الفصل الرابع

الاستكمال
Interpolation

ليكن لدينا النقاط المختلفة $\{(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)\}$ والتي عددها $n+1$، بحيث إن $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ وأننا لا نعرف التعبير الفعلي للدالة $y = f(x)$ والتي يحتوي منحناها على هذه النقاط. ما نريده هو إيجاد قيمة الدالة f عند نقطة عشوائية. يمكن تقريب الدالة $f(x)$ من أجل قيمة عشوائية لـ x برسم منحنى يمر خلال النقاط المذكورة، بعبارة أخرى، نوجد دالة تمر بهذه النقاط. الاستكمال هو الأسلوب الذي يوجد هذه الدالة، ويعد من الأساليب الرياضية المهمة والمستخدمة في الكثير من المواقف في حياتنا اليومية. تتضمن معظم هذه المواقف ملاحظات مرئية مأخوذة من تجارب معينة. فمثلاً، تقريب سرعة السيارة من قراءة عداد السرعة وقياس 1.5 لملعقة شاي من الدواء بكأس القياس تعد أمثلة من حياتنا اليومية التي تعتمد على استخدام أسلوب الاستكمال. وكمثال في الرياضيات الحيوية، ليكن لدينا أوزان طفل رضيع مجدولة بالجدول رقم (٤,١):

الجدول رقم (٤,١). أوزان طفل رضيع.

العمر (بالأشهر)	1	3	4	6	8	10
الوزن (بالكيلوجرام)	4.2	4.9	6.0	7.1	8.2	9.3

ويريد الطبيب معرفة وزن الطفل عندما كان عمره خمسة أشهر. يمكن إيجاد قيمة تقريبية دقيقة لهذا الوزن باستخدام الاستكمال. في الواقع، هناك أمثلة تطبيقية كثيرة جداً يكون استخدام الاستكمال هو الأسلوب الوحيد أو الأمثل لحلها.

رياضياً يستخدم الاستكمال في الكثير من المسائل العامة في مجال نظرية التقريب. نذكر فيما يلي بعض مسائل التقريب و دور الاستكمال في حلها:

١- ليكن لدينا جدول يحتوي على قيم معينة لـ x والدالة $f(x)$، فإننا نستخدم الاستكمال لإيجاد قيم تقريبية لـ $f(x)$ عند قيم لـ x غير موجودة في الجدول. سوف نستخدم هذه المسألة لتوضيح الاستكمال والذي سنناقشه في البنود التالية.

٢- إيجاد دالة غير متذبذبة والتي تطبق تماماً أرقام مجدولة معطاة. يتم حل هذه المسألة باستخدام الاستكمال بواسطة دوال الشرائح (spline functions) والذي سوف نبحثه في البند (٤,٦).

٣- حساب تفاضل أو تكامل عددي لدالة، حيث إننا نستخدم الاستكمال للحصول على تعبير أبسط للدالة ومن ثم يُفاضل أو يُكامل للحصول على قيم تقريبية للتفاضل أو التكامل. سوف ندرس ذلك بالتفصيل في الفصل الخامس.

٤- يستخدم الاستكمال لتطوير طرائق عددية لحل المعادلات التفاضلية والتكاملية وكذلك الطرائق العددية لحل المعادلات غير الخطية ، نشير هنا إلى أننا استخدمنا ذلك عندما استنتجنا طريقة نيوتن- رافسون في الفصل الثاني.

(٤,١) الاستكمال بواسطة كثيرات الحدود
Polynomial Interpolation

لقد أثبت رستراس (Weierstrass) عام ١٨٨٦م ضمان تقريب دالة متصلة بواسطة كثيرة حدود، كما تنص عليه نظريته المشهورة:

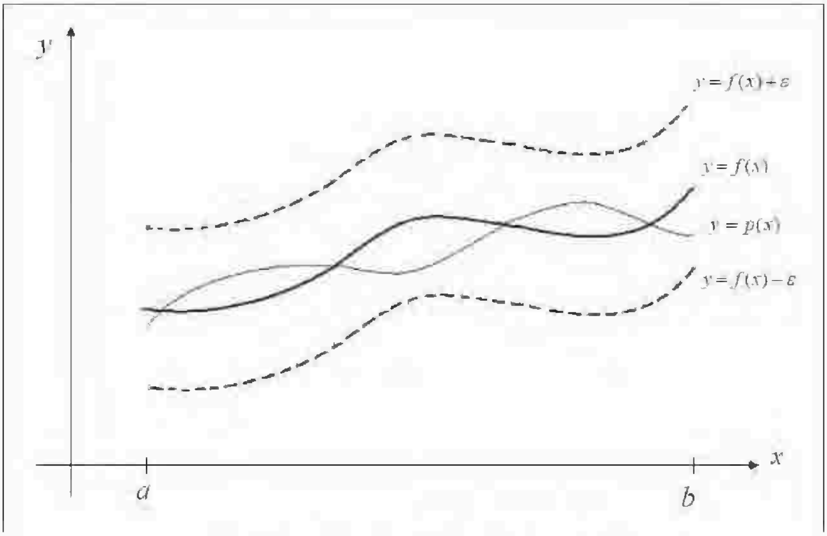
نظرية (٤,١) (نظرية رستراس التقريبية)

لتكن $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ و $\varepsilon > 0$ عدد معطى، فإنه يوجد كثيرة حدود $p(x)$ بحيث إن $|f(x)-p(x)|<\varepsilon$ لكل $x\in[a,b]$.

الرسم الموجود في الشكل رقم (٤,١) يوضح ما تنص عليه النظرية (٤,١) وهو إمكانية تقريب دالة متصلة وبشكل عشوائي بواسطة كثيرة حدود في فترة مغلقة. يوجد الكثير من البراهين لهذه النظرية في كتب التحليل الحقيقي ونظرية التقريب. وحيث إن برهان هذه النظرية ليس من اهتمامات هذا الفصل فإننا لن نطرحه هنا ويمكن مراجعة، مثلاً، كتاب Davis ١٩٨٢م و Bartle ١٩٧٦م للبرهان. يتضمن البرهان الموجود في كتاب دافيز أن كثيرة حدود برنستين (Bernstein) والمعرفة بـ :

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k},\qquad x\in[0,1] \tag{4.1}$$

تحقق $\max_{x\in[0,1]}|f(x)-B_n(x)|\to 0$ عندما $n\to\infty$ بشرط أن تكون $f(x)$ دالة متصلة.



الشكل رقم (٤,١). نظرية رستراس التقريبية.

إنه لمن المناسب اعتبار فئة من كثيرات الحدود من أجل تقريب دالة متصلة $f(x)$. إذا كانت $f(x)$ دالة ملساء، فعادة يتناقص المقدار $|f(x)-p(x)|$ بشكل سريع مع زيادة قيمة n. في الكثير من الحالات تتناقص قيمة $|f(x)-p(x)|$ بشكل بطيء. المثال التالي يوضح حالة من هذه الحالات.

مثال (٤,١)

أوجد كثيرات حدود برنستين ذات الدرجات الثانية، الثالثة و n للدالة $f(x)=x^2$، ومن ثم أثبت أن معدل تقارب $\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)-B_n(x)|\to 0$ هو من الرتبة $\frac{1}{n}$.

بداية نلاحظ أن:

$$B_2 = 2f(\frac{1}{2})x(1-x) + f(1)x^2 = \frac{1}{2}x(1+x)$$

$$B_3 = 3f(\frac{1}{3})x(1-x)^2 + 3f(\frac{2}{3})x^2(1-x) + f(1)x^3 = \frac{1}{3}x(1+2x)$$

و هكذا فإن:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(\frac{k}{n})x^k(1-x)^{n-k} = \frac{1}{n}x(1+(n-1)x)$$

وبالتالي فإنه يكون لدينا:

$$|f(x)-B_n(x)| = |x^2 - \frac{1}{n}x(1+(n-1)x)| = \frac{1}{n}|x(x-1)| \le \frac{1}{4n}$$

وهذا يعني أن معدل تقارب المقدار $\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)-B_n(x)|$ إلى الصفر يكون برتبة $\frac{1}{n}$ أي $O(\frac{1}{n})$. وهذا يوضح بطء تقارب كثيرات حدود برنستين. بناء على ذلك، فإن التقريب بواسطة كثيرات حدود برنستين قد لا يكون أسلوباً فعّالاً.

من ناحية أخرى، نقول أن الدالة $f(x)$ تتوافق مع دالة أخرى $p(x)$ عند $x=x_0$ إذا كان $f(x_0)=p(x_0)$. إضافة إلى ذلك، إذا كان $f'(x_0)=p'(x_0)$ فإن

$f(x)$ توافق $p(x)$ مرتين عند $x = x_0$. و بشكل عام، يقال أن الدالتين $f(x)$ و $p(x)$ متفقتان n مرة عند $x = x_0$ إذا كان $f^{(i)}(x_0) = p^{(i)}(x_0)$ من أجل $i = 0,1,2,\dots,n-1$. في الواقع، إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة تفاضلياً $n+1$ مرة فإنه حسب نظرية تايلور (نظرية ١,١٠) يكون لدينا $f(x) = p(x) + e(x)$ حيث إن:

$$p(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(x-x_0)^k}{k!}f^{(k)}(x_0) \tag{4.2}$$

و

$$e(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\eta(x)) \tag{4.3}$$

حيث إن $\eta(x)$ تقع بين x و x_0. هنا $p(x)$ هي كثيرة حدود تايلور ذات الدرجة n و $e(x)$ هو الخطأ المتعلق بتقريب الدالة $f(x)$ بواسطة $p(x)$، ويسمى أيضاً بالحد المتبقي. من الواضح أن $p(x)$ هي دالة تقريبية لـ $f(x)$ والتي توافقها n مرة عند $x = x_0$. يمكن مراجعة الأمثلة في الفصل الأول والتي توضح كيفية استخدام كثيرة الحدود تايلور لتقريب بعض الدوال والأسلوب المتبع للحصول على الخطأ المتعلق بالقيم التقريبية.

(٤,٢) كثيرة حدود لاغرانج
Lagrange polynomial

نحن نعلم أن كثيرة حدود تايلور توافق الدالة $f(x)$ عند عدد واحد فقط، وليكن x_0، وبالتالي فإنها تكون مفيدة لتقريب هذه الدالة في فترة صغيرة تحتوي على x_0. وبناء على ذلك فإنه، عادة، لا تستخدم كثيرة الحدود تايلور بل تستخدم كثيرات حدود أخرى سوف ندرسها في هذا البند.

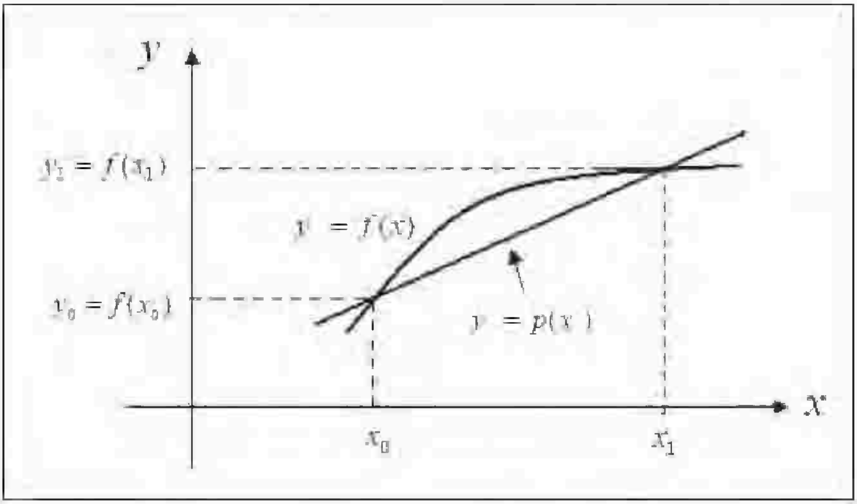
لتكن $f(x)$ دالة معرفة عند العددين المختلفين x_0 و x_1 ونريد أن نكوّن كثيرة حدود $p(x)$ من الدرجة الأولى والتي توافق هذه الدالة عند العددين المذكورين. بعبارة أخرى، نحن نريد تكوين كثيرة حدود تمر بالنقطتين $(x_0, f(x_0))$ و $(x_1, f(x_1))$. يتضح من الشكل رقم (٤،٢) أن الخط المستقيم هو أقصر منحنى يصل بين النقطتين المذكورتين. يمكن تمثيل هذا المستقيم بكثيرة الحدود الخطية.

$$p(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \tag{4.4}$$

حيث إنه إذا وضعنا $x = x_0$ في المعادلة (4.2) فإنه يكون لدينا:

$$p(x_0) = \frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x_0 - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) = f(x_0)$$

وعندما نضع $x = x_1$ نحصل على $p(x_1) = f(x_1)$. وبالتالي فإن كثيرة الحدود المعرفة في المعادلة (4.2) تمر بالنقطتين $(x_0, f(x_0))$ و $(x_1, f(x_1))$. في الواقع يمكن كتابة كثيرة الحدود الخطية (4.4) بعدة أشكال، (انظر التمارين والبند ٤،٣).



الشكل رقم (٤،٢). كثيرة الحدود الخطية (4.4).

لنرمز لحاصل القسمة الموجود في المعادلة (4.2) بالرمز:

$$L_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \qquad \text{و} \qquad L_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}$$

فإن كثيرة الحدود (4.4) تأخذ الشكل:

$$p(x)=L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1) \tag{4.5}$$

ومنه يمكن استنتاج أن $L_0(x_0)=1$ ، $L_0(x_1)=0$ ، $L_1(x_1)=1$ و $L_1(x_0)=0$.

الآن ليكن لدينا الأعداد المختلفة $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ والتي عددها $n+1$ وأن الدالة $f(x)$ معرفة عند هذه الأعداد. هنا نريد تكوين كثيرة حدود $p(x)$ ذات الدرجة n على الأكثر والتي توافق الدالة $f(x)$ عند الأعداد المذكورة، أي أنها تحقق $p(x_i)=f(x_i)$ من أجل $i=0,1,2,\ldots,n$.

لاستنتاج كثيرة الحدود هذه، فإننا نكوّن حاصل القسمة $L_k(x)$ الذي يحقق الشرطين:

$$L_k(x_k)=1, \qquad k=0,1,2,\ldots,n \tag{4.6a}$$

$$L_k(x_i)=0, \qquad k\neq i \tag{4.6b}$$

لتحقيق الشرط (4.6b) فإن بسط حاصل القسمة $L_k(x)$ يجب أن يأخذ الشكل:

$$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n) \tag{4.7}$$

ولكي يتحقق الشرط (4.6a) فإن مقام $L_k(x)$ لابد أن يساوي (4.7) عندما $x=x_k$.

وبناء على ذلك، فإن حاصل القسمة $L_k(x)$ ينبغي أن يكون من الشكل:

$$L_k(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{i=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \tag{4.8}$$

يمكن الآن كتابة كثيرة الحدود ذات الدرجة n على الأكثر والتي تستكمل الدالة $f(x)$ عند الأعداد المختلفة $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ بالشكل:

$$p(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + \cdots\cdots + L_n(x) f(x_n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f(x_k) \tag{4.9}$$

حيث إن $L_k(x)$ هي حاصل القسمة المعرّفة في المعادلة (4.8) و تحقق $\sum_{k=0}^{n} L_k(x) = 1$.

من الواضح أن $L_k(x)$ ، من أجل $k = 0,1,2,\dots,n$ عبارة عن كثيرات حدود من الدرجة n وبالتالي فإن كثيرة الحدود $p(x)$ والمعرفة في المعادلة (4.9) تكون من الدرجة n على الأكثر. تسمى كثيرة الحدود المعرفة في المعادلة (4.9) كثيرة حدود لاغرانج الاستكمالية وهي وحيدة كما تنص عليه النظرية التالية.

