2\times10^{-5}$ وهو أصغر من الحد الأعلى للخطأ كما يجب.

نشير هنا إلى أنه في المثالين (٣,٢٦) و(٣,٢٧) قد تم إيقاف العمليات الحسابية عندما تحقق الشرط $\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^{(k-1)}\|<5\times10^{-4}$، حيث إننا بالنسبة لطريقة جاكوبي حصلنا على $\|\mathbf{x}^{(6)}-\mathbf{x}^{(5)}\|=1.5\times10^{-3}$ و $\|\mathbf{x}^{(7)}-\mathbf{x}^{(6)}\|=2.4\times10^{-4}$ وبناء عليه فإن العمليات الحسابية قد توقفت عند التكرار السابع. طبعاً الحل التقريبي $\mathbf{x}^{(7)}$ أفضل من الذي تكهن به شرط الوقوف المستخدم، هذا، بطبيعة الحال، يكون لصالح النتائج العددية ويدل على أن شرط الوقوف المستخدم يفي بالغرض. نذكر هنا أن الخطأين المضبوطين المرافقين للحلين التقريبيين $\mathbf{x}^{(7)}$ و $\mathbf{x}^{(7)}$ هما $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(6)}\|=2.2\times10^{-4}$ و $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(5)}\|=1.7\times10^{-3}$ وبالتالي فإن الوقوف عند التكرار السابع يكون مناسب. كما ذكر أنه باستخدام شرط الوقوف الآخر [المتباينة (3.62)] نحصل على نفس الحل التقريبي حيث يكون لدينا $\frac{\|\mathbf{x}^{(7)}-\mathbf{x}^{(6)}\|}{\|\mathbf{x}^{(7)}\|}=4\times10^{-4}$ بالنسبة لطريقة جاكوبي و $\frac{\|\mathbf{x}^{(5)}-\mathbf{x}^{(4)}\|}{\|\mathbf{x}^{(5)}\|}=4.5\times10^{-4}$ بالنسبة لطريقة جاوس- سيدال. يمكن للقارئ التحقق من أن التقريب $\mathbf{x}^{(5)}$ هو الحل التقريبي المطلوب بحساب الخطأ المضبوط المرافق له.

نشير هنا إلى أنه يمكن استخدام المتباينة (3.70) لحساب عدد التكرارات اللازمة للحصول على حل تقريبي بدقة معينة $\epsilon=5\times10^{-t}$، $t\geq1$ حيث يكون لدينا:

$$\|\mathbf{x}^{(K)}-\mathbf{x}\|\leq\frac{\|\mathbf{T}\|^K}{1-\|\mathbf{T}\|}\|\mathbf{x}^{(1)}-\mathbf{x}^{(0)}\|\leq5\times10^{-t}$$

حيث إن K هو عدد التكرارات المراد إيجاده، والذي يمكن الحصول عليه بحل المتباينة

$$\frac{\|\mathbf{T}\|^{K}}{1-\|\mathbf{T}\|}\|\mathbf{x}^{(1)}-\mathbf{x}^{(0)}\| \le 5\times10^{-r}$$

وذلك بالاستعانة بالدالة اللوغارتمية log. راجع البند (٢,٤) وتمارين هذا الفصل.

نختتم هذا البند بطرح النظرية التي تساعدنا في التحقق من ضمان تقارب الصيغ التكرارية إذا كانت المصفوفة $\mathbf{A}$ قطعية السيطرة، راجع تعريف هذه المصفوفة في البند (٣,١). وللإطلاع على برهان النظرية يمكن الرجوع إلى كتاب التحليل العددي لـ Ortega (١٩٧٢م).

نظرية (٣,١٧)

إذا كانت $\mathbf{A}$ مصفوفة قطعية السيطرة فإن كل من طريقتي جاكوبي وجاوس- سيدال تكونان متتالية من المتجهات $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ تتقارب إلى الحل الوحيد $\mathbf{x}\in\Re^{n}$ للنظام الخطي $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ لأي اختيار ابتدائي $\mathbf{x}^{(0)}\in\Re^{n}$.

(٣,٨) تمارين

Exercises

١- أوجد منقول المصفوفات التالية ثم حدد المصفوفات المتماثلة:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-3&5\\0&2&3\\-7&-1&1\end{bmatrix}،\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&3\\4&0\\-6&7\end{bmatrix}\ \text{و}\ \mathbf{x}=\begin{bmatrix}3\\1\\2\\0\end{bmatrix}.$$

٢- اعتبر المصفوفات التالية:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&-4&1\\1&1&7\\-1&-3&0\end{bmatrix}،\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}4&-1&1\\2&3&0\\-2&-3&6\end{bmatrix}،\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix}4&1\\3&2\\-6&0\end{bmatrix}\ \text{و}$$

$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}$، احسب ما يلي: $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ ، $\mathbf{AB}$ ، $\mathbf{AC}$ و $\mathbf{Ax}$.

