الفصل الخامس

التفاضل والتكامل العددي

Numerical Differentiation and Integration

من المعلوم أن التفاضل والتكامل من المواضيع الأساسية في التحليل، كما أن الكثير من المسائل الرياضية التي تنشأ في المجالات التطبيقية تتطلب إيجاد تفاضل دالة معينة أو تكاملها على فترة محدودة أو غير محدودة. فمثلاً، التكامل المحدود $\int_0^x e^{-t^2}dt$ ، حيث إن $x > 0$ محدودة، يظهر كثيرا في مسائل الإحصاء، توزيع الحرارة على قضيب، سرعة تدفق سائل لزج وغيرها من التطبيقات. وبما أنه ليس لـ e^{-t^2} دالة أصلية فإننا لا نستطيع استخدام الطرائق المعروفة، والتي عادة ما يتم دراستها في مقررات الحسبان، لإيجاد التكامل المشار إليه. لاحظ هنا أن دالة التكامل e^{-t^2} متصلة على فترة التكامل وبالتالي فإن التكامل المحدود يكون موجوداً. نشير إلى أنه في مثل هذه الحالات نلجأ إلى الطرائق العددية لإيجاد قيمة تقريبية بالدقة المطلوبة لهذا التكامل.

يمكن مبدئياً، إيجاد التفاضل المضبوط لدالة معينة. ومن ناحية أخرى، قد يكون شكل دالة التفاضل لدالة معينة معقداً بحيث إن استخدام قيم تقريبية لهذا التفاضل يكون أكثر فاعلية من حساب القيم المضبوطة له، كما أنه في الكثير من التطبيقات تكون الدالة معرفة بقيم مجدولة فقط. فمثلاً، ليكن لدينا جسم وزنه خمسة كيلوجرامات تم إلقاءه من ارتفاع ألفين وأربعمائة متر فوق سطح الأرض وأنه تم

تسجيل بعده عن الأرض في أوقات مختلفة كما هو موضح في الجدول رقم (٥,١)، ولنفترض أننا نريد إيجاد سرعة سقوط هذا الجسم عند وقت معين، وليكن عند الثانية الرابعة للسقوط.

الجدول رقم (٥,١). بُعد الجسم الساقط عن الأرض في أوقات مختلفة.

الوقت (بالثانية) :	0	1	2	3	4	5
المسافة (بالمتر):	2400	2250	1950	1853	1738	1624

نشير هنا إلى أن حل هذه المسألة يتم باستخدام التفاضل العددي وذلك لعدم معرفتنا لشكل الدالة التي تحدد بعد الجسم عن سطح الأرض.

سوف ندرس في هذا الفصل بعض الطرائق العددية لحساب التفاضل الأول والثاني لدالة ما، والبعض الآخر لتقريب التكامل المحدود. يعتمد استنتاج هذه الطرائق على مبدأ الاستكمال الذي درسناه في الفصل الرابع.

(٥,١) صيغ عددية للتفاضل الأول

Numerical Methods for the First Derivative

ليكن لدينا $f \in C^{n+1}(I)$ ، حيث إن I فترة مفتوحة تحتوي على الأعداد المختلفة $x_0, x_1, \cdots, x_n$ والتي عددها $n+1$ بحيث إن المسافات فيما بينها تكون متساوية ولتكن $h = x_{i+1} - x_i$ من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n-1$ وأن هذه الأعداد معرفة كالتالي: $x_i = x_0 + ih$ ، من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n$ حيث إن $h = \dfrac{x_n - x_0}{n}$.

إذن فإنه حسب النظرية (٤,٢) يوجد كثيرة الحدود لاغرانج الاستكمالية $p(x)$ ذات الدرجة n على الأكثر والتي تستكمل الدالة $f(x)$ عند الأعداد المذكورة، وأن:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x) f(x_j) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta(x)) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \qquad (5.1)$$

حيث إن $L_j(x)$ هي حاصل القسمة المعرفة في المعادلة (4.8) و $\eta(x)$ تنتمي للفترة I.
الآن بتفاضل طرفي المعادلة (5.1) نحصل على:

$$f'(x)=\sum_{j=0}^{n}L_j'(x)f(x_j)+\frac{1}{(n+1)!}\frac{d}{dx}[f^{(n+1)}(\eta(x))\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)] \qquad (5.2)$$