نظرية (٤,٢)

لتكن $f(x)$ دالة معرفة عند الأعداد المختلفة $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ والتي عددها $n+1$، فإنه يوجد كثيرة حدود وحيدة $p(x)$ ذات الدرجة n على الأكثر والتي توافق الدالة $f(x)$ عند الأعداد المذكورة.

البرهان:

المناقشة التي سبقت هذه النظرية مباشرة تثبت وجود كثيرة الحدود التي توافق الدالة $f(x)$ عند الأعداد المختلفة $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ وأن درجتها تكون n على الأكثر. ولإثبات أن كثيرة الحدود وحيدة، لنفترض أن لدينا كثيرتي حدود $p(x)$

و $q(x)$ من الدرجة n على الأكثر وتحققان $p(x_i) = f(x_i)$ و $q(x_i) = f(x_i)$ من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n$. هذا يعني أن لدينا كثيرتي حدود من الدرجة n على الأكثر ومتساويتان عند الأعداد المختلفة $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ والتي عددها $n+1$. وبما أن $n+1 > n$ فإن $p(x) = q(x)$ لكل x وذلك حسب النظرية (٢,١٤) والموجودة في البند (٢,٩). وهذا يثبت أن كثيرة الحدود $p(x)$ وحيدة.

نشير هنا إلى أن حساب كثيرة الحدود $p(x)$ والمعرفة بالمعادلة (4.9) يحتاج إلى $n^2 + 4n + 2$ عملية ضرب/ قسمة و $n^2 + 3n + 1$ عملية جمع/ طرح.

مثال (٤,٢)

أوجد كثيرة الحدود الاستكمالية $p(x)$ والتي تستكمل الدالة $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ عند الأعداد $x_0 = 3$، $x_1 = 3.5$ و $x_2 = 4.5$. ثم احسب قيمة $p(4)$ وقارنها مع $f(4)$.

بما أنه لدينا ثلاثة أعداد مختلفة فإن كثيرة الحدود التي بين أيدينا تكون بالشكل:

$$p(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$$

وحيث إن:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-3.5)(x-4.5)}{(3-3.5)(3-4.5)} = \frac{4}{3}(x^2 - 8x + 15.75)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-3)(x-4.5)}{(3.5-3)(3.5-4.5)} = -2(x^2 - 7.5x + 13.5)$$

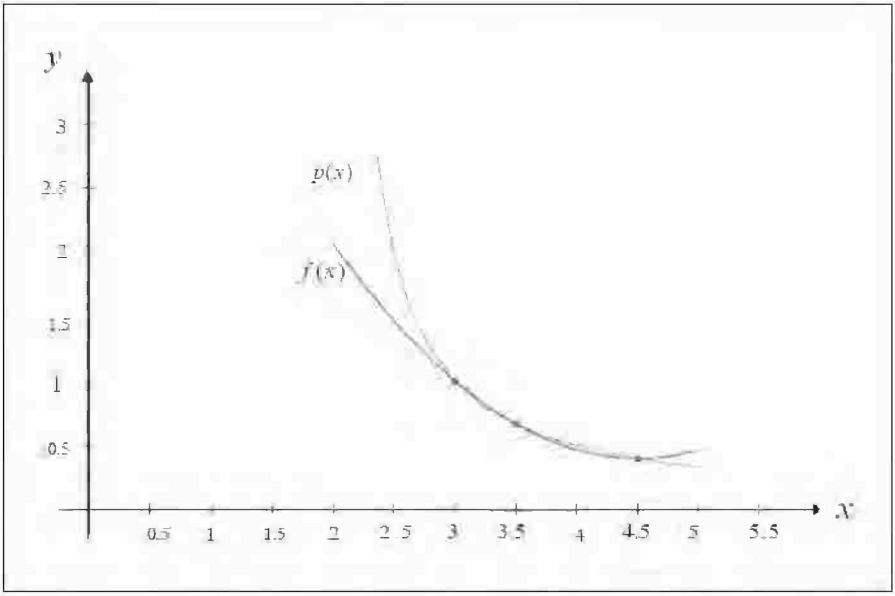
$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-3)(x-3.5)}{(4.5-3)(4.5-3.5)} = \frac{2}{3}(x^2 - 6.5x + 10.5)$$

و $f(3) = 1$، $f(3.5) = \dfrac{2}{3}$، $f(4.5) = \dfrac{2}{5}$، فإنه يكون لدينا:

$$p(x) = \frac{4}{3}(x^2 - 8x + 15.75) - \frac{4}{3}(x^2 - 7.5x + 13.5) + \frac{4}{15}(x^2 - 6.5x + 10.5) \quad (4,10)$$
$$= \frac{4}{15}x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{29}{5}$$

وبما أن معامل x^2 لا يساوي الصفر فإن درجة كثيرة الحدود تكون 2. بوضع $x = 4$ في المعادلة (4.10) حصلنا على $p(4) = 0.466667$ وحيث إن $f(4) = 0.5$ فإن $|f(4) - p(4)| = \frac{1}{30}$ وهو الخطأ المضبوط المتعلق بتقريب الدالة $f(x)$ بكثيرة الحدود $p(x)$ عند $x = 4$. يمكن للقارئ التأكد من أن $L_0(x) + L_1(x) + L_2(x) = 1$.

الرسم الموجود في الشكل رقم (٤,٣) يوضح منحنى الدالة $f(x)$ مع ذلك لكثيرة الحدود $p(x)$ حيث يمكن ملاحظة أنهما يتقاطعان عند النقاط (3,1)، (3.5,0.66667) و (4.5,0.2) فقط. وهذا يعني أن كثيرة الحدود $p(x)$ تمر بالنقاط $(3, f(3))$، $(3, f(3))$ و $(3, f(3))$ وأنها تختلف عن $f(x)$ من أجل جميع القيم الأخرى لـ x ، إن مقدار هذا الاختلاف يعتمد على المسافة بين نقاط الاستكمال. في الواقع كلما بعُدت x عن نقاط الاستكمال كلما ازداد الفرق بين قيم الدالتين $f(x)$ و $p(x)$. النظرية التالية توضح هذا الفرق والذي يعد الخطأ المرتبط بتقريب الدالة $f(x)$ بكثيرة الحدود $p(x)$.



الشكل رقم (٤,٣). منحنيّ الدالتين $f(x)$ و $p(x)$ ومواقع تقاطعهما.

خوارزمية (٤,١): كثيرة الحدود لاغرانج

تحسب هذه الخوارزمية قيمة تقريبية لـ $f(c)$، حيث إن c ثابت يتم تعيينه، وذلك باستخدام كثيرة الحدود لاغرانج الاستكمالية التي تستكمل الدالة $y = f(x)$ عند الأعداد الحقيقية x_i، من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n$.

المدخلات: العدد الصحيح الموجب n (لاحظ أن عدد النقاط $n+1$)، القيم x_i و $y_i = f(x_i)$ من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n$ وكذلك العدد الثابت c.

المخرجات: العدد الثابت c والقيمة التقريبية pc لـ $f(c)$.

الخطوة ١: ادخل c، n، x_i و y_i من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n$.

الخطوة ٢: ضع $pc = 0$

$\text{fact} = 1$

الخطوة ٣: من أجل $i = 0,1,\ldots,n$ ضع $\text{fact} = \text{fact}(c - x_i)$

الخطوة ٤: من أجل $j = 0,1,\ldots,n$ اعمل الخطوات ٥ - ٧

الخطوة ٥: ضع $d = 1$

الخطوة ٦: من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n$ اعمل ما يلي:

إذا كان $i \neq j$ ضع $d = d * (x_j - x_i)$

الخطوة ٧: ضع $pc = pc + \dfrac{d_j * \text{fact}}{c - x_j} * d$

الخطوة ٨: اطبع c و pc.

نظرية (٤,٣)

لتكن $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$ حيث إن الفترة $[a,b]$ تحتوي على الأعداد المختلفة $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$، فإنه لأي x في $[a,b]$ يوجد عدد $\eta(x)$ في (a,b) ويحقق:

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta(x)) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \tag{4.11}$$

حيث إن $p(x)$ هي كثيرة حدود لاغرانج الاستكمالية.

البرهان:

من الملاحظ أنه إذا كانت $x = x_k$ من أجل $k = 0,1,2,\ldots,n$ فإن $p(x)$ توافق الدالة $f(x)$، وبالتالي فإن المعادلة (4.11) متحققة لأي اختيار عشوائي $\eta(x)$ في (a,b). لذلك فإننا سوف نفرض أن $x \neq x_k$ من أجل $k = 0,1,2,\ldots,n$.

ليكن لدينا الدالة $\phi(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ ولنعرّف الدالة $e(t)$ من أجل $t\in[a,b]$ بالتالي:

$$e(t)=f(t)-p(t)-(f(x)-p(x))\frac{\phi(t)}{\phi(x)} \tag{4.12}$$

من الواضح أنه عندما $t=x_k$ من أجل $k=0,1,2,\ldots,n$ فإن $e(t)=0$ وكذلك عندما $t=x$ فإننا نحصل على $e(x)=0$، وهذا يعني أن e تساوي الصفر عند الأعداد المختلفة $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n$ و x والتي عددها $n+2$. من ناحية أخرى، بما أن للدالة $f(t)$ مشتقات متصلة عددها $(n+1)$ على الفترة $[a,b]$ وأن $p(t)$ كثيرة حدود فإنه يكون للدالة $e(t)$ مشتقات متصلة عددها $(n+1)$ على الفترة $[a,b]$. إذن، حسب نظرية رولز العامة يوجد عدد $\eta(x)$ ينتمي للفترة (a,b) بحيث إن $e^{(n+1)}(\eta)=0$. من المعادلة (4.12) نحصل على:

$$e^{(n+1)}(\eta)=f^{(n+1)}(\eta)-p^{(n+1)}(\eta)-(f(x)-p(x))\frac{(n+1)!}{\phi(x)}=0$$

وحيث إن $p(x)$ كثيرة حدود ذات الدرجة n على الأكثر فإن $p^{(n+1)}(\eta)=0$، وبالتالي يكون لدينا:

$$f(x)-p(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\eta)\phi(x)$$

ومنها نحصل على المعادلة (4.11).

يمكن استخدام المعادلة (4.11) لتحديد الخطأ إذا كانت تفاضلات الدالة $f(x)$ محدودة، حيث إنه يمكن تقدير حداً أعلى للخطأ المتعلق بتقريب $f(x)$ بواسطة كثيرة الحدود $p(x)$ عند $x=c$، حيث إن c عدد ثابت، بالمتباينة التالية:

$$|f(c)-p(c)|\le\frac{1}{(n+1)!}\left|\prod_{i=0}^{n}(c-x_i)\right|\max_{x\in[a,b]}|f^{(n+1)}(x)|$$

المثال (٤,٣) يوضح كيفية حساب حداً أعلى للخطأ المتعلق بتقريب ما.

مثال (٤,٣)

بالنسبة للدالة و كثيرة الحدود الموجودتين في المثال (٤,٢) سوف نحسب حداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب $p(4)$. بداية، بما أن $n = 2$ ، فإنه يكون لدينا:

$$|f(4) - p(4)| \leq \frac{1}{3!}|(4-3)(4-3.5)(4-4.5)| \max_{x\in[3,4.5]} |f'''(x)|$$

لاحظ هنا أنه تم اعتبار $x_0 = 3$ و $x_2 = 4.5$ على أنهما طرفي الفترة $[a,b]$.

الآن بما أن $f'''(x) = \dfrac{6}{(x-2)^4}$ فإن $\max_{x\in[3,4.5]} \left|\dfrac{6}{(x-2)^4}\right| = 6$ وبالتالي يكون لدينا

$$|f(4) - p(4)| \leq \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times 6 = \frac{1}{4}$$

وهذا يعني أن الحد الأعلى للخطأ المتعلق بالتقريب المذكور هو 0.25. قارن هذا الحد بالخطأ المضبوط الذي تم الحصول عليه في المثال (٤,٢). ماذا تلاحظ ؟.

نشير هنا إلى أنه يمكن استخدام النظرية (٤,٣) لحساب حداً أعلى للخطأ المتعلق بتقريب الدالة $f(x)$ عند أي x بواسطة كثيرة الحدود $p(x)$ ، حيث إنه يكون لدينا:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x\in[a,b]} \left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right| \max_{\eta\in[a,b]} |f^{(n+1)}(\eta)|$$

يستعرض المثال (٤,٤) كيفية حساب ذلك في حالة الاستكمال الخطي.

مثال (٤,٤)

ليكن لدينا الدالة $f(x)$ المعرفة على الفترة $[0,1]$ ، وليكن x_0 و x_1 أي عددين مختلفين في هذه الفترة بحيث إن $x_0 < x < x_1$ وإن $h = x_1 - x_0$. ولنفترض أن القيمة العظمى للقيمة المطلقة للتفاضل الثاني للدالة $f(x)$ على الفترة $[0,1]$ هي

M . أثبت أن الخطأ المتعلق بالاستكمال الخطي محدود بالمقدار $\frac{1}{8}h^2M$.

بداية، نعلم أن الفرق بين $f(x)$ و $p(x)$ في حالة الاستكمال الخطي هو:

$$f(x)-p(x)=\frac{1}{2!}(x-x_0)(x-x_1)f''(\eta)$$

إذن، أعلى حد للخطأ يمكن أن يكون:

$$|f(x)-p(x)|\le\frac{1}{2}\max_{x\in[0,1]}|(x-x_0)(x-x_1)|\max_{\eta\in[0,1]}|f''(\eta)|$$

لنعرّف الدالة التربيعية $g(x)=(x-x_0)(x-x_1)$. من الواضح أن القيمة القصوى لهذه الدالة تقع عندما $x=\frac{1}{2}(x_0+x_1)$ وهي:

$$g(\frac{x_0+x_1}{2})=(\frac{x_0+x_1}{2}-x_0)(\frac{x_0+x_1}{2}-x_1)=-\frac{h^2}{4}$$

وذلك باستخدام الحقيقة أن $h=x_1-x_0$. وبالتالي فإن $\max_{x\in[0,1]}|g(x)|=\frac{h^2}{4}$. وبما أن $\max_{\eta\in[0,1]}|f''(\eta)|=M$ فإنه يكون لدينا $|f(x)-p(x)|\le\frac{1}{8}h^2M$.

(٤,٣) فـروق الـقـسـمـة

Divided Differences

يمكن كتابة كثيرة حدود لاغرانج الخطية (4.1) بالشكل المساوي:

$$p(x)=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

حيث إن حاصل القسمة:

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \qquad (4.13)$$

يسمى فرق القسمة ذو الرتبة الأولى للدالة $f(x)$ بالنسبة للعددين x_0 و x_1 . إذا

كانت $f(x)$ قابلة للتفاضل على فترة تتضمن العددين x_0 و x_1 فإنه باستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التفاضل نحصل على:

$$f[x_0,x_1]=f'(c)$$

من أجل أي عدد c يقع بين x_0 و x_1. إضافة إلى ذلك إذا كانت قيم x_0 و x_1 متقاربة فإن:

$$f[x_0,x_1]\approx f'(\frac{x_0+x_1}{2})$$

والذي عادة ما يعد تقريب جيد.

ليكن لدينا ثلاثة أعداد مختلفة x_0 ، x_1 و x_2 وأن الدالة $f(x)$ معرفة عند هذه الأعداد وبالتالي توجد كثيرة حدود لاغرانج تربيعية $p(x)$ تستكمل هذه الدالة عند الأعداد المذكورة. يمكن كتابة $p(x)$ بالشكل:

$$p(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}(x-x_0)(x-x_1)$$

حيث إن حاصل القسمة:

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} \tag{4.14}$$

يسمى فرق القسمة ذو الرتبة الثانية للدالة $f(x)$ بالنسبة للأعداد x_0 ، x_1 و x_2.