٣- احسب محدد المصفوفة:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&-3&5\\1&2&3\\-1&-2&2\end{bmatrix}$$

بأسلوبين مختلفين.

٤- حدد المصفوفة قطعية السيطرة والمصفوفة موجبة بالتحديد فيما يلي:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-3&5\\0&2&3\\-7&-1&1\end{bmatrix}،\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}4&-1&1\\2&3&0\\-2&-3&6\end{bmatrix}،$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}4&1\\3&2\\-6&0\end{bmatrix}\ \text{و}\ \mathbf{D}=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}.$$

٥- حدد المصفوفة التي يمكن إعادة ترتيب بعض صفوفها لجعلها مـصفوفة قطعية السيطرة فيما يلي:

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 6\\ 4 & -1 & -2\\ -3 & 7 & 2\end{bmatrix} ، \mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & -3 & 1\\ -2 & 0 & 1\\ -1 & -2 & 4\end{bmatrix}$$

و $$.\,\mathbf{C}=\begin{bmatrix}3 & -4 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -5\end{bmatrix}$$

٦- استخدم طريقة الحذف الجاوسي والتعويض الخلفي لحل الأنظمة الخطية التالية:

$$\text{(i)}\quad \begin{aligned} x_1+2x_2-x_3&=1\\ 2x_1+x_2&=0\\ -x_1+x_2+3x_3&=-1\end{aligned} \qquad \text{(ii)}\quad \begin{aligned} 3x_1+x_2+x_3&=5\\ x_1+3x_2-x_3&=3\\ 3x_1+x_2-5x_3&=-1\end{aligned}$$

٧- استخدم طريقة الحذف الجاوسي والتعويض الخلفي لإثبات أنه لا يوجد حل وحيد للنظام الخطي:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3&=1\\ -3x_1+6x_2-9x_3&=-3\\ 2x_1-8x_2+8x_3&=2\end{aligned}$$

هل يوجد عدد لانهائي من الحلول أم لا يوجد حلاً على الإطلاق، ولماذا؟.

٨- اعتبر النظام الخطي:

$$\begin{aligned} 4x_1+\beta x_3&=\delta\\ -x_1+4x_2-6x_3&=4\\ x_1-2x_2+2x_3&=1\end{aligned}$$

حيث إن β و δ عددين ثابتين. استخدم طريقة الحذف الجاوسي لإيجاد قيم β و δ التي تجعل للنظام الخطي عدد لانهائي من الحلول . ثم استخدم التعويض الخلفي لإيجاد حلاً يكون أحد عناصره مساوياً للصفر.

٩– لنفترض أننا نريد استخدام طريقة الحذف الجاوسي لحل النظامين الخطين المتكافئين:

$$\begin{bmatrix} 9.031 & 1.921 \\ 0.0342 & 1.342 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 0.0342 & 1.342 \\ 9.031 & 1.921 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

أي الحلين تتوقع أن يكون أفضل ولماذا؟. [ملاحظة: لا تحاول حل النظامين].

١٠ – استخدم طريقة الحذف الجاوسي مع الارتكاز الجزئي لحل النظام الخطي:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 3 \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 8 \end{aligned}$$

١١ – استخدم طريقة الحذف الجاوسي مع الارتكاز الجزئي لإثبات أنه لا يوجد حل وحيد للنظام الخطي:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ -3x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= -3 \\ 2x_1 - 8x_2 + 8x_3 &= 2 \end{aligned}$$

هل يوجد عدد لانهائي من الحلول أم لا يوجد حلاً على الإطلاق، ولماذا؟.

١٢ – اعتبر النظام الخطي:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0.5 & \beta \\ -1 & -1.5 & 2.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

حيث إن β عدد ثابت. استخدم طريقة الحذف الجاوسي والارتكاز الجزئي لإيجاد قيمة β التي تجعل للنظام الخطي عدد لانهائي من الحلول.

١٣- اكتب خوارزمية تتضمن الخطوات اللازمة لإنجاز الارتكاز السلمي.

١٤- حل النظام الخطي:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 4x_1 + 8x_2 - 3x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

باستخدام الطرائق التالية وحسابات تعتمد على أربعة أرقام عشرية:

أ) طريقة الحذف الجاوسي.