الحد الأول في الطرف الأيمن للمعادلة (5.2) يعطينا تقريب لـ $f'(x)$ من أجل قيم عشوائية للمتغير x، أما الحد الثاني فهو الخطأ المقطوع المتعلق بهذا التقريب. نلاحظ هنا أنه توجد صعوبة في استخدام هذه الصيغة حيث إنه ليس لدينا معلومات عن $\frac{d}{dx}f^{(n+1)}(\eta(x))$ والمتضمن في حد الخطأ الموجود في (5.2). وهذا يعني أننا لا نستطيع تقدير الخطأ المقطوع. من ناحية أخرى، عندما يكون $x=x_k$، $k=0,1,2,\ldots,n$ فإن معامل المقدار $\frac{d}{dx}f^{(n+1)}(\eta(x))$ يكون مساوياً للصفر، وبالتالي فإن المعادلة (5.2) تصبح بالشكل:

$$f'(x_k)=\sum_{j=0}^{n}L_j'(x_k)f(x_j)+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\eta_k)\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)] \qquad (5.3)$$

من أجل $k=0,1,2,\ldots,n$. تسمى المعادلة (5.3) صيغة النقاط $(n+1)$ لحساب التفاضل الأول للدالة f عند x_k. القيمة التقريبية لهذا التفاضل هي:

$$f'(x_k)\approx D_h(f(x_k))=\sum_{j=0}^{n}L_j'(x_k)f(x_j) \qquad (5.4)$$

في الواقع تزداد دقة التفاضل التقريبي (5.4) بازدياد العدد الصحيح n (أي عدد نقاط الاستكمال)، ويترتب على ذلك ازدياد في عدد الدوال التي يجب حسابها. بالمقابل، قد يترتب نمو في الخطأ بازدياد قيمة n مما يحد من عدد نقاط الاستكمال المستخدمة. عملياً $n\le 7$ هي المستخدمة على نطاق واسع.

(٥,١,١) صيغ النقطتين

عندما $n=1$ يكون لدينا العددين x_0 و $x_1 = x_0 + h$ وتصبح المعادلة (5.3) بالشكل:

$$f'(x_k) = L_0'(x_k) f(x_0) + L_1'(x_k) f(x_1) + \frac{1}{2} f''(\eta_k) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{1} (x_k - x_i) \qquad (5.5)$$

من أجل $k=0,1$. بما أن $L_0'(x_k) = -L_1'(x_k) = \dfrac{1}{x_0 - x_1}$ و $h = x_1 - x_0$، وبوضع $x_k = x_0$ نحصل على:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}[f(x_0+h) - f(x_0)] - \frac{h}{2} f''(\eta_0) \qquad (5.6)$$

حيث إن η_0 تقع بين x_0 و x_1. تسمى المعادلة (5.6) صيغة النقطتين الأمامية إذا كانت $h>0$ والخلفية إذا كانت $h<0$ وهي ذات رتبة تقاربية أولى وذلك لأن أُس الثابت h الموجود في حد الخطأ هو الواحد. نشير هنا إلى أنه عادة يستخدم الرمز $O(h)$ للدلالة على أن رتبة التقارب لصيغة التفاضل العددي هي الأولى. بشكل عام، الرمز $O(h^m)$ يستخدم للدلالة على أن رتبة التقارب (الدقة) للصيغة العددية تكون m، حيث إن $m \geq 1$ عدد صحيح موجب.

يتضح من المعادلة (5.6) أنه كلما صغرت قيمة h تقل قيمة حد الخطأ وبالتالي نحصل على تقريب أفضل لـ $f(x_0)$ المثال التالي يوضح ذلك.

مثال (٥,١)

اعتبر الدالة $f(x) = \sin x$، نريد حساب قيم تقريبية لـ $f'(1)$ وذلك باستخدام الصيغة (5.6) وقيم مختلفة لـ h.

عندما $h = 0.1$ يكون لدينا:

$$f'(1) \approx D_{0.1}(f(1)) = \frac{1}{0.1}[\sin(1+0.1) - \sin(1)] = 0.49736$$

وبما أن $f'(1) = \cos(1) = 0.54030$ فإن الخطأ المضبوط المرافق لهذا التقريب هو $|f'(1) - D_{0.1}(f(1))| = 0.04294$. من ناحية أخرى، عندما $h = 0.2$ يكون لدينا:

$$f'(1) \approx D_{0.2}[f(1)] = \frac{1}{0.2}[\sin(1+0.2) - \sin(1)] = 0.45284$$

والخطأ المرافق $|f'(1) - D_{0.2}(f(1))| = 0.08746$، وهو ضعف الخطأ المرافق للتقريب $D_{0.1}(f(1))$. وبما أن قيمة الخطأ في الحالة الثانية هي ضعف تلك في الحالة الأولى فإن هذا يدل على أن الرتبة التقاربية للطريقة هي الأولى وهذا يتوافق مع الاستنتاج التحليلي. وأخيراً، عندما $h = -0.1$ و $h = -0.2$ يكون لدينا:

$$f'(1) \approx D_{-0.1}[f(1)] = \frac{1}{-0.1}[\sin(1-0.1) - \sin(1)] = 0.58144$$