لاحظ أن :

$$f[x_1,x_2]=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

هو فرق القسمة ذو الرتبة الأولى للدالة $f(x)$ بالنسبة للعددين x_1 و x_2. كما نشير إلى أن $f[x_0]=f(x_0)$ هو فرق القسمة الصفري للدالة $f(x)$ بالنسبة للعدد x_0، في الواقع $f[x_i]=f(x_i)$ من أجل $i=0,1,2,\ldots,n$ هي فروق القسمة الصفرية للدالة f بالنسبة لـ x_i.

بشكل عام يمكن تعريف فرق القسمة ذو الرتبة k من أجل $k=1,2,\dots,n$ كما في التعريف التالي:

تعريف (٤,١)

فرق القسمة ذو الرتبة k من أجل $k=1,2,\dots,n$ للدالة $f(x)$ بالنسبة للأعداد المختلفة $x_i, x_{i+1},\dots,x_{i+k}$ من أجل $i=0,1,2,\dots,n-k$ معرّف بالتالي:

$$f[x_i, x_{i+1},\dots,x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1},\dots,x_{i+k}] - f[x_i,\dots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i} \qquad (4.15)$$

حيث إن $f[x_{i+1},\dots,x_{i+k}]$ و $f[x_i, x_{i+1},\dots,x_{i+k-1}]$ هي فروق القسمة ذات الرتبة $k-1$.

كنتيجة مباشرة لهذا للتعريف (٤,١) نحصل على الخاصيتين التاليتين:

١- فروق القسمة متناظرة.

٢- إذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود ذات الدرجة k ، فإن كثيرة الحدود ذات الدرجة k والتي تستكمل الدالة $f(x)$ تكون هي نفسها. وهذا يعني أن $f[x_0,x_1,\dots,x_k]$ عدد ثابت مستقل عن الأعداد $x_0,x_1,\dots,x_k$ وهو يساوي المعامل الرئيس للدالة $f(x)$.

بناء على ما سبق، إذا كانت $p_n(x)$ كثيرة حدود لاغرانج ذات الدرجة n والتي تستكمل الدالة $f(x)$ عند الأعداد المختلفة $x_0,x_1,x_2,\dots,x_n$، فإنه يمكن كتابة $p_n(x)$ بالشكل:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \cdots \\ &\quad \cdots + f[x_0,x_1,\dots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \\ &= f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0,x_1,\dots,x_k](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1}) \qquad (4.16) \end{aligned}$$

والذي يُعرف بصيغة فروق القسمة الاستكمالية لنيوتن. من الواضح أن كتابة كثيرة الحدود $p_n(x)$ بالشكل (4.16) يتطلب معرفة فروق القسمة المشار إليها في هذه المعادلة. الجدول رقم (٤,٢) يوضح كيفية إيجاد فروق القسمة من معلومات مجدولة، والذي يساعد على كتابة المعادلة (4.16).

الجدول رقم (٤,٢). فروق القسمة للدالة $f(x)$.

x	$f(x)$		
x_0	$f[x_0]$		
		$f[x_0,x_1]=\dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$	
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1x_2]=\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$
		$f[x_1,x_2]=\dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$
		$f[x_2,x_3]=\dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4]=\dfrac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

مثال (٤,٥)

استخدم صيغة فروق القسمة لنيوتن (4.16) لإيجاد كثيرة الحدود التكعيبية $p_3(x)$ والتي توافق الدالة $f(x)$ عند القيم $f(1)=3$ ، $f(1.2)=2.5$ ، $f(1.6)=1.8$ و $f(2)=1.2$. ثم استخدمها لحساب قيمة تقريبية للدالة $f(x)$ عند $x=1.3$.

بداية نكتب جدول فروق القسمة لهذه المسألة، حيث إنه يكون لدينا القيم الموجودة في الجدول رقم (٤,٣). وباستخدام صيغة فروق القسمة لنيوتن (4.16) مع $n=3$ نحصل على:

$$\begin{aligned} p_3(x) &= f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\ &\quad + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &= 3 - 2.5(x-1) + 1.25(x-1)(x-1.2) - 0.9375(x-1)(x-1.2)(x-1.6) \end{aligned}$$

وللحصول على قيمة تقريبية لـ $f(1.3)$ نضع $x=1.3$ في $p_n(x)$ حيث يكون لدينا:

$$\begin{aligned} p_3(1.3) &= 3 - 2.5(0.3) + 1.25(0.3)(0.1) - 0.9375(0.3)(0.1)(-0.3) \\ &= 2.2959 \end{aligned}$$

الجدول رقم (٤,٣). فروق القسمة للمثال (٤,٥).

x	$f(x)$			
1	3			
		$\frac{2.5\text{-}3}{1.2\text{-}1}=-2.5$		
1.2	2.5		$\frac{-1.75+2.5}{1.6\text{-}1}=1.25$	
		$\frac{1.8\text{-}2.5}{1.6\text{-}1.2}=-1.75$		$\frac{0.3125\text{-}1.25}{2\text{-}1}=-0.9375$
1.6	1.8		$\frac{-1.5+1.75}{2\text{-}1.2}=0.3125$	
		$\frac{1.2\text{-}1.8}{2.\text{-}16}=-1.5$		
2.0	1.2			

سبق أن ذكرنا بأن فرق القسمة الأول يساوي تفاضل الدالة الأول عند عدد ما c. في الواقع يمكن إيجاد العلاقة بين فروق القسمة ذات رتب معينة مع تفاضلات الدالة ذات نفس الرتب. هذا ما تستعرضه النظرية (٤,٤).

نظرية (٤,٤)

لتكن $n \geq 1$ ولنفترض أن الدالة $f(x)$ ذات تفاضلات متصلة عددها n على الفترة $[a,b]$. ولتكن الأعداد المختلفة $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ والتي عددها $n+1$ موجودة في الفترة $[a,b]$. فإنه يوجد عدد η في الفترة (a,b) بحيث إن

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\eta)}{n!} \tag{4.17}$$

البرهان:

لتكن $p_n(x)$ كثيرة الحدود الاستكمالية ذات الدرجة n والمعرفة في المعادلة (4.16) والتي تستكمل الدالة $f(x)$ عند الأعداد المختلفة $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. لنعرّف الدالة $g(x) = f(x) - p_n(x)$. بما أن $f(x_i) = p_n(x_i)$ من أجل $i = 0,1,2,\dots,n$، فإن $g(x_i) = 0$ من أجل $i = 0,1,2,\dots,n$. إذن حسب نظرية رولز فإنه يوجد عدد $\eta \in (a,b)$ بحيث إن $g^{(n)}(\eta) = 0$. وهذا يؤدي إلى أن:

$$g^{(n)}(\eta) = f^{(n)}(\eta) - p_n^{(n)}(\eta) = 0$$

الآن بما أن $p_n(x)$ كثيرة حدود ذات الدرجة n فإن:

$$p_n^{(n)}(x) = n!\, f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

ومنه نحصل على المطلوب.

في الواقع، إذا كانت $p_n(x)$ كثيرة حدود لاغرانج مكتوبة بشكل فروق القسمة (4.16) فإنه يمكن استخدام النظريتين (٤,٣) و (٤,٤) لإثبات أن:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \tag{4.18}$$

تستعرض الخوارزمية (٤,٢) كيفية حساب فروق القسمة والمعطاة في التعريف (٤,١) للأعداد المختلفة $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$، كما تحسب قيمة $p_n(x)$ عند

$x = c$، حيث إن c عدد ثابت وذلك باستخدام (4.16). نشير إلى إن الخطوات من ١ إلى ٤ تحسب فروق القسمة وأن الخطوتين ٥ و ٦ تحسب قيمة كثيرة الحدود $p_n(x)$ عندما $x = c$. كما نذكر هنا إلى أنه يمكن إضافة خطوة أخيرة لحساب الخطأ المضبوط $|f(c) - p(c)|$ إذا كانت القيمة $f(c)$ معلومة.

خوارزمية (٤,٢): فروق القسمة

تحسب هذه الخوارزمية فروق القسمة d_j من أجل $j = 0,1,2,\dots,n$ باستخدام (4.16) ومن ثم تحسب $pc = p(c)$ من أجل عدد ثابت معطى c.

المدخلات: العدد الصحيح الموجب n (لاحظ أن عدد النقاط $n+1$)، القيم x_i و $f(x_i)$ من أجل $i = 0,1,2,\dots,n$ وكذلك العدد الثابت c.

المخرجات: فروق القسمة d_j من أجل $j = 0,1,2,\dots,n$ و القيمة العددية pc.

الخطوة ١: أدخل n، x_i و y_i من أجل $i = 0,1,2,\dots,n$.

الخطوة ٢: من أجل $i = 0,1,2,\dots,n$ ضع $d_i = y_i$.

الخطوة ٣: من أجل $i = 1,2,\dots,n$ اعمل الخطوة ٤

الخطوة ٤: من أجل $j = n, n-1,\dots,i+1,i$ ضع $d_j = \dfrac{d_j - d_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}$.

الخطوة ٥: ضع $pc = d_n$

الخطوة ٦: من أجل $i = n-1, n-2,\dots,1,0$ احسب $px = d_i + (c - x_i)pc$.

الخطوة ٧: اطبع d_i من أجل $i = 0,1,2,\dots,n$.

الخطوة ٨: اطبع c و pc.

(٤,٤) طرائق الفترات المتساوية

Equally Spaced Intervals

إذا كانت المسافات بين الأعداد المختلفة $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ متساوية، فإنه يمكن تبسيط الصيغة (4.16). سوف ندرس في هذا البند بعض الصيغ المبسطة والتي سنحتاجها في الفصل الخامس عندما نناقش التفاضل والتكامل العددي.

لنفترض أن الأعداد المختلفة $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ مرتبة تصاعدياً ومعرفة بالتالي:

$$x_i = x_0 + ih \quad ، \quad i = 0,1,2,\ldots,n \quad و \quad h = \frac{x_n - x_0}{n}.$$

بوضع $s = \frac{x - x_0}{h}$ فإننا نحصل على $x - x_i = (s-i)h$ من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n$.

باستخدام هذه الرموز فإنه يمكن كتابة صيغة نيوتن الاستكمالية (4.16) بالشكل:

$$\begin{aligned} p_n(x) = p_n(x_0 + sh) &= f[x_0] + shf[x_0, x_1] + s(s-1)h^2 f[x_0, x_1, x_2] \\ &\quad + \cdots + s(s-1)(s-2)\cdots(s-n+1)h^n f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \\ &= f[x_0] + \sum_{i=1}^{n} s(s-1)\cdots(s-i+1)h^i f[x_0, x_1, \ldots, x_i] \end{aligned} \tag{4.19}$$

تسمى هذه المعادلة صيغة فروق القسمة الأمامية لنيوتن. في الواقع يمكن كتابة المعادلة (4.19) بشكل مبسط وذلك باستخدام الفروق الأمامية والمعرّفة بالتالي:

١- الفرق الأمامي ذو الرتبة الأولى هو:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

٢- الفرق الأمامي ذو الرتبة الثانية معرّف بـ:

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(x) &= \Delta(\Delta f(x)) \\ &= \Delta(f(x+h) - f(x)) \\ &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) \end{aligned}$$

٣- وبشكل عام، يمكن إثبات أن الفرق الأمامي ذو الرتبة $n \geq 1$ يأخذ الشكل:

$$\Delta^n f(x)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i f(x+(n-i)h) \tag{4.20}$$

الآن يمكن كتابة فروق القسمة المعرّفة في البند (٤,٣) باستخدام الفروق الأمامية كما يلي:

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\Delta f(x_0)}{h}$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=\frac{\frac{\Delta f(x_1)}{h}-\frac{\Delta f(x_0)}{h}}{2h}$$

$$=\frac{\Delta(f(x_0+h)-f(x_0))}{2h^2}=\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2h^2}$$

وبشكل عام يكون لدينا:

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n} \tag{4.21}$$

وباستخدام هذه الصيغ لفروق القسمة يمكن كتابة كثيرة الحدود المعرفة بالمعادلة (4.19) بالشكل المبسط:

$$p_n(x)=p_n(x_0+sh)=f[x_0]+\sum_{i=1}^{n}\frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-i+1)}{i!}\Delta^i f(x_0) \tag{4.22}$$

تسمى هذه المعادلة بصيغة الفروق الأمامية لنيوتن والتي يمكن كتابتها بالشكل:

$$p_n(x)=p_n(x_0+sh)=\sum_{i=0}^{n}\binom{s}{i}\Delta^i f(x_0) \tag{4.23}$$

حيث إن:

$$\binom{s}{i}=\begin{cases}1, & i=0\\ \dfrac{s(s-1)\cdots(s-i+1)}{i!}, & i\neq 0\end{cases} \tag{4.24}$$

يتضح من المعادلة (4.22) أنه لم تعد هناك حاجة لحساب جدول فروق القسمة. بالمقابل، فإن هذه المعادلة تتطلب حساب جدول الفروق (الجدول رقم ٤,٤) والذي لا يحتاج إلى عمليات قسمة.

الجدول رقم (٤,٤). الفروق الأمامية للدالة $f(x)$.

x_i	$f(x_i)$			
x_0	$f(x_0)$			
		$\Delta f(x_0)$		
x_1	$f(x_1)$		$\Delta^2 f(x_0)$	
		$\Delta f(x_1)$		$\Delta^3 f(x_0)$
x_2	$f(x_2)$		$\Delta^2 f(x_1)$	
		$\Delta f(x_2)$		
x_3	$f(x_3)$			

يستعرض المثال (٤,٦) كيفية استخدام الصيغ (4.19) و (4.22) لكتابة كثيرة حدود استكمالية تستكمل الدالة $f(x)$ عند الأعداد المختلفة $x_i = x_0 + ih$ من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n$.

مثال (٤,٦)

اعتبر الدالة $f(x) = \sinh x$ عند الأعداد $x_i = 1 + 0.2i$ من أجل $i = 0,1,2,3$. سوف نستخدم الصيغتين (4.19) و (4.22) لكتابة كثيرة الحدود الاستكمالية $p_3(x)$ والتي تستكمل الدالة $f(x) = \sinh x$ عند الأعداد المذكورة ثم نستخدمها لحساب قيمة تقريبية لـ $f(1.1)$.

لاستخدام الصيغة (4.19) نحسب أولاً فروق القسمة للدالة $f(x)=\sinh x$ كما هو موضحة في الجدول رقم (٤،٥).

الجدول رقم (٤،٥) فروق القسمة للدالة $f(x)=\sinh x$.

x	$f(x)$			
1	1.17520			
		1.6713		
1.2	1.50946		0.75725	
		1.9742		0.33017
1.4	1.90430		0.95535	
		2.35634		
1.6	2.37557			

وحيث إن $h=0.2$ فإننا نجد أن:

$$p_3(x)=p_3(1+0.2s)=1.17520+0.2(1.6713)s+(0.2)^2(0.75725)s(s-1)$$
$$+(0.2)^3(0.33017)s(s-1)(s-2)$$

و لحساب قيمة تقريبية لـ $f(1.1)$ ، فإنه يكون لدينا $s=\dfrac{1.1-1}{0.2}=0.5$ و

$$p_3(1.1)=1.17520+0.2(1.6713)0.5+(0.2)^2(0.75725)0.5(-0.5)$$
$$+(0.2)^3(0.33017)0.5(-0.5)(-1.5)$$
$$=1.33574$$

وبما أن $f(1.1)=1.33565$ فإن الخطأ المضبوط المتعلق بهذا التقريب هو $|f(1.1)-p_3(1.1)|=9\times10^{-5}$.