ب) طريقة الحذف الجاوسي مع الارتكاز الجزئي.

جـ) طريقة الحذف الجاوسي مع الارتكاز السلمي.

والتعويض الخلفي. ماذا تلاحظ من النتائج التي تحصل عليها في الحالات الثلاث.

١٥- حلل المصفوفتين التاليتين:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 8 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

إلى حاصل الضرب $\mathbf{LU}$ وذلك بوضع $l_{ii} = 1$ لكل $1 \le i \le 3$.

١٦- حلل المصفوفتين الموجودتين في التمرين السابق إلى حاصل الضرب $\mathbf{LU}$ ، وذلك بوضع $u_{ii} = 1$ من أجل $i = 1,2,3$.

١٧- استخدم التحليلين اللذين أوجدتهما في التمرين ١٥ لحل النظامين الخطيين التاليين:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 8 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

١٨- استخدم التحليلين اللذين أوجدتهما في التمرين ١٦ لحل النظامين الخطيين الموجودين في التمرين السابق. ماذا تلاحظ بالنسبة للمتجه **z** والحل **x** في الحالتين.

١٩- استخدم طريقة التحليل المثلثي مع وضع $l_{ii} = 1$ لإثبات أنه لا يوجد حل وحيد للنظام الخطي:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ -3x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= -3 \\ 2x_1 - 8x_2 + 8x_3 &= 2 \end{aligned}$$

ماذا تلاحظ بالنسبة لقطر المصفوفة المثلثية العليا **U** وعلى ماذا يدل ذلك.

٢٠ – استخدم طريقة التحليل المثلثي مع وضع $u_{ii} = 1$ لإثبات أنه لا يوجد حل وحيد للنظام الخطي الموجود في التمرين السابق. ماذا تلاحظ بالنسبة لقطر المصفوفة المثلثية الدنيا **L** وعلى ماذا يدل ذلك. ماذا تستنتج من هذا التمرين والتمرين السابق.

٢١- استخدم طريقة شولسكي لتحليل المصفوفة:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 4 & 8 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

٢٢- أثبت أن المعيار l_∞ يحقق الخواص الموجودة في تعريف (٣,١١).

٢٣- ليكن $\mathbf{x} = [-2,1,3,5]^T$ احسب $\|\mathbf{x}\|_\infty$ و $\|\mathbf{x}\|_2$.

٢٤- المتجه $\mathbf{x}=[1,10,27]^T$ هو الحل الوحيد للنظام الخطي:

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2-x_3&=5\\ 4x_1+8x_2-3x_3&=3\\ -2x_1+3x_2-x_3&=1 \end{aligned}$$

احسب الفرق $\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty$ حيث إن $\tilde{\mathbf{x}}=[1.01,9.99,27.1]^T$ حل تقريبي لهذا النظام.

٢٥- أثبت أن متتالية المتجهات $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ والمعرفة بالتالي:

$$\mathbf{x}^{(k)}=[x_1^{(k)},x_2^{(k)},x_3^{(k)}]^T=[1+e^{-2k},\frac{1-k^2}{k},1-\cos^2\frac{5}{k}]^T$$

تتقارب إلى المتجه $\mathbf{x}=[1,-1,0]^T$ عندما k تؤول إلى ∞.

٢٦- أوجد $\|.\|_\infty$ للمصفوفتين التاليتين:

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}4&2&-1&1\\2&8&-2&2\\-3&-10&-1&1\\2&11&4&3\end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0&-6\\4&4&-1\\-3&1&-7\end{bmatrix}$$

٢٧- احسب عدد الشرط للمصفوفات التالية:

$$\begin{bmatrix}5&1&-7&1\\2&1&5&3\\11&5&1&4\end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix}3&1&-10\\2&6&9\\1&5&1\end{bmatrix} \text{ ، } \begin{bmatrix}3&1\\2&6\end{bmatrix}.$$

٢٨- ليكن لدينا الحل التقريبي $\tilde{\mathbf{x}}=[1,0]^t$ للنظام الخطي $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$، حيث إن $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2\\2&4.0001\end{bmatrix}$ و $\mathbf{b}=[1,1.9999]^T$ فاحسب $\|\mathbf{r}\|_\infty$ حيث إن $\mathbf{r}$ هو متجه

الترسب للنظام الخطي بالنسبة للتقريب $\tilde{\mathbf{x}} = [1,0]^T$. ثم احسب حداً أعلى لكل من الخطأ المطلق والخطأ النسبي.