و

$$f'(1) \approx D_{-0.2}[f(1)] = \frac{1}{-0.2}[\sin(1-0.2) - \sin(1)] = 0.62058$$

وأن $|f'(1) - D_{-0.1}(f(1))| = 0.04114$ و $|f'(1) - D_{0.2}(f(1))| = 0.08027$ وبالتالي فقد حصلنا على نفس النتائج العددية التي حصلنا عليها سابقاً. نشير هنا إلى أن الاختلاف في القيم التقريبية بين النتائج العددية لقيم h الموجبة والسالبة راجع لأخطاء التدوير وليس لرتبة الطريقة.

يمكن حساب حداً أعلى للخطأ المتعلق بأي من القيم التقريبية، فمثلاً لحساب حداً أعلى للخطأ للحالة التي يكون فيها $h = 0.1$ فإننا نلاحظ أن:

$$|f'(1) - D_{0.1}(f(1))| \le \frac{0.1}{2} \max_{1\le x\le 1.1} |f''(x)|$$

وبما أن $\max_{1\le x\le 1.1} |f''(x)| = \max_{1\le x\le 1.1} |\sin x| = 0.89210$ فإنه يكون لدينا:

$$|f'(1) - D_{0.1}(f(1))| \le \frac{0.1}{2}(0.89210) = 0.04456$$

وهو أكبر من الخطأ الفعلي كما ينبغي أن يكون.

(٥,١,٢) صيغ الثلاث النقاط

هنا تكون $n=2$ ويكون لدينا الأعداد الثلاثة x_0، $x_1 = x_0 + h$ و $x_2 = x_0 + 2h$ والمعادلة (5.3) تصبح بالشكل:

$$f'(x_k) = L_0'(x_k)f(x_0) + L_1'(x_k)f(x_1) + L'(x_k)f(x_2) + \frac{1}{6}f'''(\eta_k)\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{2}(x_k - x_i) \tag{5.7}$$

من أجل $k = 0,1,2$، حيث إن:

$$\begin{aligned} L_0'(x_k) &= \frac{2x_k - x_1 - x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \\ L_1'(x_k) &= \frac{2x_k - x_0 - x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\ L_2'(x_k) &= \frac{2x_k - x_0 - x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{aligned} \tag{5.8}$$

من المعادلة (5.7) يمكن استنتاج عدة صيغ عددية لحساب قيم تقريبية لتفاضل الدالة f كما يلي:

الصيغة الأولى: هنا نضع $x_k = x_0$ في المعادلة (5.7) لتصبح بالشكل:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= L_0'(x_0)f(x_0) + L_1'(x_0)f(x_1) + L'(x_0)f(x_2) \\ &\quad + \frac{1}{6}f'''(\eta_0)(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \end{aligned} \tag{5.9}$$

حيث إن η_0 تقع بين x_0 و x_2. وبالتعويض عن $x_k = x_0$، $x_1 = x_0 + h$ و $x_2 = x_0 + 2h$ في (5.8) يكون لدينا:

$$L_0'(x_0) = \frac{2x_0 - x_0 - h - x_0 - 2h}{(x_0 - x_0 - h)(x_0 - x_0 - 2h)} = -\frac{3h}{2h^2} = -\frac{3}{2h}$$

$$L_1'(x_0)=\frac{2x_0-x_0-x_0-2h}{(x_0+h-x_0)(x_0+h-x_0-2h)}=\frac{2h}{h^2}=\frac{2}{h}$$

$$L_2'(x_0)=\frac{2x_0-x_0-x_0-h}{(x_0+2h-x_0)(x_0+2h-x_0-h)}=-\frac{h}{2h^2}=-\frac{1}{2h}$$

وبالتعويض عن ذلك في المعادلة (5.9) نحصل على:

$$f'(x_0)=-\frac{3}{h}f(x_0)+\frac{2}{h}f(x_0+h)-\frac{1}{2h}f(x_2)+\frac{1}{6}f'''(\eta_0)(x_0-x_0-h)(x_0-x_0-2h)$$

ومنه يكون لدينا:

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_0+h)-f(x_0+2h)]+\frac{h^2}{3}f'''(\eta_0) \quad (5.10)$$

إذا كان $h>0$ فإن المعادلة (5.10) تسمى صيغة الثلاث نقاط الأمامية لحساب التفاضل العددي، أما إذا كان $h<0$ فإنها تسمى صيغة الثلاث نقاط الخلفية. يتضح من حد الخطأ الموجود في الصيغة العددية (5.10) أنها تربيعية التقارب، أي أنها ذات رتبة تقاربية ثانية $O(h^2)$.