من ناحية أخرى، لاستخدام صيغة الفروق الأمامية لنيوتن (4.22) فإننا نوجد قيم الفروق الأمامية للدالة $f(x)=\sinh x$ والموضحة في الجدول رقم (٤،٦) ثم نستخدمها في الصيغة (4.22) للحصول على:

$$p_3(x) = p_3(1+0.2s) = 1.17520 + 0.33426s + 0.06058\frac{s(s-1)}{2!} + 0.01585\frac{s(s-1)(s-2)}{3!}$$

وبوضع $s = 0.5$ نحصل على $p_3(1.1) = 1.33572$ وهي القيمة التقريبية لـ $f(1.1)$. الخطأ المضبوط المرافق لهذا التقريب هو $|f(1.1) - p_3(1.1)| = 7\times10^{-5}$. نشير هنا إلى أن الاختلاف البسيط في قيم الأخطاء المتعلقة بالصيغتين ناتج عن تأثير أخطاء التدوير الحسابية. يمكن حساب حداً أعلى للخطأ باستخدام المعادلة (4.18) حيث حصلنا على $|f(1.1) - p_3(1.1)| \le 1.5\times10^{-4}$.

الجدول رقم (٤,٦). الفروق الأمامية للدالة $f(x) = \sinh x$.

x	$f(x)$			
1	1.17520			
		0.33426		
1.2	1.50946		0.06058	
		0.39484		0.01585
1.4	1.90430		0.07643	
		0.47127		
1.6	2.37557			

الآن، وبشكل مشابه، يمكن استنتاج صيغ نيوتن الخلفية. إذا افترضنا أنه قد تم ترتيب أعداد الاستكمال بشكل تنازلي، أي أن $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1, x_0$ ، فإن كثيرة الحدود الاستكمالية $p_n(x)$ تأخذ الشكل:

(4.25)

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f[x_n] + f[x_{n-1}, x_n](x - x_n) + f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots \\ &\cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1})\cdots(x - x_1) \end{aligned}$$

وإذا كان $x_i = x_0 + ih$ من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n$ و $s = \dfrac{x - x_n}{h}$ حيث إن h كما هي معرفة سابقاً، فإننا نحصل على $x - x_i = (s + n - i)h$ من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n$. وبالتعويض في (4.25) يكون لدينا صيغة فروق القسمة الخلفية لنيوتن والتي يمكن كتابتها بالشكل:

(4.26)

$$\begin{aligned}
p_n(x) = p_n(x_n + sh) &= f[x_n] + shf[x_{n-1}, x_n] + s(s+1)h^2 f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] + \\
&\quad \cdots + s(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)h^n f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \\
&= f[x_n] + \sum_{i=1}^{n} s(s+1)\cdots(s+i-1)h^i f[x_{n-i}, \ldots, x_i]
\end{aligned}$$

كذلك يمكن كتابة الصيغة (4.26) بشكل مبسط وذلك باستخدام الفروق الخلفية والمعرفة بالتالي:

١- الفرق الخلفي ذو الرتبة الأولى هو:

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x - h)$$

٢- الفرق الخلفي ذو الرتبة الثانية معرّف بـ:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f(x) &= \nabla(\nabla f(x)) \\
&= \nabla(f(x) - f(x - h)) \\
&= f(x) - 2f(x - h) + f(x - 2h)
\end{aligned}$$

٣- بشكل عام فإنه من أجل $i \geq 2$ يكون لدينا $\nabla^i f(x) = \nabla^{i-1}(\nabla f(x))$.

وباستخدام هذا التعريف نحصل على:

$$f[x_{n-1}, x_n] = \frac{1}{h}\nabla f(x_n)$$

$$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] = \frac{1}{2h^2}\nabla^2 f(x_n)$$

وبشكل عام من أجل $i \geq 1$ يكون لدينا:

$$f[x_{n-i},\ldots,x_n] = \frac{1}{i!\,h^i}\nabla^i f(x_n)$$

بناء على ذلك، يمكن كتابة (4.26) بالشكل المبسط:

$$p_n(x) = p_n(x_n + sh) = f[x_n] + \sum_{i=1}^{n} \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+i-1)}{i!}\nabla^i f(x_n) \tag{4.27}$$

وباستخدام العلاقة (4.24) يمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل:

$$p_n(x) = p_n(x_n + sh) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{-s}{i} \nabla^i f(x_n) \tag{4.28}$$

تسمى المعادلة (4.28) (أو (4.27)) صيغة الفروق الخلفية لنيوتن الاستكمالية. الجدول رقم (٤،٧) يتضمن الفروق الخلفية للدالة $f(x)$ بالنسبة للأعداد $x_0, x_1, x_2, \ldots$.

الجدول رقم (٤،٧). الفروق الخلفية للدالة $f(x)$.

x_i	$f(x_i)$			
x_0	$f(x_0)$			
		$\nabla f(x_0)$		
x_1	$f(x_1)$		$\nabla^2 f(x_0)$	
		$\nabla f(x_1)$		$\nabla^3 f(x_3)$
x_2	$f(x_2)$		$\nabla^2 f(x_1)$	
		$\nabla f(x_2)$		
x_3	$f(x_3)$			

مثال (٤،٧)

اعتبر الدالة $f(x) = \sinh x$ عند الأعداد $x_i = 1 + 0.2i$ من أجل $i = 0,1,2,3$. سوف نستخدم الصيغتين (4.26) و (4.28) لكتابة كثيرة الحدود

الاستكمالية $p_3(x)$ والتي تستكمل الدالة $f(x)=\sinh x$ عند الأعداد المذكورة ثم نستخدمها لحساب قيمة تقريبية لـ $f(1.5)$.

بداية نلاحظ أنه من أجل استخدام العلاقة (4.26) فإننا نحتاج إلى فروق القسمة للدالة $f(x)=\sinh x$ عند الأعداد $x_i=1+0.2i$ ، $i=0,1,2,3$. هذه المعلومات موجودة في الجدول (٤,٤). إذن يكون لدينا كثيرة الحدود:

$$p_3(x)=p_3(1.6+0.2s)=2.37557+0.2(2.35634)s+(0.2)^2(0.95535)s(s+1)$$
$$+(0.2)^3(0.33017)s(s+1)(s+2)$$

وبوضع $x=1.5$ نحصل على $p_3(1.5)=2.129392$ وهو التقريب المطلوب لـ $f(1.5)$. نشير هنا إلى أنه عندما وضعنا $x=1.5$ فإنه أصبح لدينا $s=-\frac{1}{2}$.

من ناحية أخرى، فإنه لاستخدام الصيغة (4.28) يتوجب علينا حساب جدول الفروق الخلفية للدالة $f(x)=\sinh x$ عند الأعداد المعطاة. الجدول رقم (٤,٨) يتضمن هذه الفروق.

الجدول رقم (٤,٨). الفروق الخلفية للدالة $f(x)=\sinh x$.

x	$f(x)$			
1	1.17520			
		0.33426		
1.2	1.50946		0.06058	
		0.39484		0.01585
1.4	1.90430		0.07643	
		0.47127		
1.6	2.37557			

يتضح من الجدولين رقمي (٤,٦ و ٤,٨) أن الفروق الأمامية والخلفية للدالة $f(x) = \sinh x$ بالنسبة للأعداد $x_i = 1 + 0.2i$ ، $i = 0,1,2,3$ متساوية. وهذا صحيح بشكل عام، انظر تعريفي الفروق الأمامية والخلفية. الآن باستخدام الصيغة (4.28) يكون لدينا:

$$p_3(x) = p_3(1.6 + 0.2s) = 2.37557 + 0.47127s + 0.07643\frac{s(s+1)}{2!} + 0.01585\frac{s(s+1)(s+2)}{3!}$$

وبوضع $s = -\frac{1}{2}$ نحصل على $p_3(1.5) = 2.129391$ وهي قيمة تقريبية لـ $f(1.5)$. كما هو بالنسبة للمثال (٤,٦) فإنه يمكن حساب الأخطاء المضبوطة وحداً أعلى للخطأ ولكننا نترك ذلك للقارئ.

(٤,٥) استكمال هيرميت

Hermite Interpolation

درسنا في البنود السابقة استكمال دالة $f(x)$ عندما تكون قيمها عند الأعداد المختلفة $x_0, x_1, \ldots, x_n$ معلومة. هناك حالات يكون فيها قيم التفاضل الأول للدالة $f(x)$ عند هذه الأعداد معلومة أيضاً. في مثل هذه الحالات نحن نريد إيجاد كثيرة حدود استكمالية $p(x)$ بحيث إن $p(x_i) = f(x_i)$ و $p'(x_i) = f'(x_i)$ من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n$.

بداية لنفترض أن الدالة $f(x)$ و تفاضلها الأول $f'(x)$ معرّفة عند الأعداد الثلاثة المختلفة x_0، x_1 و x_2، ونريد إيجاد كثيرة حدود $p(x)$ بحيث إن $p(x_i) = f(x_i)$ و $p'(x_i) = f'(x_i)$ ، من أجل $i = 0,1,2$. هذا يعني أننا نريد كثيرة حدود ذات الدرجة الخامسة. لنكتب كثيرة الحدود $p(x)$ بالشكل:

$$\begin{aligned} p_5(x) &= f(x_0)H_0(x) + f(x_1)H_1(x) + f(x_2)H_2(x) \\ &+ f'(x_0)\hat{H}_0(x) + f'(x_1)\hat{H}_1(x) + f'(x_2)\hat{H}_2(x) \end{aligned} \tag{4.29}$$

حيث إن $H_i(x)$ و $\hat{H}_i(x)$، من أجل $i = 0,1,2$ عبارة عن كثيرات حدود ذات الدرجة الخامسة والتي يجب إيجادها بحيث إن $p_5(x_i) = f(x_i)$ و $p_5'(x_i) = f'(x_i)$ من أجل $i = 0,1,2$. تسمى $H_i(x)$ و $\hat{H}_i(x)$ كثيرات حدود هيرميت.

الآن بوضع $x = x_0$ في المعادلة (4.29) يكون لدينا:

$$\begin{aligned} p_5(x_0) &= f(x_0)H_0(x_0) + f(x_1)H_1(x_0) + f(x_2)H_2(x_0) \\ &+ f'(x_0)\hat{H}_0(x_0) + f'(x_1)\hat{H}_1(x_0) + f'(x_2)\hat{H}_2(x_0) \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

إذا كان:

$$H_0(x_0) = 1 \tag{4.30}$$

و

$$H_1(x_0) = H_2(x_0) = \hat{H}_0(x_0) = \hat{H}_1(x_0) = \hat{H}_2(x_0) = 0$$

وباشتقاق المعادلة (4.29) بالنسبة لـ x نحصل على:

$$\begin{aligned} p_5'(x) &= f(x_0)H_0'(x) + f(x_1)H_1'(x) + f(x_2)H_2'(x) \\ &+ f'(x_0)\hat{H}_0'(x) + f'(x_1)\hat{H}_1'(x) + f'(x_2)\hat{H}_2'(x) \end{aligned} \tag{4.31}$$

وبوضع $x = x_0$ في المعادلة الأخيرة يكون لدينا:

$$\begin{aligned} p_5'(x_0) &= f(x_0)H_0'(x_0) + f(x_1)H_1'(x_0) + f(x_2)H_2'(x_0) \\ &+ f'(x_0)\hat{H}_0'(x_0) + f'(x_1)\hat{H}_1'(x_0) + f'(x_2)\hat{H}_2'(x_0) \\ &= f'(x_0) \end{aligned}$$

إذا كان:

$$\hat{H}_0'(x_0) = 1 \tag{4.32}$$

و

$$H_0'(x_0) = H_1'(x_0) = H_2'(x_0) = \hat{H}_1'(x_0) = \hat{H}_2'(x_0) = 0$$

ويشكل مشابه فإن المعطيات $p_5(x_i)=f(x_i)$ و $p_5'(x_i)=f'(x_i)$ من أجل $i=1,2$ تؤدي إلى شروط أخرى مشابهة للشروط (4.30) و (4.32)، (انظر التمارين). من هذه الشروط نلاحظ أن:

$$H_0(x_1)=H_0'(x_1)=H_0(x_2)=H_0'(x_2)=0 \text{ ، } H_0(x_0)=1 \text{ و } H_0'(x_0)=0 \tag{4.33}$$

نحن نريد كتابة كثيرة الحدود $H_0(x)$ بحيث إن الشروط الموجودة في المعادلة (4.33) تكون متحققة. بما أن $H_0(x_1)=H_0'(x_1)=0$ فإنه يمكن كتابة $H_0(x)=(x-x_1)^2q(x)$ حيث إن $q(x)$ كثيرة حدود سيتم إيجادها. أيضاً، لكي تحقق $H_0(x)$ الشرط $H_0(x_2)=H_0'(x_2)=0$ يجب أن تكون بالشكل: $H_0(x)=(x-x_1)^2(x-x_2)^2q_1(x)$، حيث إن $q_1(x)$ سيتم إيجادها. نحن نعلم أن:

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

وبما أن $H_0(x)$ كثيرة حدود ذات الدرجة الخامسة، فإنه يمكن كتابة:

$$H_0(x)=(ax+b)L_0^2(x) \tag{4.34}$$

حيث إن a و b ثوابت يتم إيجادها بحيث إن $H_0(x_0)=1$ و $H_0'(x_0)=0$. الآن بوضع $x=x_0$ في المعادلة (4.34) نحصل على $H_0(x_0)=(ax_0+b)L_0^2(x_0)$ و بما أن $L_0(x_0)=1$ يكون لدينا

$$ax_0+b=1 \tag{4.35}$$

وباشتقاق المعادلة (4.34) بالنسبة لـ x نحصل على:

$$H_0'(x)=2(ax+b)L_0(x)L_0'(x)+aL_0^2(x)$$

وبوضع $x=x_0$ يكون لدينا:

$$H_0'(x_0)=2(ax_0+b)L_0(x_0)L_0'(x_0)+aL_0^2(x_0) \tag{4.36}$$

وباستخدام المعادلة (4.35)، $L_0(x_0)=1$ و $H_0'(x_0)=0$ في المعادلة (4.36) نحصل على:

$$a+2L_0'(x_0)=0 \tag{4.37}$$

وبحل المعادلتين (4.35) و (4.37) بالنسبة للمجهولين a و b وتعويض قيمهما في المعادلة (4.34) يكون لدينا:

$$H_0(x)=[1-2(x-x_0)L_0'(x_0)]L_0^2(x) \tag{4.38}$$

ويشكل مشابه يمكن إثبات أن (انظر التمارين):

$$H_1(x)=[1-2(x-x_1)L_1'(x_1)]L_1^2(x) \tag{4.39}$$

و

$$H_2(x)=[1-2(x-x_2)L_2'(x_2)]L_2^2(x) \tag{4.40}$$

من ناحية أخرى، فإنه بالنسبة لكثيرة الحدود $\hat{H}_0(x)$ ذات الدرجة الخامسة يكون لدينا:

$$\hat{H}_0'(x_0)=1 \tag{4.41}$$

و $\hat{H}_0(x_0)=\hat{H}_0(x_1)=\hat{H}_0'(x_1)=\hat{H}_0(x_2)=\hat{H}_0'(x_2)=0$

وبالتالي يمكن كتابة:

$$\hat{H}_0(x)=(cx+d)L_0^2(x) \tag{4.42}$$

حيث إن c و d ثوابت سيتم إيجادها بحيث يتحقق أن $\hat{H}_0(x_0)=0$ و $\hat{H}_0'(x_0)=1$. كما سبق، انظر التمارين، يمكن إيجاد قيم هذين الثابتين وكتابة:

$$\hat{H}_0(x)=(x-x_0)L_0^2(x) \tag{4.43}$$

و بشكل مشابه نحصل على:

$$\hat{H}_1(x)=(x-x_1)L_1^2(x) \tag{4.44}$$

و

$$\hat{H}_2(x)=(x-x_2)L_2^2(x) \tag{4.45}$$

ونترك للقارئ إيجاد المعادلتين (4.44) و (4.45).

وبتعويض المعادلات (4.38) – (4.40) و (4.43) – (4.45) في المعادلة (4.29) نحصل على:

$$p_5(x)=\sum_{i=0}^{2}\{f(x_i)[1-2(x-x_i)L_i'(x_i)]+f'(x_i)(x-x_i)\}L_i^2(x) \qquad (4.46)$$

وبما أن كثيرة الحدود $p_5(x)$ هي ذات درجة خامسة فإن الخطأ المرافق لها يكون بالشكل:

$$e(x)=\frac{1}{6!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2(x-x_2)^2 f^{(6)}(\xi) \qquad (4.47)$$

حيث إن ξ تقع بين x_0 و x_2 وذلك باعتبار أن $x_0<x_1<x_2$ و $f\in C^6[x_0,x_2]$.