٢٩- المتجه $\mathbf{x} = [1,10,27]^T$ هو لحل الوحيد للنظام الخطي:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 4x_1 + 8x_2 - 3x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

احسب $\|\mathbf{r}\|_\infty$ حيث إن $\mathbf{r}$ هو متجه الترسب بالنسبة لهذا النظام والمتعلق بالحل التقريبي $\tilde{\mathbf{x}} = [1.01,10.01,27.1]^T$. احسب $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty$. ما الذي يمكن أن تستنتجه من النتائج العددية.

٣٠- استخدم طريقة التصفية التكرارية لحل النظام الخطي:

$$\begin{aligned} 4.1110x_1 - 5.0781x_2 + 9.3452x_3 &= 7.4116 \\ 1.8565x_1 + 13.723x_2 - 11.743x_3 &= 19.416 \\ 2.6662x_1 + 4.2248x_2 + 1.8450x_3 &= 15.627 \end{aligned}$$

احسب التكرارين الأول والثاني فقط.

٣١- اعتبر النظام الخطي:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \qquad\quad &= 1 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 4x_1 \qquad\quad + 6x_3 &= 8 \end{aligned}$$

والتقريب الابتدائي $\mathbf{x}^{(0)} = [1,0.2,\frac{2}{3}]^t$.

أ) أثبت أن تقارب طريقة جاكوبي يكون مضمون.

ب) ابتداء من $\mathbf{x}^{(0)}$ احسب التكرار الثاني $\mathbf{x}^{(2)}$.

جـ) احسب حداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب ليكن $\mathbf{x}^{(2)}$.

لنفترض أننا نريد استخدام طريقة جاكوبي لحساب حلاً تقريبياً بدقة 5×10^{-4}. أوجد عدد التكرارات اللازمة للحصول على هذا التقريب.

٣٢- أعد حل التمرين ٣١ وذلك باستخدام طريقة جاوس-سيدال. قارن قيمة $\|\mathbf{T}_{GS}\|_\infty$ مع تلك لطريقة جاكوبي والتي حسبتها في التمرين ٣١. ماذا تلاحظ؟

٣٣- أعد التمرين ٣١ وذلك باستخدام طريقة الاسترخاء عندما يكون $\omega=1.1$.

قارن قيمة $\|\mathbf{T}_{SOR}\|_\infty$ مع تلك لطريقة جاكوبي والتي حسبتها في التمرين ٣١. ماذا تلاحظ؟.

٣٤- اعتبر النظام الخطي $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ وأن المصفوفة $\mathbf{A}=\mathbf{B}-\mathbf{C}$ حيث إن:

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ -2 & -1 & -2\\ -1 & -2 & -1\end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

والمتجه $\mathbf{b}\in\Re^3$.

أ) أثبت أن الصيغة التكرارية $\mathbf{x}^{(k-1)}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{x}^{(k-1)}+\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$، $k\geq1$ لحل هذا النظام تكون مضمونة التقارب.

ب) أثبت أن تقارب طريقة جاكوبي التكرارية يكون أسرع من الطريقة الموجودة في الفقرة (أ).

جـ) ابتداء من $\mathbf{x}^{(0)}=[0,0,0]^t$، استخدم الصيغة التكرارية الموجودة في الفقرة (أ) لحل النظام الخطي عندما يكون $\mathbf{b}=[1,-1,0]^T$. احسب التقريب الثالث احسب حداً أعلى للخطأ المتعلق بهذا التقريب.

٣٥- استخدم المعادلات (3.63) لاستنتاج الصيغة التكرارية بالشكل المصفوفي لطريقة جاوس-سيدال.

٣٦- اعتبر النظام الخطي $\mathbf{Ax = b}$ ، حيث إن $\mathbf{b} = [0,0,1]^T$ ،

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & -0.25 \\ 2.5 & -1 & 0.5 \\ 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 8 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

أ) استخدم طريقة جاوس-سيدال التكرارية لحساب التقريب الثاني للحل المضبوط وذلك ابتداء من $\mathbf{x}^{(0)} = [0,0.2,0]^t$.

ب) احسب $\|\mathbf{r}\|_\infty$ حيث إن $\mathbf{r}$ هو متجه الترسب بالنسبة لهذا النظام والمتعلق بالحل التقريبي $\mathbf{x}^{(2)}$.

جـ) استخدم طريقة مباشرة لحساب الحل المضبوط لهذا النظام، ثم احسب الخطأ $\|\mathbf{x}^{(2)} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty$.

د) احسب حداً أعلى للخطأ $\|\mathbf{x}^{(2)} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty$ بأسلوبين مختلفين.