الصيغة الثانية: بوضع $x_k=x_1$ في المعادلة (5.7) نحصل على:

$$\begin{aligned}f'(x_1)&=L_0'(x_1)f(x_0)+L_1'(x_1)f(x_1)+L'(x_1)f(x_2)\\&+\frac{1}{6}f'''(\eta_0)(x_1-x_0)(x_1-x_2)\end{aligned} \quad (5.11)$$

حيث إن η_0 تقع بين x_0 و x_2. وبوضع $x_k=x_1$ في المعادلات (5.8) واستخدام الحقيقة أن $x_1=x_0+h$ و $x_2=x_0+2h$ نحصل على:

$$L_0'(x_1)=\frac{2x_0+2h-x_0-h-x_0-2h}{(x_0-x_0-h)(x_0-x_0-2h)}=-\frac{h}{2h^2}=-\frac{1}{2h}$$

$$L_1'(x_1)=\frac{2x_0+2h-x_0-x_0-2h}{(x_0+h-x_0)(x_0+h-x_0-2h)}=\frac{0}{h^2}=0$$

$$L_2'(x_1)=\frac{2x_0+2h-x_0-x_0-h}{(x_0+2h-x_0)(x_0+2h-x_0-h)}=\frac{h}{2h^2}=\frac{1}{2h}$$

وبما أن $(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) = (x_0 + h - x_0)(x_0 + h - x_0 - 2h) = -h^2$ فإن المعادلة (5.11) تأخذ الشكل:

$$f'(x_0 + h) = \frac{1}{2h}[f(x_0 + 2h) - f(x_0)] - \frac{h^2}{6} f'''(\eta_0) \qquad (5.12)$$

وباستبدال $x_0 + h$ بـ x_0 في المعادلة (5.12) يكون لدينا:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6} f'''(\eta_1) \qquad (5.13)$$

حيث إن η_1 تقع بين $x_0 - h$ و $x_0 + h$. تسمى المعادلة (5.13) صيغة الفروق المركزية لحساب القيمة التقريبية لـ $f'(x_0)$ وهي ذات رتبة تقاربية ثانية. نشير هنا إلى أن الخطأ المتعلق بالصيغة (5.13) هو $-\frac{h^2}{6} f'''(\eta_1)$ وبالتالي فهو نصف مقدار الخطأ المرافق للصيغة الأمامية (5.10). وعليه فسيكون الخطأ الناتج من استخدام الصيغة (5.13) لحساب $f'(x_0)$ نصف ذلك الذي ينتج من استخدام الصيغة (5.10). انظر مثال (٥,٢).

الصيغة الثالثة: أخيراً بوضع $x_k = x_2$ والتعويض عن $x_1 = x_0 + h$ و $x_2 = x_0 + 2h$ في (5.7) و (5.8) نحصل على الصيغة العددية:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0 - 2h) - 4f(x_0 - h) + 3f(x_0)] + \frac{h^2}{3} f'''(\eta_0) \qquad (5.14)$$

حيث إن η_0 تقع بين x_0 و $x_0 - 2h$. نترك استنتاج هذه الصيغة للمناقشة في التمارين. نشير هنا إلى أنه باستبدال h بـ $-h$ في المعادلة (5.14) نحصل على الصيغة (5.10)؛ وعليه فإن هاتين الصيغتين متكافئتان.

ملاحظة:

كما سبق أن ذكرنا فإن الخطأ المرافق للصيغة المركزية (5.13) هو نصف ذلك المتعلق بالصيغة (5.10) وبالتالي تكون أفضلية الاستخدام للصيغة المركزية، ولكن

عندما يكون التفاضل المراد إيجاده عند عدد يقع على طرفي الفترة فإنه لا يمكن استخدام الصيغة المركزية. بالمقابل إذا كان التفاضل الذي نريد إيجاده عند عدد غير موجود في جدول المعلومات فإننا نستطيع فقط تقريب التفاضل باستخدام الصيغة المركزية حيث إنها لا تتطلب معرفة قيمة الدالة عند العدد المراد إيجاد التفاضل عنده. (انظر التمارين).