بشكل عام ، إذا كان لدينا الأعداد المختلفة $x_0,x_1,\ldots,x_n$ والتي عددها $n+1$ بحيث إن $x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n$، وأن $f(x)$ و $f'(x)$ معرّفة عند هذه الأعداد، فإنه بشكل مشابه لما سبق يكون لدينا:

$$H_i(x)=[1-2(x-x_i)L_i'(x_i)]L_i^2(x) \quad \text{و} \qquad (4.48)$$

$$\hat{H}_i(x)=(x-x_i)L_i^2(x) \qquad (4.49)$$

من أجل $i=0,1,2,\ldots,n$، و يمكن إثبات أن $H_i(x)$ و $\hat{H}_i(x)$ والمعرفة في (4.48) و (4.49) تحقق الشروط الأربعة:

$$\begin{aligned}
&1)\ H_i(x_k)=\begin{cases}0, & i\neq k\\ 1, & i=k\end{cases} \qquad && 2)\ H_i'(x_k)=0,\quad \forall\ k\\
&3)\ \hat{H}_i(x_k)=0,\quad \forall\ k && 4)\ \hat{H}_i'=\begin{cases}0, & i\neq k\\ 1, & i=k\end{cases}
\end{aligned} \qquad (4.50)$$

وأنه يوجد كثيرة حدود وحيدة ذات الدرجة $2n+1$ على الأكثر والتي يمكن كتابتها بالشكل:

$$p_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}\{f(x_i)[1-2(x-x_i)L_i'(x_i)]+f'(x_i)(x-x_i)\}L_i^2(x) \quad (4.51)$$

وتحقق $p_{2n+1}(x_i)=f(x_i)$ و $p_{2n+1}'(x_i)=f'(x_i)$ من أجل $i=0,1,2,\dots,n$.

كما تنص عليه النظرية التالية:

نظرية (٤,٥)

لتكن $f(x)$ و $f'(x)$ معرفة عند الأعداد المختلفة $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ و أن $f\in C^{2n+2}[a,b]$ ، فإنه يوجد كثيرة حدود وحيدة $p_{2n+1}(x)$ ذات الدرجة $2n+1$ على الأكثر بحيث إن:

$$f(x)=p_{2n+1}(x)+\frac{1}{(2n+2)!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2\cdots(x-x_n)^2 f^{(2n+2)}(\xi) \quad (4.52)$$

حيث إن $\xi\in(a,b)$ و $p_{2n+1}(x)$ كما هي معرفة في المعادلة (4.51).

تتضمن الخوارزمية (٤,٣) الخطوات اللازمة لتنفيذ أسلوب هيرميت لحساب قيمة تقريبية لدالة ما عند عدد معطى.

خوارزمية (٤,٣): كثيرة الحدود هيرميت

إذا كان لدينا القيم $y_i=f(x_i)$ و $dy_i=f'(x_i)$ من أجل $i=0,1,2,\dots,n$ فإن هذه الخوارزمية تحسب قيمة تقريبية لـ $f(c)$ ، حيث إن c ثابت يتم تعيينه، وذلك باستخدام كثيرة الحدود هيرميت.

المدخلات: العدد الصحيح الموجب n (لاحظ أن عدد النقاط $n+1$)، القيم x_i ، $y_i=f(x_i)$ و $dy_i=f'(x_i)$ من أجل $i=0,1,2,\dots,n$ وكذلك العدد الثابت c.

المخرجات: العدد الثابت c والقيمة التقريبية pc لـ $f(c)$.

الخطوة ١: أدخل c ، n ، x_i ، y_i و dy_i من أجل $i=0,1,2,\dots,n$.

الخطوة ٢: ضع $pc = 0$

الخطوة ٣: من أجل $j = 0,1,\ldots,n$ اعمل الخطوات ٤ – ٦

الخطوة ٤: ضع $\text{sum} = 0$

$$t = 1$$

الخطوة ٥: من أجل $i = 0,1,\ldots,n$ و $i \neq j$ اعمل التالي:

ضع $\text{sum} = \text{sum} + \dfrac{1}{x_j - x_i}$

$$t = t * \frac{c - x_i}{x_j - x_i}$$

الخطوة ٦: $pc = pc + \{y_i * [1 - 2*(c - x_j)\text{sum}] + dy_j * (c - x_j)\} t^2$

الخطوة ٧: اطبع c و pc.

مثال (٤,٨)

المعلومات في الجدول التالي للدالة $f(x) = \cosh x$:

x	1.0	1.5
$f(x)$:	1.54308	2.35241
$f'(x)$:	1.17520	2.12928

نريد استخدام كثيرة الحدود هيرميت لكتابة كثيرة الحدود ذات الدرجة الثالثة على الأكثر والتي تحقق $p_3(x_i) = f(x_i)$ و $p_3'(x_i) = f'(x_i)$ من أجل $i = 0,1$. ثم سوف نستخدمها لحساب قيمة تقريبية لـ $f(1.25)$. كذلك سنحسب الخطأ وحداً أعلى له.

بداية نلاحظ أن كثيرة الحدود تأخذ الشكل:

$$p_3(x) = f(x_0)H_0(x) + f(x_1)H_1(x) + f'(x_0)\hat{H}_0(x) + f'(x_1)\hat{H}_1(x) \tag{4.53}$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - 1.5}{1 - 1.5} = -2(x - 1.5)$$

و

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - 1}{1.5 - 1} = 2(x - 1)$$

وبالتالي يكون لدينا $L_0'(x) = -2$ و $L_1'(x) = 2$، وبناء عليه نحصل على:

$$H_0(x) = [1 - 2(x-1)(-2)]L_0^2(x) = 4(4x-3)(x-1.5)^2$$

$$H_1(x) = [1 - 2(x-1.5)(2)]L_1^2(x) = 4(-4x+7)(x-1)^2$$

$$\hat{H}_0(x) = 4(x-1)(x-1.5)^2$$

و

$$\hat{H}_1(x) = 4(x-1.5)(x-1)^2$$

وبالتعويض عن ذلك في المعادلة (5.53) وكذلك عن قيم $f(x_0)$، $f(x_1)$، $f'(x_0)$ و $f'(x_1)$ نحصل على كثيرة الحدود:

$$\begin{aligned} p_3(x) &= 6.17232(4x-3)(x-1.5)^2 + 9.40964(-4x+7)(x-1)^2 \\ &\quad + 4.70008(x-1)(x-1.5)^2 + 8.51712(x-1.5)(x-1)^2 \end{aligned} \tag{4.54}$$

يمكن التأكد بسهولة أن كثيرة الحدود المعرّفة في المعادلة (4.53)هي كثيرة حدود ذات الدرجة الثالثة وأنها تحقق $p_3(1) = 1.54308$ ، $p_3(1.5) = 2.35241$ ، $p_3'(1) = 1.17520$ و $p_3'(1.5) = 2.12928$.

الآن لحساب قيمة تقريبية لـ $f(1.25)$ نضع $x = 1.25$ في المعادلة (4.54) لنحصل على:

$$\begin{aligned} p_3(1.25) &= 6.17232(4\times1.25-3)(1.25-1.5)^2 + 9.40964(-4\times1.25+7)(1.25-1)^2 \\ &\quad + 4.70008(1.25-1)(1.25-1.5)^2 + 8.51712(1.25-1.5)(1.25-1)^2 \\ &= 1.88811 \end{aligned}$$

وبما أن $f(1.25) = \cosh 1.25 = 1.88842$ (صحيحة إلى ستة أرقام عشرية معنوية) فإن الخطأ الفعلي هو $|f(1.25) - p_3(1.25)| = 0.00031$.

لنحسب الآن حداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب $p_3(1.25)$، حيث إنه باستخدام النظرية (٤,٥) يمكن كتابة الحد الأعلى للخطأ بالشكل:

$$|f(1.25) - p_3(1.25)| \le \frac{1}{4!} |(1.25-1)^2 (1.25-1.5)^2| \max_x |f^{(4)}(x)|$$

وبما أن $\max_x |f^{(4)}(x)| = \max_x |\cosh x| = 2.35241$ فإننا نحصل على:

$$|f(1.25) - p_3(1.25)| \le \frac{1}{24} (0.00391)(2.35241) = 0.00038$$

وهو أكبر من الخطأ الفعلي كما هو متوقع.

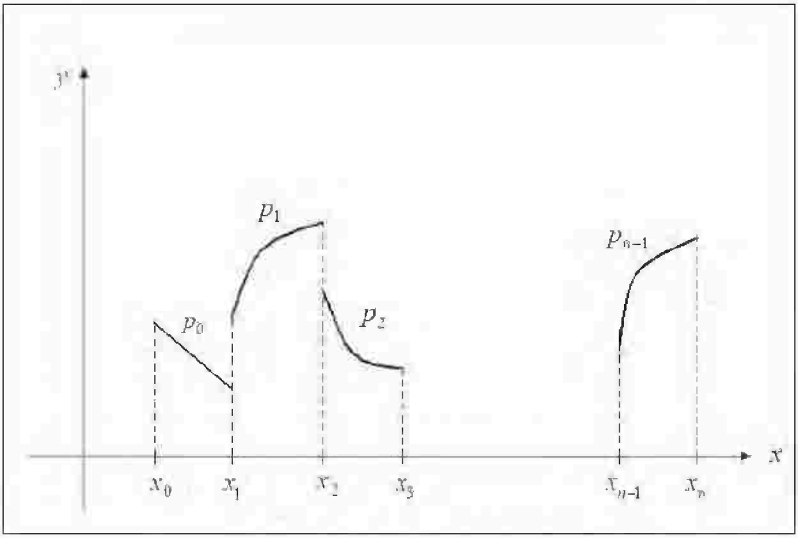
(٤,٦) الاستكمال باستخدام دالة الشريحة

Spline Interpolation

يتضح من البنود السابقة أن درجة كثيرة الحدود الاستكمالية تتزايد مع زيادة عدد نقاط الاستكمال، كما أنه يتم وصف كثيرة الحدود الاستكمالية بدالة واحدة والتي تُقرب كل القيم المجدولة لدالة ما $f(x)$. بناء على ذلك، فإن أي عدم استقرار في جزء صغير من مجال الاستكمال يؤثر وبشكل مباشر على كل المجال. أحد الطرائق المشهورة لمعالجة هذه المشكلة هي تجزئة فترة الاستكمال إلى فترات صغيرة وإيجاد كثيرة حدود مختلفة (ذات درجة أقل) والتي تستكمل القيم المعطى على كل فترة صغيرة. وبالتالي، فإن الدالة التقريبية هي عبارة عن تجميع من دوال كثيرات حدود استكمالية والتي تُقرب أجزاء مختلفة من القيم المعطاة.

ليكن لدينا الفترة $[a,b]$ بحيث إن $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$، ولتكن $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)$ كثيرات حدود من الدرجة m على الأكثر. فإن الدالة $q(x)$ والتي تحقق $q(x) = p_i(x)$ لكل $x \in [x_i, x_{i+1}]$ من أجل

$i = 0,1,2,\ldots,n-1$ تسمى دالة كثيرة حدود تجزيئية ذات الدرجة m على الأكثر على الفترة $[a,b]$. تسمى الأعداد $x_0, x_1,\ldots,x_n$ عُقد الدالة $q(x)$. يوضح الشكل رقم (٤،٤) دالة كثيرة حدود تجزيئية.



الشكل رقم (٤،٤). كثيرة حدود تجزيئية.

من الواضح أن دالة كالتي في الشكل رقم (٤،٤) لا يمكن أن تُقرب دالة متصلة وملساء. بالتالي يكون هناك حاجة لفرض شرطي الاتصال والنعومة (أي أن تكون ملساء) على دالة كثيرة الحدود التجزيئية إذا أردنا الحصول على تقريب مناسب. ولكن هناك حدود لشرط النعومة التي نستطيع فرضها على كثيرة حدود تجزيئية ذات الدرجة m على الأكثر، فمثلاً، لنفترض أننا اعتبرنا الفترة $[0,2]$ وأننا قسمناها إلى الفترتين $[0,1]$ و $[1,2]$. فإن كثيرة الحدود $p_1(x)$ على الفترة $[0,1]$ و $p_2(x)$ على الفترة $[0,2]$ تكونّان دالة كثيرة حدود تجزيئية. لكي تكون هذه الدالة تقريب جيد لدالة ملساء يجب أن يكون لدينا $p_1^{(k)}(1) = p_2^{(k)}(1)$ من أجل $k = 0,1,2,\ldots$. بعبارة أخرى، يجب أن تكون دالة كثيرة الحدود التجزيئية و تفاضلاتها المختلفة متصلة عند

نقطة التلاقي $x=1$. إذا كان كل من $p_1(x)$ و $p_2(x)$ كثيرتي حدود ثابتتين، فإن شرط الاتصال يعني أن تكونان متساويتين (خط مستقيم) على الفترة $[0,2]$. وبشكل مشابه إذا كان $p_1(x)$ و $p_2(x)$ كثيرتي حدود خطيتين فإن شرط الاتصال لكل من $p_i(x)$ و $p_i'(x)$، من أجل $i=0,1$ يؤدي إلى أن دالة كثيرة حدود تجزيئية هي عبارة عن خط مستقيم على الفترة $[0,2]$. بشكل عام، لتكن $p_1(x)$ و $p_2(x)$ كثيرتي حدود من الدرجة m على الأكثر تمثلان جزأين متتاليين من دالة كثيرة حدود تجزيئية عند نقطة التلاقي $x=x^*$. و لنعبّر عنهما بالتعبير التالي:

$$p_1(x)=\sum_{j=0}^{m} a_{1j}(x-x^*)^j$$
$$p_2(x)=\sum_{j=0}^{m} a_{2j}(x-x^*)^j \tag{4.55}$$

إذن لتحقيق العلاقة $p_1(x^*)=p_2(x^*)$ يجب أن يكون لدينا $a_{10}=a_{20}$. كما أن الشرط $p_1'(x^*)=p_2'(x^*)$ سوف يؤدي إلى أن $a_{11}=a_{22}$. وبشكل عام، فإن الشرط $p_1^{(k)}(x^*)=p_2^{(k)}(x^*)$ يعني أن $a_{1k}=a_{2k}$ من أجل $k=0,1,2,\ldots m$. مما سبق ينتج أن $p_1(x)=p_2(x)$ لكل x وأن الدالة الأصلية قد لا تعد دالة تجزيئية. بناء على ذلك، من أجل إنشاء دالة كثيرة حدود تجزيئية مكونة من عدة أجزاء بحيث إن كل جزء منها عبارة عن كثيرة حدود ذات الدرجة m على الأكثر، يتطلب أن تكون ناعمة بالنسبة لتفاضلاتها $m-1$ الأولى. دوال كثيرات الحدود التجزيئية والتي تحقق هذه الشروط تسمى دوال الشرائح.

تعريف (٤,٢)

لتكن $f(x)$ دالة معرفة على الفترة $[a,b]$ وأن $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ ، فإنه يقال إن $s(x)$ هي دالة شريحة

ذات الدرجة m والتي تستكمل الدالة $f(x)$ عند الأعداد $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ إذا كان:

١- $s(x) = p_i(x)$ عبارة عن كثيرة حدود ذات الدرجة m على الأكثر تكون معرفة على الفترة الصغيرة $[x_i, x_{i+1}]$ من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n-1$.

٢- $p_i(x_i) = f(x_i)$ من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n$.

٣- $p_{i-1}^{(k)}(x_i) = p_i^{(k)}(x_i)$ من أجل $i = 1,2,\ldots,n-1$ و $k = 0,1,2,\ldots,m-1$.