٣٧- أثبت النظرية (٣,١٦).

٣٨- أثبت أنه إذا كانت $\mathbf{A}$ مصفوفة قطعية السيطرة فإن $\|\mathbf{T}_J\|_\infty < 1$.

٣٩- المتجه $\mathbf{x} = [1,1,1]^T$ هو الحل الوحيد للنظام الخطي:

$$\begin{aligned} x_1 + 10x_2 + \quad x_3 &= 12 \\ x_1 + \quad x_2 + 10x_3 &= 12 \\ 10x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 &= 12 \end{aligned}$$

استخدم كل من طريقتي جاكوبي وجاوس-سيدال لحساب التقريب الرابع $\mathbf{x}^{(4)}$ للحل وذلك بوضع $\mathbf{x}^{(0)} = [0,0,0]^T$. ماذا يمكنك أن تلاحظ من خلال النتائج

العددية التي تحصل عليها؟ هل النتائج العددية توحي بأن متتالية المتجهات $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ تتقارب أم تتباعد؟.

٤٠- أعد ترتيب المعادلات الموجودة في النظام الخطي الموجود في التمرين ٣٢ حيث إن طريقتي جاكوب وجاوس-سيدال تكونان مضمونتين التقارب لأي اختيار ابتدائي $\mathbf{x}^{(0)} \in \Re^3$. ابتداء من $\mathbf{x}^{(0)} = [0,0,0]^T$ احسب $\mathbf{x}^{(4)}$ وذلك بتطبيق كل من طريقتي جاكوبي وجاوس-سيدال على النظام الخطي بترتيبه الجديد. قارن النتائج العددية التي تحصل عليها مع تلك التي حصلت عليها في التمرين ٢٦. ماذا تلاحظ؟.

تمارين الحاسب

ح١- اكتب برامج للحاسب لتنفيذ العمليات التالية:

أ) حاصل الجمع $\mathbf{A}+\mathbf{B}$.

ب) حاصل الضرب $\mathbf{AB}$

جـ) حاصل الضرب $\mathbf{Ax}$.

ح٢- استخدم خوارزمية الحذف الجاوسي (٣,١) لكتابة برنامج للحاسب، ثم استخدمه لحل النظام الخطي:

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 &= 3\\
2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 7\\
-3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 &= -5\\
x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 &= 12\\
-5x_1 + x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 2x_5 &= 8
\end{aligned}
$$

ح٣- اكتب برنامج للحاسب يُنفذ طريقة الحذف الجاوسي مع الارتكاز الجزئي، ثم استخدمه لحل النظام الخطي الموجود في التمرين السابق.

ح٤- اكتب برنامج للحاسب لحساب:

أ) معيار القيمة العظمى للمتجه $\mathbf{x}$ ذو البعد n.

ب) معيار القيمة العظمى للمصفوفة $\mathbf{A}$ من النوع $n\times n$.

جـ) ثم استخدم هذا البرنامج لحساب $\|\mathbf{x}\|_\infty$ و $\|\mathbf{A}\|_\infty$، حيث إن:

$\mathbf{x} = [-3,4,0,1,9,-11,2]^T$ و

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 & 7 \\ 2 & 8 & -2 & 2 & 11 \\ -3 & -10 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 11 & 4 & 3 & 13 \\ 6 & 15 & 9 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

ح٥- اعتبر النظام الخطي $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ حيث إن:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & -6 \\ 5 & 3 & 7 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

أ) احسب عدد الشرط للمصفوفة $\mathbf{A}$.

ب) استخدم طريقة التصفية التكرارية لحل النظام الخطي. احسب حلاً عددياً بدقة 5×10^{-7}.

تلميح: يمكنك الاستعانة بالخوارزمية (٣,٥) لكتابة البرنامج المؤلف.

ح٦- اعتبر النظام الخطي التالي:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \qquad &= 1 \\ -2x_1 + 3x_2 \qquad &= 0 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 &= 3 \end{aligned}$$

احسب حلاً تقريبياً بدقة 5×10^{-4} وذلك باستخدام الطرائق التكرارية جاكوبي، جاوس-سيدال والاسترخاء (مع $\omega = 1.1$) ووضع $\mathbf{x}^{(0)} = [0,0,0]^T$. قارن النتائج التي تحصل عليها ماذا تلاحظ؟. يمكنك استخدام العلاقة $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_\infty$، حيث إن $\mathbf{x}$ هو الحل المضبوط والذي يمكن الحصول عليه بحل هذا النظام باستخدام أحد الطرائق الرياضية (المباشرة).