مثال (٥,٢)

اعتبر المعلومات التالية:

x	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$f(x)$	0.26336	0.33647	0.40547	0.47000	0.53063

سوف نستخدم صيغ الثلاث نقاط لحساب قيم تقريبية لـ $f'(0.5)$ ونقارن بينها. بداية نستخدم الصيغة (5.10) في الحالات الممكن استخدامها وهي:

١- عندما $h=0.1$ يكون لدينا:

$$f'(0.5)\approx D_{0.1}(f(0.5))=\frac{1}{2(0.1)}[-3f(0.5)+4f(0.6)-f(0.7)]=0.66496$$

٢- وعندما $h=-0.1$ نحصل على:

$$f'(0.5)\approx D_{-0.1}(f(0.5))=\frac{1}{2(-0.1)}[-3f(0.5)+4f(0.4)-f(0.3)]=0.0.66435$$

ومن ناحية أخرى، فإنه يمكن استخدام الصيغة المركزية (5.13) في الحالات التالية:

١- عندما $h=0.1$ حيث نحصل على:

$$f'(0.5)\approx D_{0.1}(f(0.5))=\frac{1}{2(0.1)}[f(0.6)-f(0.4)]=0.666766$$

٢- وعندما $h=0.2$ يكون لدينا:

$$f'(0.5)\approx D_{0.2}(f(0.5))=\frac{1}{2(0.2)}[f(0.7)-f(0.3)]=0.67066$$

وبما أن $f(x)=\ln(x+1)$ فإن $f'(0.5)=\frac{2}{3}\approx 0.66667$ وبالتالي يمكن مقارنة القيم الفعلية مع التقريبية لكل حالة من الحالات السابقة حيث إنه بالنسبة للصيغة (5.10) يكون لدينا:

$$|f'(0.5)-D_{0.1}(f(0.5))|=0.00171 \quad \text{و} \quad |f'(0.5)-D_{-0.1}(f(0.5))|=0.00232$$

أما بالنسبة للصيغة المركزية (5.13) فإنه يكون لدينا:

$$|f'(0.5)-D_{0.1}(f(0.5))|=0.00099 \quad \text{و} \quad |f'(0.5)-D_{0.2}(f(0.5))|=0.00399$$

ومن هذه النتائج نلاحظ أن أفضل تقريب حصلنا عليه هو ذلك الذي حصلنا عليه باستخدام الصيغة المركزية (5.13) عندما $h=0.1$ وأن مقدار الخطأ هو (تقريباً) نصف مقدار الخطأ المتعلق بالتقريب الذي يليه مباشرة وهو ذلك الذي تم حسابه باستخدام الصيغة (5.10) عندما $h=0.1$، وهذا يوافق الاستنتاج النظري. من ناحية أخرى، فإن أسوأ تقريب حصلنا عليه هو ذلك الذي تم حسابه باستخدام الصيغة (5.13) مع $h=0.2$، وهذا أيضاً يتوافق نظرياً حيث إن حد الخطأ المرافق للصيغة يحتوي على h^2 وبالتالي كلما زادت قيمة h زاد مقدار الخطأ. أيضاً، نلاحظ أن قيمة الخطأ المرافقة للتقريب المحسوب باستخدام الصيغة (5.13) عندما $h=0.2$ هي أربعة أضعاف قيمة الخطأ المرافق للتقريب المحسوب باستخدام نفس الصيغة عندما $h=0.1$ وهذا يدل على أن رتبة التقارب لهذه الصيغة يكون تربيعياً. وهذا صحيح بشكل عام، أي أنه إذا كانت رتبة الصيغة تربيعية فإنه إذا تم مضاعفة قيمة h المستخدمة فإن قيمة الخطأ تتضاعف أربع مرات. أخيراً نشير إلى أنه يتضح من حد الخطأ المرافق للصيغة (5.10) أن إشارة h لا تؤثر على مقدار الخطأ، وبالتالي فإن الفرق في مقدار الخطأ المحسوب للحالتين $h=0.1$ و $h=-0.1$ عند استخدام هذه الصيغة هو بسبب تأثير أخطاء التدوير المرافقة للحسابات وليس لحد الخطأ المرافق للصيغة.