يتضح من التعريف (٤,٢) أن دالة الشريحة ذات الدرجة m تحقق الشرط $s(x) \in C^{m-1}[a,b]$. كما نذكر أنه يمكن كتابة دالة الشريحة ذات الدرجة m بالشكل:

$$s(x) = p_i(x) = \sum_{j=0}^{m} a_{ij}(x - x_i)^j \tag{4.56}$$

من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n-1$، حيث إن a_{ij}، $i = 0,1,2,\ldots,n-1$ و $j = 0,1,2,\ldots,m$ ثوابت يتم تعيينها.

مثال (٤,٨)

اعتبر الدالة التالية:

$$s(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [1,2] \\ 4x - 4, & x \in [2,5] \\ x^2 - 6x + 21, & x \in [5,6] \end{cases}$$

للتحقق فيما إذا كانت $s(x)$ دالة شريحة نلاحظ أولاً أن $s(2) = 4$ على يسار ويمين العدد $x = 2$، كما أن $s(5) = 16$ من الجهتين اليسرى واليمنى للعدد $x = 5$. إضافة إلى ذلك، يكون لدينا $s'(2) = 4$ و $s'(5) = 4$ من الجهة اليسرى واليمنى للعددين $x = 2$ و $x = 5$، على الترتيب. إذن، الدالة $s(x)$ هي دالة شريحة ذات الدرجة الثانية على الفترة $[1,6]$.

نشير هنا إلى أن دالة الشريحة الخطية هي أبسط كثيرة حدود تجزيئية والتي نستعرضها فيما يلي:

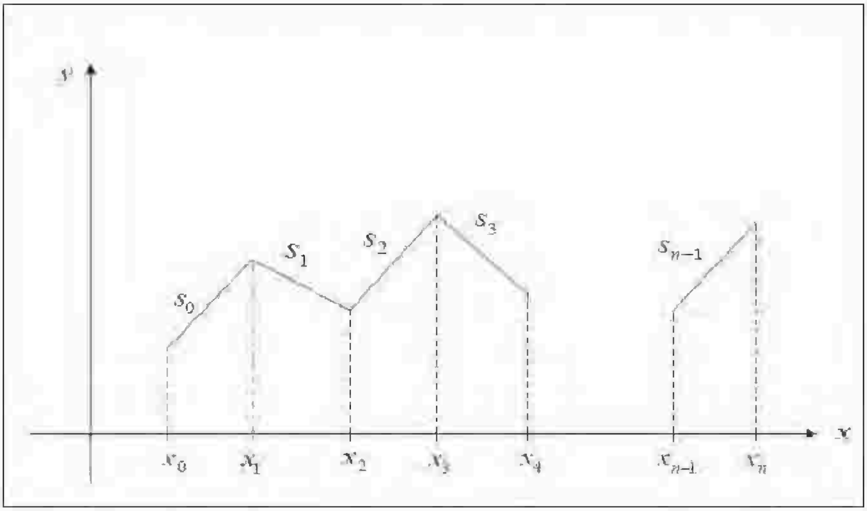
لنعتبر الدالة $f(x)$ معرّفة عند الأعداد المختلفة $x_0, x_1, \ldots, x_n$ وأننا نريد كتابة كثيرة حدود تجزيئية خطية لتقريب هذه الدالة. إذا استخدمنا خط مستقيم على كل فترة صغيرة $[x_i, x_{i+1}]$، $i = 0,1,2,\ldots,n-1$ (الشكل رقم ٤,٥) فإننا نستطيع استكمال الدالة $f(x)$ عند الأعداد المذكورة بواسطة كثيرة حدود تجزيئية ، حيث إن:

$$s(x) = p_i(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} f(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f(x_{i+1})$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل (4.56) كما يلي :

$$s(x) = a_{i0} + a_{i1}(x - x_i) \tag{4.57}$$

حيث إن $a_{i0} = f(x_i)$ و $a_{i1} = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$ من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n-1$.



الشكل رقم (٤,٥). دالة الشريحة الخطية.

يستعرض المثال (٤,٩) استخدام دوال الشريحة الخطية لكتابة كثيرة حدود تجزيئية لتقريب دالة ما على فترة محدودة.

مثال (٤,٩)

اعتبر الدالة $f(x)=\sinh x$ عند الأعداد $x_i=1+0.2i$ من أجل $i=0,1,2,3$. أوجد دالة الشريحة الخطية التي تستكمل هذه الدالة عند الأعداد المذكورة. ثم استخدمها لحساب أفضل قيم تقريبية لـ $\sinh(x)$ عندما $x=1.1$ و $x=1.45$.

بداية نلاحظ أنه لدينا الفترات الصغيرة $[x_0,x_1]$، $[x_1,x_2]$ و $[x_2,x_3]$ حيث إن $x_0=1$، $x_1=1.2$، $x_2=1.4$ و $x_3=1.6$، وبالتالي نحصل على:

$$a_{00}=f(1)=1.17520,\quad a_{10}=f(1.2)=1.50946,\quad a_{20}=f(1.4)=1.90430$$

و

$$a_{01}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{1.50946-1.17520}{1.2-1.0}=1.6713$$

$$a_{11}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{1.90430-1.50946}{1.4-1.2}=1.9742$$

$$a_{21}=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=\frac{2.37557-1.90430}{1.6-1.4}=2.35634$$

وباستخدام العلاقة (4.57) يكون لدينا:

$$s(x)=\begin{cases}1.17520+1.67130(x-1.0), & x\in[1,1.2]\\ 1.50946+1.97420(x-1.2), & x\in[1.2,1.4]\\ 1.90430+2.35634(x-1.4), & x\in[1.4,1.6]\end{cases}$$

الآن بما أن $x=1.1$ تقع في الفترة $[1.0,1.2]$ فإن:

$$\sinh(1.1)\approx s(1.1)=1.17520+1.67130(1.1-1.0)=1.34233$$

وبما أن $x = 1.45$ تقع في الفترة $[1.4,1.6]$ فإن:

$$\sinh(1.45) \approx s(1.45) = 1.90430 + 2.35634(1.45 - 1.4) = 2.02212$$

(٤,٦,١) دالة الشريحة التكعيبية

تعد دالة الشريحة التكعيبية من أشهر دوال الشرائح التي يكاد لا يخلو منها كتاب يناقش دوال الشرائح. لكتابة دالة الشريحة التكعيبية $s(x)$ والتي تستكمل الدالة $f(x)$ عند الأعداد $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$، حيث إن f دالة معرفة على الفترة $[a,b]$، فإنه حسب تعريف (٤,٢) يمكن كتابة $s(x)$ بالشكل:

$$s(x) = p_i(x) = a_{i0} + a_{i1}(x - x_i) + a_{i1}(x - x_i)^2 + a_{i3}(x - x_i)^3 \qquad (4.58)$$

من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n-1$ حيث إن $s \in C^2[a,b]$. هنا a_{i0}، a_{i1}، a_{i2} و a_{i3} من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n-1$ ثوابت يتم تعيينها.

سوف نوجد صيغ للمعاملات a_{i0}، a_{i1}، a_{i2} و a_{i3} الموجودة في العلاقة (4.58) بدلالة f_i ، f_{i+1} ، M_i و M_{i+1} وذلك باستخدام العلاقات التالية:

$$\begin{aligned} p_i(x_i) &= f_i, \qquad & p_i(x_{i+1}) &= f_{i+1} \\ p_i''(x_i) &= M_i, \qquad & p_i''(x_{i+1}) &= M_{i+1} \end{aligned} \qquad (4.59)$$

من العلاقة $p_i''(x_i) = M_i$ نحصل على:

$$2a_{i2} + 6a_{i3}(x_i - x_i) = M_i$$

ومنه يكون لدينا:

$$a_{i2} = \frac{M_i}{2} \qquad (4.60)$$

وباستخدام (4.60) و العلاقة $p_i''(x_{i+1}) = M_{i+1}$ يمكن الحصول على:

$$2a_{i2} + 6a_{i3}(x_{i+1} - x_i) = M_{i+1} \qquad (4.61)$$

وبحل هذه المعادلة بالنسبة لـ a_{i3} نحصل على:

$$a_{i3} = \frac{M_{i+1} - M_i}{6(x_{i+1} - x_i)} \tag{4.61}$$

والمعادلة $p_i(x_i) = f_i$ تعطينا:

$$a_{i0} = f_i \tag{4.62}$$

وأخيراً، من العلاقة $p_i(x_{i+1}) = f_{i+1}$ يكون لدينا:

$$p_i(x_{i+1}) = a_{i0} + a_{i1}(x_{i+1} - x_i) + a_{i2}(x_{i+1} - x_i)^2 + a_{i3}(x_{i+1} - x_i)^3 = f_{i+1}$$

وباستخدام (4.60) – (4.62) تصبح المعادلة الأخيرة بالشكل:

$$f_i + a_{i1}(x_{i+1} - x_i) + \frac{M_i}{2}(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{M_{i+1} - M_i}{6}(x_{i+1} - x_i)^3 = f_{i+1}$$

وبحل هذه المعادلة بالنسبة لـ a_{i1} نحصل على:

$$a_{i1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{1}{6}(x_{i+1} - x_i)(M_{i+1} + 2M_i) \tag{4.63}$$

لاحظ هنا أننا استخدمنا الرمز $f_i = f(x_i)$.

الآن من اتصال التفاضل الأول لدالة الشريحة التكعيبية عند النقطة (x_i, f_i) ينتج أن:

$$p'_{i-1}(x_i) = p'_i(x_i)$$

ومنه يكون لدينا:

$$a_{i-1,1} + 2a_{i-1,2}(x_i - x_{i-1}) + 3a_{i-1,3}(x_i - x_{i-1})^2 = a_{i1}$$

وبالتعويض عن قيم $a_{i-1,1}$، $a_{i-1,2}$ و $a_{i-1,3}$ من العلاقات (4.60 – 4.63) في المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$\frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{1}{6}(x_i - x_{i-1})(M_i - M_{i-1}) + 2\frac{M_{i-1}}{2}(x_i - x_{i-1}) + 3\frac{M_i - M_{i-1}}{6(x_i - x_{i-1})}$$
$$= \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{1}{6}(x_{i+1} - x_i)(M_{i+1} - M_i)$$

و منه يكون لدينا النظام الخطي:

$$\Delta x_{i-1}M_{i-1}+2(\Delta x_{i-1}+\Delta x_i)M_i+\Delta x_iM_{i+1}=6(\frac{\Delta f_i}{\Delta x_i}-\frac{\Delta f_{i-1}}{\Delta x_{i-1}}) \tag{4.64}$$

من أجل $i=1,2,\ldots,n-1$، حيث إن $\Delta x_i = x_{i+1}-x_i$ و $\Delta f_i = f_{i+1}-f_i$.

تشير المعادلة (4.64) إلى أن إيجاد دالة الشريحة التكعيبية $s(x)$ والمعرفة في (4.58) والتي تستكمل الدالة $f(x)$ عند الأعداد المختلفة x_i، $i=0,1,2,\ldots,n$ يعتمد على إيجاد المجاهيل M_i، $i=0,1,2,\ldots,n$ والتي عددها $n+1$. ولكن المعادلة (4.64) عبارة عن نظام خطي يحتوي على معادلات خطية عددها $n-1$ بالنسبة للمجاهيل M_i، $i=0,1,2,\ldots,n$ والتي عددها $n+1$. بناء على ذلك فإننا نحتاج إلى معادلتين إضافيتين حتى نتمكن من حساب جميع المجاهيل. في الواقع يمكن إعطاء هاتين المعادلتين بعدة أساليب، إلا أن الأسلوب المستخدم عادة هو أن نفترض أن دالة الشريحة عبارة عن خط مستقيم خارج الفترة (a,b)، وهذا يعني أن $s''(x)=0$ لكل $x \le a$ و $x \ge b$. إذن يكون لدينا:

$$M_0 = M_n = 0 \tag{4.65}$$

وباستخدام المعادلتين (4.64) و (4.65) نحصل على النظام الخطي ثلاثي الأقطار:

$$
\begin{bmatrix}
2(\Delta x_0+\Delta x_1) & \Delta x_1 & & & \\
\Delta x_1 & 2(\Delta x_1+\Delta x_2) & \Delta x_2 & & \\
 & \Delta x_2 & 2(\Delta x_2+\Delta x_3) & \Delta x_3 & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots \\
 & & & \Delta x_{n-2} & 2(\Delta x_{n-2}+\Delta x_{n-1})
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{bmatrix}
\tag{4.66}
$$

$$
=6\begin{bmatrix} \dfrac{\Delta f_1}{\Delta x_1}-\dfrac{\Delta f_0}{\Delta x_0} \\ \vdots \\ \vdots \\ \dfrac{\Delta f_{n-1}}{\Delta x_{n-1}}-\dfrac{\Delta f_{n-2}}{\Delta x_{n-2}} \end{bmatrix}
$$

بالنسبة للمجاهيل M_i، $i=1,2,\dots,n-1$. من الواضح أن مصفوفة المعاملات للنظام الخطي (4.66) هي مصفوفة ثلاثية الأقطار، متناظرة و قطعية السيطرة. إضافة إلى ذلك، فإن عناصرها القطرية موجبة وبالتالي فإنها غير شاذة. بناء على ذلك فإن للنظام الخطي (4.66) حل وحيد، وهذا يعني أن قيم M_i، $i=1,2,\dots,n-1$ تكون وحيدة. ومن ذلك نستنتج أن دالة الشريحة التكعيبية الاستكمالية تكون موجودة ووحيدة إذا ما تم استخدام الشروط الحدية (4.65). نذكر هنا أن الشروط الحدية (4.65) تسمى الشروط الطبيعية وأن دالة الشريحة الاستكمالية الناتجة من استخدام هذه الشروط تسمى دالة الشريحة التكعيبية الطبيعية. هذه المناقشة تقودنا إلى النظرية التالية:

نظرية (٤,٦)

لتكن $f(x)$ دالة معرفة على الفترة $[a,b]$ وأن $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$، فإنه يوجد دالة شريحة تكعيبية طبيعية وحيدة تستكمل الدالة $f(x)$ عند العقد x_i، $i = 0,1,2,\ldots,n$.

نشير هنا إلى أنه إذا كان $\Delta x_i = h$ من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n$، حيث إن $h \neq 0$ ثابت حقيقي، فإنه يمكن الحصول على دالة الشريحة التكعيبية الطبيعية والتي تستكمل الدالة $f(x)$ عند العقد x_i، $i = 0,1,2,\ldots,n$ بحل النظام الخطي ثلاثي الأقطار:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} f_2 - 2f_1 + f_0 \\ f_3 - 2f_2 + f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2} \end{bmatrix} \tag{4.67}$$

تتضمن الخوارزمية (٤,٤) الخطوات اللازمة لتنفيذ أسلوب الاستكمال باستخدام دالة الشريحة التكعيبية لحساب قيمة تقريبية للدالة $f(x)$ عند العدد الثابت c. نشير هنا إلى أن الخوارزمية تحسب الثوابت a_{i0}، a_{i1}، a_{i2} و a_{i3} لأحد قيم i والمرتبطة بالفترة الصغيرة $[x_i, x_{i+1}]$ التي تحتوي على العدد الثابت c. يمكن تعديل هذه الخوارزمية لحساب هذه الثوابت من أجل $i = 0,1,\ldots,n-1$ وبالتالي يمكن حساب قيم تقريبية لعدة قيم مختلفة للدالة $f(x)$ في فترات صغيرة مختلفة. نترك ذلك للمناقشة في التمارين.

خوارزمية (٤,٤): دالة الشريحة التكعيبية

إذا كان لدينا القيم $y_i = f(x_i)$ من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n$ فإن هذه الخوارزمية تحسب قيمة تقريبية لـ $f(c)$، حيث إن c ثابت يتم تعيينه، وذلك باستخدام الاستكمال الذي يعتمد على دالة الشريحة التكعيبية.

المدخلات: الثابت c، العدد الصحيح الموجب n، القيم x_i، $y_i = f(x_i)$، من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n$ و العدد الحقيقي الموجب h.

المخرجات: العدد الثابت c والقيمة التقريبية pc لـ $f(c)$.

الخطوة ١: أدخل c، h، n، x_i و y_i من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n$.

الخطوة ٢: حل النظام الخطي (4.67) باستخدام الحذف الجاوسي للحصول على قيم M_i، من

أجل $i = 1,2,\ldots,n-1$.

الخطوة ٣: إذا كانت $x_i < c < x_{i+1}$

ضع

$$
\begin{aligned}
a_{i0} &= y_i \\
a_{i1} &= \frac{1}{h}(y_{i+1} - y_i) - \frac{h}{6}(M_{i+1} + 2M_i) \\
a_{i2} &= \frac{1}{2}M_i \\
a_{i3} &= \frac{1}{6h}(M_{i+1} - M_i)
\end{aligned}
$$

الخطوة ٤: احسب

$$pc = a_{i0} + a_{i1}(c - x_j) + a_{i2}(c - x_j)^2 + a_{i3}(c - x_i)^3$$

الخطوة ٥: اطبع c و pc.

المثال (٤,١٠) يستعرض كيفية استخدام دالة الشريحة التكعيبية الطبيعية لاستكمال دالة ما عند أعداد مختلفة تكون المسافات فيما بينها متساوية.

مثال (٤,١٠)

اعتبر الدالة $f(x)=\sinh x$ عند الأعداد $x_i=1+0.2i$ من أجل $i=0,1,2,3$. أوجد دالة الشريحة التكعيبية الطبيعية التي تستكمل هذه الدالة عند الأعداد المذكورة. ثم استخدمها لحساب أفضل قيم تقريبية لـ $\sinh(x)$ عندما $x=1.1$ و $x=1.45$.

بداية نلاحظ أن $h=0.2$ و $M_0=M_3=0$ وأنه يكون لدينا:

$$\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_1\\ M_2\end{bmatrix}=\frac{6}{0.2^2}\begin{bmatrix}f_2-2f_1+f_0\\ f_3-2f_2+f_1\end{bmatrix}$$

ومنه نحصل على النظام الخطي:

$$\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_1\\ M_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9.087\\ 11.4645\end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة الحذف الجاوسي يصبح هذا النظام بالشكل:

$$\begin{bmatrix}4 & 1\\ 0 & 3.75\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_1\\ M_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9.087\\ 9.19375\end{bmatrix}$$

وبالتعويض الخلفي نحصل على:

$$M_2=\frac{9.19275}{3.75}=2.4514 \quad \text{و} \quad M_1=\frac{1}{4}[9.087-M_2]=1.6589.$$

وباستخدام العلاقات (4.60 – 4.63) يتم الحصول على قيم المعاملات a_{i0}، a_{i1}، a_{i2} و a_{i3}، من أجل $i=0,1,2$. وبالتالي يكون لدينا دالة الشريحة التكعيبية الطبيعية:

$$s(x)=\begin{cases} p_0(x)=1.1752+1.616(x-1)+1.3824(x-1)^3, & \\ & x\in[1,1.2] \\ p_1(x)=1.5095+1.7819(x-1.2)+0.8295(x-1.2)^2 & \\ \qquad -0.6604(x-1.2)^3, & x\in[1.2,1.4] \\ p_2(x)=1.9043+2.1929(x-1.4)+1.226(x-1.4)^2 & \\ \qquad -2.0428(x-1.4)^3, & x\in[1.4,1.6] \end{cases}$$

وبما أن $x=1.1$ و $x=1.45$ تقعان في الفترتين $[1,1.2]$ و $[1.4,1.6]$، على الترتيب، فإنه يكون لدينا:

$$f(1.1)\approx p_0(1.1)=1.1752+1.616(0.1)+1.3824(0.1)^3=1.33818$$

و

$$f(1.45)\approx p_2(1.45)=1.9043+2.1929(0.05)+1.226(0.05)^2-2.0428(0.05)^3=2.01675$$

وبالتالي فإن القيمة المطلقة للخطأ المرافق للتقريب $p_0(1.1)$ هي 0.00253 وتلك للخطأ المرافق للتقريب $p_2(1.45)$ هي 0.00248.

(٤,٦,٢) دالة الشريحة الخماسية

لدراسة دالة الشريحة الخماسية سوف نعتبر الدالة $f(x)$ والمعرفة على الفترة $[a,b]$ بحيث إن $x_i=a+ih$ من أجل $i=0,1,2,\ldots,n$، $h=\dfrac{b-a}{n}$ و n عدد صحيح موجب. وبالتالي فإنه يكون لدينا $x_0=a$ و $x_n=b$. نشير هنا أن النتائج التي نتوصل إليها هنا تكون صحيحة في الحالة التي تكون المسافات بين الأعداد $x_0,x_1,\ldots,x_n$ غير متساوية.

بداية يمكن استخدام التعريف (٤,٢) لكتابة دالة الشريحة الخماسية بالشكل:

$$\begin{aligned} s(x)&=p_i(x)\\ &=a_{i0}+a_{i1}(x-x_i)+a_{i2}(x-x_i)^2+a_{i3}(x-x_i)^3+a_{i4}(x-x_i)^4+a_{i5}(x-x_i)^5 \end{aligned} \tag{4.68}$$

من أجل $i=0,1,2,\ldots,n-1$ حيث إن a_{i0}، a_{i1}، a_{i2}، a_{i3}، a_{i4} و a_{i5} $i=0,1,2,\ldots,n-1$ ثوابت يتم تعيينها. نذكر هنا أن $s(x)$ والمعرفة في (4.68) تحقق الخاصية $s\in C^4[a,b]$.

سوف نثبت أن دالة الشريحة الخماسية $s(x)$ التي تستكمل الدالة $f(x)$ عند الأعداد $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ تكون وحيدة عندما تحقق الشروط الطبيعية:

$$\begin{aligned} s'''(a) &= s'''(b) = 0 \\ s^{(4)}(a) &= s^{(4)}(b) = 0 \end{aligned} \tag{4.69}$$

ولعمل ذلك فإننا نضع:

$$p_i'(x_j)=D_j,\quad p_i''(x_j)=M_j,\quad p_i'''(x_j)=T_j,\qquad p_i^{(4)}(x_j)=F_j \tag{4.70}$$

لكل $x_j\in[x_i,x_{i+1}]$ ومن أجل $i=0,1,2,\ldots,n-1$. ثم نوجد صيغ للمعاملات الستة a_{i0}، a_{i1}، a_{i2}، a_{i3}، a_{i4} و a_{i5} والموجودة في العلاقة (4.68) بدلالة f_i، f_{i+1}، M_i، M_{i+1}، F_i و F_{i+1} حيث إن:

$$\begin{aligned} p_i(x_i) &= f_i, & p_i(x_{i+1}) &= f_{i+1} \\ p_i''(x_i) &= M_i, & p_i''(x_{i+1}) &= M_{i+1} \\ p_i^{(4)}(x_i) &= F_i, & p_i^{(4)}(x_{i+1}) &= F_{i+1} \end{aligned} \tag{4.71}$$

بشكل مشابه لما تم بالنسبة لدالة الشريحة التكعيبية فإنه يمكن استخدام العلاقات (4.71) للحصول على:

(4.72)

$$a_{i0}=f_i,\qquad a_{i1}=\frac{1}{h}(f_{i+1}-f_i)-\frac{h}{6}(M_{i+1}+2M_i)+\frac{h^3}{360}(7F_{i+1}+8F_i)$$

$$a_{i2}=\frac{1}{2}M_i,\qquad a_{i3}=\frac{1}{h}(M_{i+1}-M_i)-\frac{h}{36}(F_{i+1}+2F_i)$$

$$a_{i4}=\frac{1}{24}F_i,\qquad a_{i5}=\frac{1}{120h}(F_{i+1}-F_i)$$

من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n-1$. نترك للقارئ استنتاج العلاقات (4.72) في التمارين.

الآن بما أن التفاضل الأول لدالة الشريحة الخماسية متصل عند النقطة (x_i, f_i) فإنه يكون لدينا:

$$p'_{i-1}(x_i) = p'_i(x_i), \qquad i = 1,2,\ldots,n-1 \tag{4.73}$$

وباستخدام (4.72) و (4.73) نحصل على:

$$M_{i+1} + 4M_i + M_{i-1} = \frac{6}{h^2}(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) + \frac{h^2}{60}(7F_{i+1} + 16F_i + 7F_{i-1}) \tag{4.74}$$

من أجل $i = 1,2,\ldots,n-1$.

وبشكل مشابه، فإن خاصية اتصال التفاضل الثالث لدالة الشريحة الخماسية عند النقطة (x_i, f_i) والعلاقات (4.47) يعطينا العلاقة التالية:

$$M_{i+1} - 2M_i + M_{i-1} = \frac{h^2}{6}(F_{i+1} + 4F_i + F_{i-1}) \tag{4.75}$$

من أجل $i = 1,2,\ldots,n-1$. وباستخدام المعادلتين (4.74) و (4.75) نحصل على:

$$M_i = \frac{1}{h^2}(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) + \frac{h^2}{120}(F_{i+1} + 8F_i + F_{i-1}) \tag{4.76}$$

من أجل $i = 1,2,\ldots,n-1$. وباستخدام (4.76) يمكننا تعويض M_j من أجل $j = i-1, i, i+1$ في (4.74) أو (4.75) للحصول على العلاقة الرئيسة:

$$F_{i-2} + 26F_{i-1} + 66F_i + 26F_{i+1} + F_{i+2} = \frac{120}{h^4}\delta^4 f_i \tag{4.77}$$

حيث إن:

$$\delta^4 f_i = f_{i-2} - 4f_{i-1} + 6f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2} \tag{4.78}$$

من أجل $i = 2,3,\ldots,n-2$.

الآن من المعادلة (4.68) يكون لدينا:

$$p_i'(x) = a_{i1} + 2a_{i1}(x-x_i) + 3a_{i3}(x-x_i)^2 + 4a_{i4}(x-x_i)^3 + 5a_{i5}(x-x_i)^4 \quad (4.79)$$

$$p_i'''(x) = 6a_{i3} + 24a_{i4}(x-x_i) + 60a_{i5}(x-x_i)^2 \quad (4.80)$$

و باستخدام العلاقات (4.72) نحصل على:

$$D_i = \begin{cases} a_{i1}, & i = 0,1,2,\ldots,n-1 \\ \frac{1}{h}[f_n - f_{n-1}] + \frac{h}{6}[2M_n + M_{n-1}] - \frac{h^3}{360}[8F_n + 7F_{n-1}], & i = n \end{cases} \quad (4.81)$$

و

$$T_i = \begin{cases} a_{i3}, & i = 0,1,2,\ldots,n-1 \\ \frac{1}{h}[M_n - M_{n-1}] + \frac{h}{6}[2F_n + F_{n-1}], & i = n \end{cases} \quad (4.82)$$

انظر التمارين.

حسب الرموز المدرجة في (4.70) يمكن كتابة الشروط الحدية (4.69) بالشكل:

$$\begin{aligned} T_0 &= T_n = 0 \\ F_0 &= F_n = 0 \end{aligned} \quad (4.83)$$

وباستخدام (4.83) يكون لدينا:

$$\begin{aligned} &T_0 = 6a_{03} = 0 \\ &6\{\frac{1}{6h}(M_1 - M_0) - \frac{h}{36}(F_1 + 2F_0)\} = 0 \\ &\frac{1}{h}(M_1 - M_0) - \frac{h}{6}(F_1 + 2F_0) = 0 \end{aligned}$$

وبالتعويض عن قيمة M_1 باستخدام (4.76) نحصل على:

$$M_0 = \frac{1}{h^2}[f_2 - 2f_1 + f_0] - \frac{h^2}{120}[F_2 + 28F_1 + 41F_0] \quad (4.84)$$

مثال (٤,١١)

اعتبر الدالة $f(x)=\sinh x$ عند الأعداد $x_i=1+0.2i$ من أجل $i=0,1,2,3,4$. أوجد دالة الشريحة الخماسية الطبيعية التي تستكمل هذه الدالة عند الأعداد المذكورة. ثم استخدمها لحساب أفضل قيم تقريبية ممكنة لـ $\sinh(x)$ عندما $x=1.1$ و $x=1.45$.

بداية نلاحظ أن $h=0.2$ و $M_0=M_3=0$ وأنه يكون لدينا:

$$\begin{bmatrix} 93 & 27 & 1 \\ 27 & 66 & 26 \\ 1 & 27 & 93 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}=\frac{120}{(0.2)^4}\begin{bmatrix} \Delta^3 f_0 \\ \delta^4 f_2 \\ -\nabla^3 f_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1200 \\ 210 \\ -1410 \end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة الحذف الجاوسي و التعويض الخلفي حصلنا على:

$F_1=11.5598$ ، $F_2=5.2500$ و $F_3=-16.8098$.

وباستخدام العلاقات (4.72) يتم الحصول على قيم المعاملات a_{ij} من أجل $i=0,1,2,3$ $j=0,1,2,\ldots,5$. وبالتالي يكون لدينا دالة الشريحة الخماسية الطبيعية:

$$s(x)=\begin{cases} p_0(x)=1.1752+1.5304(x-1)+0.7014(x-1)^2-0.0610(x-1)^3 \\ \qquad +0.4817(x-1)^5, & x\in[1,1.2] \\ p_1(x)=1.5095+1.8149(x-1.2)+0.7400(x-1.2)^2-0.1430(x-1.2)^3 \\ \qquad +0.4817(x-1.2)^4-0.2620(x-1.2)^5 & x\in[1.2,1.4] \\ p_2(x)=1.9043+2.1473(x-1.4)+0.9501(x-1.4)^2+0.0526(x-1.4)^3 \\ \qquad +0.2188(x-1.4)^4-0.9190(x-1.4)^5, & x\in[1.4,1.6] \\ p_3(x)=2.3756+2.5837(x-1.6)+1.2128(x-1.6)^2+0.1909(x-1.6)^3 \\ \qquad -0.7000(x-1.6)^4+0.7004(x-1.6)^5, & x\in[1.6,1.8] \end{cases}$$

وبما أن $x=1.1$ و $x=1.45$ تقعان في الفترتين $[1,1.2]$ و $[1.4,1.6]$، على الترتيب، فإنه يكون لدينا:

$$f(1.1) \approx s(1.1) = p_0(1.1) = 1.335198$$

و $f(1.45) \approx s(1.45) = p_2(1.45) = 2.014048$. وبالتالي فإن القيمة المطلقة للخطأ المرافق للتقريب $s(1.1)$ هي 0.00045 وتلك للخطأ المرافق للتقريب $s(1.45)$ هي 0.00022 . كما هو متوقع، فإن الأخطاء التي حصلنا عليها باستخدام دالة الشريحة الخماسية تكون أصغر من تلك التي تم الحصول عليها باستخدام دالة الشريحة التكعيبية.

(٤,٧) تمارين

Exercises

١- لتكن $f(x) = x^3$. أوجد كثيرة حدود برنستين ذات الدرجة الرابعة.

٢- لتكن $f(x) = \sin \pi x$. أوجد كثيرة حدود برنستين ذات الدرجة الخامسة.

٣- استخدم كثيرة حدود لاغرانج الاستكمالية لكتابة كثيرة الحدود $p(x)$ والتي تستكمل الدالة $f(x) = \sinh x$ عند الأعداد 2 ، 2.5 و 3.5 ثم استخدمها لإيجاد قيمة تقريبية لـ $f(x)$ عند $x = 3$. احسب الخطأ المضبوط وحداً أعلى لهذا الخطأ.

٤- لتكن $f(x) = \ln(x+2)$ معرفة عند الأعداد المختلفة $x_j = j$ ، من أجل $j = 0,1,2,\ldots,5$. استخدم كثيرة حدود لاغرانج الاستكمالية ذات الدرجة الثانية لحساب أفضل تقريب ممكن لـ $\ln(6.5)$.