سوف ندرس إن شاء الله مدى تأثير أخطاء التدوير على الحسابات العددية في نهاية هذا البند.

ختاماً لنحسب حداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب الذي تم الحصول عليه باستخدام الصيغة (5.10) عندما $h=-0.1$ حيث يكون لدينا:

$$|f'(0.5)-D_{-0.1}(f(1))| \le \frac{(-0.1)^2}{3}\max_{0.3\le x\le 0.5}|f'''(x)|$$

وبما أن $\max_{0.3\le x\le 0.5}|f'''(x)| = \max_{0.3\le x\le 0.5}\left|\frac{2}{(x+1)^3}\right| = 0.91033$ فإننا نحصل على:

$$|f'(0.5)-D_{-0.1}(f(1))| \le \frac{(-0.1)^2}{3}(0.91033 = 0.00303$$

وهذا المقدار أكبر من مقدار الخطأ الفعلي الذي حصلنا عليه بالنسبة لهذه الحالة.

(٥,١,٣) صيغ الخمس نقاط

عندما تكون $n=4$ يكون لدينا الأعداد الخمسة، x_0، $x_1=x_0+h$، $x_2=x_0+2h$، $x_2=x_0+3h$ و $x_2=x_0+4h$ وتصبح المعادلة (5.3) بالشكل:

$$f'(x_k)=\sum_{j=0}^{4}L'_j(x_k)f(x_j)+\frac{1}{5!}f^{(5)}(\eta_k)\prod_{\substack{i=0\\ i\ne k}}^{4}(x_k-x_i)] \qquad (5.15)$$

من أجل $k=0,1,2,3,4$. وباستخدام أسلوب مماثل للذي استخدمناه في حالة صيغ الثلاث نقاط يمكن استنتاج صيغ عددية نذكر منها الصيغتين التاليتين:

(5.16)

$$f'(x_0)=\frac{1}{12h}[f(x_0-h)-10f(x_0)+18f(x_0+h)-6f(x_0+2h)+f(x_0+3h)]$$
$$-\frac{h^4}{20}f^{(5)}(\eta_0)$$

حيث إن $\eta_0\in(x_0-h,x_0+3h)$ و

(5.17)

$$f'(x_0)=\frac{1}{12h}[f(x_0-2h)-8f(x_0-h)+8f(x_0+h)-f(x_0+2h)]$$
$$-\frac{h^4}{30}f^{(5)}(\eta_0)$$

حيث إن $\eta_0\in(x_0-2h,x_0+2h)$. وهي صيغ ذات رتبة تقاربية رابعة $\{\,O(h^4)\,\}$.

نشير هنا إلى أن استنتاج الصيغتين (5.16) و (5.17) باستخدام كثيرة الحدود لاغرانج يتطلب الكثير من الجهد حيث إننا نواجه خمس كثيرات حدود $L_j(x_k)$، $j=0,1,2,3,4$ ذات درجة رابعة وتفاضلاتها تكون كثيرات حدود ذات درجة ثالثة والتعامل معها يحتاج إلى الكثير من التعقيدات الجبرية. من ناحية أخرى، يمكن استنتاج الصيغتين بأسلوب أسهل وذلك باستخدام كثيرة الحدود تايلور كما يلي:

سوف نستنتج الصيغة المركزية (5.17) وذلك لأهميتها ونترك استنتاج الصيغة الأخرى للقارئ. لتكن $f\in C^5[x_0-2h,x_0+2h]$، بنشر كثيرة الحدود تايلور ذات الدرجة الرابعة للدالة f حول العدد x_0 يكون لدينا:

(5.18)

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0)$$
$$+\frac{(x-x_0)^4}{4!}f^{(4)}(x_0)+\frac{(x-x_0)^5}{5!}f^{(5)}(\eta(x))$$

و بالتعويض عن x بالقيم التالية: x_0-2h، x_0-h، x_0+h و x_0+2h نحصل على:

(5.19)

$$f(x_0-2h)=f(x_0)-2hf'(x_0)+2h^2f''(x_0)-\frac{4h^3}{3}f'''(x_0)+\frac{2h^4}{3}f^{(4)}(x_0)$$
$$-\frac{4h^5}{15}f^{(5)}(\eta_{-2})$$

$$f(x_0-h)=f(x_0)-hf'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(x_0)-\frac{h^3}{6}f'''(x_0)+\frac{h^4}{24}f^{(4)}(x_0)-\frac{h^5}{120}f^{(5)}(\eta_{-1}) \tag{5.20}$$