٥- اعتبر المعلومات التالية:

x :	1.1	1.3	1.45	1.55
$f(x)$:	3.64	3.08	2.76	2.58

استخدم كثيرة حدود لاغرانج الاستكمالية المناسبة لحساب قيمة تقريبية لـ $f(1.2)$.

٦- اعتبر المعلومات الموجودة في الجدول رقم (٤،١) والتي تتضمن أوزان الطفل الرضيع. استخدم كثيرة الحدود لاغرانج لكتابة كثيرة الحدود التربيعية والتي تعطينا أفضل قيمة تقريبية ممكنة لوزن الطفل عند شهره الخامس.

٧- اعتبر المعلومات التالية:

x :	0.1	0.3	0.45	0.55	0.75	0.9
$f(x)$:	1.105	1.350	1.568	1.733	2.117	2.460

استخدم كثيرة الحدود لاغرانج الاستكمالية لكتابة:

أ) كثيرة الحدود التربيعية التي تعطينا أفضل تقريب ممكن لـ $f(0.4)$.

ب) كثيرة الحدود التربيعية التي تعطينا أسوأ تقريب ممكن لـ $f(0.4)$.

٨- لتكن $f(x)$ دالة معرفة عند الأعداد 0 ، h و $2h$ حيث إن $h \neq 0$. أثبت أنه يمكن كتابة كثيرة الحدود لاغرانج الاستكمالية $p(x)$ والتي توافق هذه الدالة عند الأعداد المذكورة بالشكل:

$$p(x) = \frac{1}{2h^2}[f(0) - 2f(h) + f(2h)]x^2 + \frac{1}{2h}[-3f(0) + 4f(h) - f(2h)]x + f(0)$$

ثم اكتب حد الخطأ المرافق لها. استخدم كثيرة الحدود لحساب قيمة تقريبية لـ $f(0.25)$ وذلك عندما $f(x) = e^{-x}$ و $h = 0.2$.

٩- لتكن $p(x)$ كثيرة الحدود لاغرانج الاستكمالية والتي تستكمل الدالة $f(x) = x^3 + x + 1$ عند الأعداد $x_i = \beta + (i+1)h$ من أجل $i = 0,1,2$ ، حيث إن β عدد حقيقي و $h > 0$. أوجد قيمة h التي تجعل الخطأ المتعلق من تقريب $f(x)$ بكثيرة الحدود $p(x)$ عند $x = \beta$ محدود من الأعلى بالعدد 10^{-3} .

١٠- ليكن لدينا كثيرتي الحدود لاغرانج التربيعية $p_2(x)$ والتكعيبية $p_3(x)$

وأن $f(x) = p_2(x) + \frac{1}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f'''(\xi(x))$

حيث إن $x_0 < \xi(x) < x_2$ و

$$f(x) = p_3(x) + \frac{1}{4!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)f^{(4)}(\varsigma(x))$$

حيث إن $x_0 < \varsigma(x) < x_3$.

أثبت أن $\frac{1}{3!}\frac{d}{dx}[f'''(\eta(x))] = \frac{1}{4!}f^{(4)}(\eta(x))$ حيث إن $x_0 < \eta(x) < x_2$.

١١- أثبت أنه يمكن كتابة كثيرة الحدود لاغرانج الخطية بالشكل:

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

١٢- أثبت أنه يمكن كتابة كثيرة الحدود لاغرانج التربيعية بالشكل:

$$p(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}(x - x_0)(x - x_1)$$

حيث إن $f[x_{i-1}, x_i]$ فرق القسمة الأول للدالة f بالنسبة للمتغيرين x_{i-1} و x_i من أجل $i = 1,2$.

١٣- لتكن الدالة $f(x) = \ln(x+2)$ معرفة عند الأعداد $x_i = 1 + ih$ من أجل $i = 0,1,2,3$. اكتب جدول فروق القسمة، ثم اكتب كثيرة الحدود الاستكمالية والتي تستكمل الدالة $f(x)$ عند الأعداد المذكورة. استخدم كثيرة الحدود التي أوجدتها لحساب قيمة تقريبية لـ $\ln 3.5$، ثم احسب الخطأ المضبوط لهذا التقريب وحداً أعلى لهذا الخطأ.

١٤- اعتبر المعلومات في الجدول رقم (٤،١) والتي تتضمن أوزان الرضيع. استخدم صيغة فروق القسمة الاستكمالية لنيوتن لكتابة لحساب قيمة تقريبية لوزن الطفل عند شهره الخامس.

١٥- اعتبر المعلومات التالية:

x :	0.1	0.3	0.45	0.55	0.75	0.9
$f(x)$:	1.105	1.350	1.568	1.733	2.117	2.460

أ) استخدم صيغة فروق القسمة لنيوتن لكتابة كثيرة الحدود التربيعية والتي تعطينا أفضل تقريب ممكن لـ $f(0.4)$.

ب) استخدم صيغة فروق القسمة لنيوتن لكتابة كثيرة الحدود التربيعية والتي تعطينا أسوأ تقريب ممكن لـ $f(0.4)$.

قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي حصلت عليها بحل التمرين السابع، مع العلم أن $f(x) = e^x$. ماذا تلاحظ ؟.

١٦- اعتبر المعلومات التالية:

x :	0.1	0.25	0.4	0.55
$f(x)$:	1.045	1.295	1.811	2.600

أ) استخدم صيغة فروق القسمة الأمامية لنيوتن لكتابة كثيرة حدود $p(x)$ والتي تستكمل هذه الدالة عند الأعداد المذكورة سابقاً، ثم استخدمها لحساب قيمة تقريبية لـ $f(0.15)$.

ب) استخدم صيغة فروق القسمة الخلفية لنيوتن لكتابة كثيرة حدود $p(x)$ والتي تستكمل هذه الدالة عند الأعداد المذكورة سابقاً، ثم استخدمها لحساب قيمة تقريبية لـ $f(0.5)$.

قارن القيم العددية التي تحصل عليها مع القيم المضبوطة حيث إن $f(x) = \cosh 3x$. ثم احسب حداً أعلى للخطأ في كل حالة.

١٧- ليكن لدينا الأعداد الثلاثة المختلفة x_0، x_1 و x_2 بحيث إن $h = x_{i+1} - x_i$ من أجل $i = 0,1$، ولتكن $f(x)$ دالة معرّفة عند هذه الأعداد. أثبت أن فرق القسمة الثاني يحقق:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - 2f[x_1] + f[x_0]}{2h^2}$$

١٨- لتكن $f(x) = e^{x-1}$ معرّفة عند الأعداد $x_i = ih$ من أجل $i = 0,1,2,3$. اكتب جدول الفروق الأمامية ثم استخدم صيغة الفروق الأمامية لنيوتن لحساب قيمة تقريبية لـ $f(0.1)$. احسب الخطأ المضبوط وحداً أعلى للخطأ.

١٩- لتكن $f(x) = e^{x-1}$ معرّفة عند الأعداد $x_i = ih$ من أجل $i = 0,1,2,3$. اكتب جدول الفروق الخلفية ثم استخدم صيغة الفروق الخلفية لنيوتن لحساب قيمة تقريبية لـ $e^{-0.5}$. احسب الخطأ المضبوط وحداً أعلى للخطأ.

٢٠ – اعتبر المعلومات التالية:

x :	0.1	0.25	0.4	0.55
$f(x)$:	1.045	1.295	1.811	2.600

أ) استخدم صيغة الفروق الأمامية لنيوتن لكتابة كثيرة حدود $p(x)$ والتي تستكمل هذه الدالة عند الأعداد المذكورة سابقاً، ثم استخدمها لحساب قيمة تقريبية لـ $f(0.15)$.

ب) استخدم صيغة الفروق الخلفية لنيوتن لكتابة كثيرة حدود $p(x)$ والتي تستكمل هذه الدالة عند الأعداد المذكورة سابقاً، ثم استخدمها لحساب قيمة تقريبية لـ $f(0.5)$.

جـ) احسب الأخطاء المضبوطة:

$|f(0.15) - p(0.15)|$ و $|f(0.15) - p(0.15)|$،

مع العلم أن $f(x) = \cosh 3x$. قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي تحصل عليها في التمرين ١٦. ماذا تلاحظ ؟.

٢١- ليكن لدينا $p_5(x_i) = f(x_i)$ و $p_5'(x_i) = f'(x_i)$ من أجل $i = 1,2$. استخدم كثيرة الحدود هيرميت $p_5(x)$ المعرفة في المعادلة (4.29) و تفاضلها $p_5'(x)$ الموجود في العلاقة (4.31) لإيجاد الخواص التي تحققها $H_i(x)$ و $\hat{H}_i(x)$ من أجل $i = 0,1,2$.

٢٢- برهن صحة المعادلتين (4.39) و (4.40).

٢٣- استخدم الشرطين $\hat{H}_0(x_0) = 0$ و $\hat{H}_0'(x_0) = 1$ لإيجاد قيم الثابتين c و d الموجودين في المعادلة (4.42).

٢٤- استنتج المعادلتين (4.44) و (4.45).

٢٥- اعتبر المعلومات التالية:

x	1.0	1.5
$f(x)$:	1.17520	2.12928
$f'(x)$:	1.54308	2.35241

استخدم أسلوب هيرميت لكتابة كثيرة الحدود التي تستكمل الدالة $f(x)$ عند الأعداد المذكورة. ثم استخدمها لتقريب قيمة $f(1.2)$. إذا كانت $f(x) = \sinh x$ فاحسب الخطأ المضبوط بالتقريب الذي حصلت عليه واحسب حداً أعلى لهذا الخطأ.

٢٦- اعتبر الدالة $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ عند الأعداد 3، 3.5 و 4.5. استخدم أسلوب هيرميت لكتابة كثيرة حدود استكمالية والتي تستكمل الدالة $f(x)$ عند الأعداد المذكورة. ثم استخدمها لحساب قيمة تقريبية لـ $f(4)$ واحسب الخطأ المضبوط المرافق لهذا التقريب وكذلك حداً أعلى للخطأ. قارن النتائج التي تحصل

عليها مع تلك التي تم الحصول عليها في المثال (٤,٢) من حيث درجة كثيرة الحدود، الجهد الحسابي ودقة القيمة التقريبية.

٢٧- تحقق فيما إذا كانت الدوال التالية دوال شريحة أم لا، ثم حدد درجتها:

أ)
$$s(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1] \\ 2x-1, & x\in[1,2] \\ -x+5, & x\in[2,3] \end{cases}$$

ب)
$$s(x)=\begin{cases} x^2, & x\in[0,1] \\ 2x-1, & x\in[1,2] \\ x^2-2x+3, & x\in[2,4] \end{cases}$$

جـ)
$$s(x)=\begin{cases} x^3+2x, & x\in[1,2] \\ 4x^2-4, & x\in[2,3] \\ x^3-6x+21, & x\in[3,4] \end{cases}$$

٢٨- ليكن لدينا الدالة $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ والمعرفة عند الأعداد المختلفة 3، 3.5 و 4.5. أوجد دالة الشريحة الخطية التي تستكمل هذه الدالة عند الأعداد المذكورة. ثم استخدمها لحساب أفضل قيم تقريبية لـ $f(x)$ عندما $x=3.3$ و $x=4.0$. احسب الخطأ المضبوط للحالتين. بالنسبة للحالة الثانية قارن الخطأ الذي تحصل عليه مع ذلك الذي حصلنا عليه في المثال (٤,٢).

٢٩- لتكن الدالة $f(x)=\ln(x+2)$ معرفة عند الأعداد $x_i=1+ih$ من أجل $i=0,1,2$. استخدم دالة الشريحة الخطية لكتابة كثيرة الحدود التي تستكمل الدالة $f(x)$ عند الأعداد المذكورة. ثم احسب قيمة تقريبية لـ $\ln 3.5$ واحسب الخطأ المضبوط. قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي تحصل عليها في التمرين ١٣.

٣٠- اعتبر المعلومات التالية:

x	1.0	1.5
$f(x)$:	1.54308	2.35241
$f'(x)$:	1.17520	2.12928

استخدم دالة الشريحة الخطية لكتابة كثيرة الحدود التي تستكمل الدالة $f(x)$: عند الأعداد المذكورة، ثم استخدمها لحساب قيمة تقريبية لـ $f(1.25)$. احسب المرافق لهذا التقريب حيث إن $f(x) = \cosh x$ ، ثم قارن ذلك مع الخطأ الذي حصلنا عليه في المثال (٤,٨).

٣١- اكتب الخوارزمية التي تتضمن الخطوات اللازمة لتنفيذ أسلوب دالة الشريحة التكعيبية والتي تمكننا من حساب قيماً تقريبية لعدة قيم مختلفة للدالة $f(x)$ في فترات صغيرة مختلفة.

٣٢- استخدم دالة الشريحة التكعيبية لحل المسائل الموجودة في:

أ) التمرين ٢٨.

ب) التمرين ٢٩.

جـ) التمرين ٣٠.

قارن النتائج العددية التي تحصل عليها مع تلك التي حصلت عليها بحل المسائل الموجودة في التمرين المعني لكل حالة.

٣٣- استنتج العلاقات الموجودة في المعادلة (4.72).

٣٤- استنتج المعادلات (4.74) و (4.75).

٣٥- استنتج المعادلة (4.77).

٣٦- استنتج المعادلتين (4.81) و (4.82).

٣٧- استنتج المعادلة (4.84).

٣٨- استخدم دالة الشريحة الخماسية لحل المسائل الموجودة في:

أ) التمرين ٢٨.

ب) التمرين ٢٩.

جـ) التمرين ٣٠.

قارن النتائج العددية التي تحصل عليها مع تلك التي حصلت عليها بحل المسائل الموجودة في التمرين المعني والتمرين ٣٢ لكل حالة.

تمارين الحاسب

ح١ – لتكن $f(x) = \ln(x+2)$ معرفة عند الأعداد المختلفة $x_j = j$، من أجل $j = 0,1,2,\dots,5$. اكتب برنامج للحاسب لتنفيذ أسلوب كثيرة الحدود لاغرانج لحساب قيمة تقريبية لـ $\ln(6.5)$.

ح٢ – اكتب برنامج للحاسب لتنفيذ أسلوب فروق القسمة لنيوتن لحل المسألة الموجودة في التمرين ح١، ثم احسب قيمة تقريبية لـ $\ln(6.5)$. قارن هذه القيمة مع تلك التي حصلت عليها في التمرين ح١.

ح٣ – اكتب برنامج للحاسب لتنفيذ أسلوب الفروق الخلفية لنيوتن لحل المسألة الموجودة في التمرين ح١، ثم احسب قيمة تقريبية لـ $\ln(6.5)$. قارن هذه القيمة مع تلك التي حصلت عليها في التمرينين ح١ و ح٢.

ح٤ – اعتبر المعلومات الموجودة في الجدول رقم (٤،١). أوجد دالة الشريحة الخطية المناسبة، ثم استخدمها لحساب قيماً تقريبية لوزن الطفل عندما يكون عمره شهر ونصف وخمسة أشهر.

ح٥ – اعتبر المعلومات الموجودة في الجدول رقم (٤,١). أوجد دالة الشريحة التكعيبية الطبيعية المناسبة، ثم استخدمها لحساب قيماً تقريبية لوزن الطفل عندما يكون عمره شهر ونصف وخمسة أشهر. قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي حصلت عليها في التمرين ح٢. ماذا تلاحظ؟.

ح٦ – استخدم دالة الشريحة الخماسية التي ناقشناها في البند (٤,٦) لحساب قيمة تقريبية لـ $\ln(6.5)$ للمسألة الموجودة في التمرين ح١. ثم قارن ذلك بالقيمة التقريبية التي حصلت عليها في التمرينين ح١ و ح٢. ماذا تلاحظ؟.