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(x_0)+\frac{h^3}{6}f'''(x_0)+\frac{h^4}{24}f^{(4)}(x_0)+\frac{h^5}{120}f^{(5)}(\eta_{+1}) \tag{5.21}$$

و

$$f(x_0+2h)=f(x_0)+2hf'(x_0)+2h^2f''(x_0)+\frac{4h^3}{3}f'''(x_0)+\frac{2h^4}{3}f^{(4)}(x_0)+\frac{4h^5}{15}f^{(5)}(\eta_{+2}) \tag{5.22}$$

على الترتيب، حيث إن $\eta_j \in (x_0, x_0+jh)$ من أجل $j=-2,-1,1,2$. الآن بضرب المعادلة (5.20) بـ -8 والمعادلة (5.21) بـ $+8$ وجمع المعادلتين الناتجتين مع المعادلة (5.19) و طرح المعادلة (5.22) وباستخدام الحقيقة أن $f^{(5)}$ دالة متصلة على الفترة $[x_0-2h, x_0+2h]$ نحصل على:

$$f(x_0-2h)-8f(x_0-h)+8f(x_0+h)-f(x_0+2h)=12hf'(x_0)-\frac{6h^5}{15}f^{(5)}(\eta_0)$$

حيث إن $\eta_0 \in (x_0-2h, x_0+2h)$. و بحل المعادلة الأخيرة بالنسبة لـ $f'(x_0)$ يكون لدينا الصيغة المركزية (5.17).

نختتم هذا البند بدراسة تأثير أخطاء التدوير التي تتكون أثناء العمليات الحسابية المتعلقة بحساب قيم الدالة f عند أعداد معينة وكذلك العمليات الحسابية التي تتطلبها الصيغ العددية لحساب تفاضل الدالة.

من المعلوم أن لأخطاء التدوير تأثير على النتائج العددية التي يتم الحصول عليها باستخدام الحاسب الآلي. هنا سوف ندرس تأثير هذه الأخطاء عند تطبيق الصيغة العددية (5.6) لحساب قيم تقريبية لـ $f'(x_0)$. لعمل ذلك، نفترض أن $\tilde{f}(x_0)$ و $\tilde{f}(x_0+h)$ هي القيم المحسوبة للدالة f عند الأعداد x_0 و x_0+h على الترتيب، بحيث إن أخطاء التدوير المرافقة لها هي:

$$f(x_0)-\tilde{f}(x_0)=e(x_0)$$

$$f(x_0+h)-\tilde{f}(x_0+h)=e(x_0+h)$$

أيضاً لنفترض أن القيمة المحسوبة لـ $D_h(f(x_0))$ (التفاضل العددي) معرفة بـ:

$$\tilde{D}_h(f(x_0))=\frac{1}{h}[\tilde{f}(x_0+h)-\tilde{f}(x_0)] \qquad (5.23)$$

بناء على ذلك فإنه يكون لدينا:

$$f'(x_0)-\tilde{D}_h(f(x_0))=f'(x_0)-\frac{1}{h}[f(x_0+h)-e(x_0+h)-f(x_0)+e(x_0)]$$

ومنه نحصل على:

(5.24)

$$\begin{aligned} f'(x_0)-\tilde{D}_h(f(x_0)) &= f'(x_0)-\frac{1}{h}[f(x_0+h)-f(x_0)]+\frac{1}{h}[e(x_0+h)-e(x_0)) \\ &= -\frac{h}{2}f''(\eta_0)+\frac{1}{h}[e(x_0+h)-e(x_0)] \end{aligned}$$

وإذا كانت أخطاء التدوير $e(x_0)$ و $e(x_0+h)$ محدودة بعدد ما وليكن $\delta>0$ (أي أن $|e(x_0+h)|<\delta$ و $|e(x_0)|<\delta$)، و $\max_{\eta}|f''(\eta)|=M_2$ فإنه يكون لدينا:

$$|f'(x_0)-\tilde{D}_h(f(x_0))|\le\frac{h}{2}M_2+\frac{2\delta}{h} \qquad (5.25)$$

يتضح من العلاقة (5.25) أن الخطأ يتناقص عندما تتناقص قيمة h إلى مقدار معين، يسمى هذا المقدار بالقيمة المثلى لـ h، وهي التي تعطينا أفضل تقريب ممكن لـ $f'(x_0)$ و تعتمد على الكسر $\frac{2\delta}{h}$. من ناحية أخرى، عندما يقل مقدار h عن القيمة المثلى فإن الخطأ يتزايد بسبب وجود الكسر $\frac{2\delta}{h}$ حيث إنه عندما h تؤول إلى الصفر فإن $\frac{2\delta}{h}$ تؤول إلى اللانهاية. نشير هنا إلى أن العدد δ مرتبط بالحاسب المستخدم للعمليات الحسابية كما يتضح في المثال التالي:

مثال (٥,٣)

اعتبر استخدام الصيغة (5.6) لحساب قيمة عددية لـ $f'(2)$ حيث إن $f(x)=\frac{1}{x}$ على الفترة $[1.9,2.1]$. أوجد القيمة المثلى لـ h لحساب أفضل تقريب ممكن لـ $f'(2)$ وذلك باستخدام عمليات حسابية ترتكز على أربعة أرقام عشرية معنوية (أي أن $\delta = 5\times10^{-5}$).

بداية لنعرف الدالة $e(h)=\frac{h}{2}M_2+\frac{2\delta}{h}$ وبالتالي يكون لدينا:

$$e'(h)=\frac{1}{2}M_2-\frac{2\delta}{h^2}=0 \qquad \Rightarrow \qquad h^2M_2-4\delta=0$$

ومنه نحصل على:

$$h^2=\frac{4\delta}{M_2} \qquad \Rightarrow \qquad h=2\sqrt{\frac{\delta}{M_2}}$$

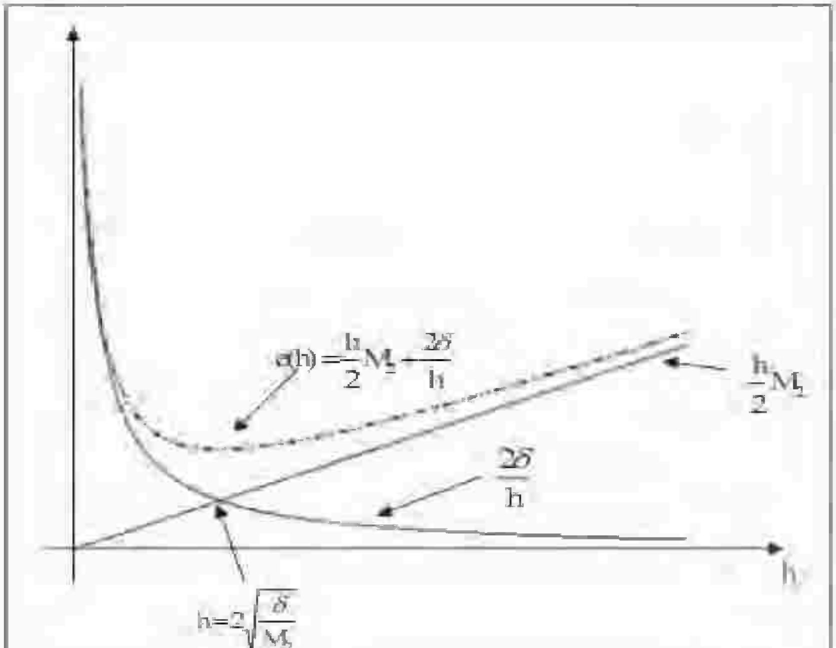
وبما أن $\max\limits_{1.9\le x\le 2.1}|f''(x)|=\max\limits_{1.9\le x\le 2.1}|\frac{2}{x^3}|=0.2915877$ و $\delta=5\times10^{-5}$ فيكون لدينا:

$$h = 2\sqrt{\frac{5\times10^{-5}}{0.2915877}} \quad \Rightarrow \quad h = 0.0261897$$

وهي القيمة المثلى التي تعطينا أفضل تقريب ممكن لـ $f''(2)$.

ملاحظة:

نذكر هنا أنه قد يكون من الصعب استخدام قيمة h المثلى وفي مثل هذه الحالات نستخدم قيمة h الأكبر مباشرة وليست الأصغر حيث إن القيمة الأصغر تجعل مقدار الخطأ يكون كبيراً مقارنة بذلك الناتج من استخدام القيمة الأكبر. انظر الشكل رقم (٥,١) الذي يوضح نمو الخطأ على طرفي القيمة المثلى لـ h .



الشكل رقم (٥,١). نمو الخطأ على طرفي القيمة المثلى لـ h .

(٥,٢) صيغ عددية للتفاضلات العليا
Numerical Methods for Higher Derivatives

هنا سندرس بعض الصيغ العددية لحساب قيم تقريبية للتفاضلات الثاني، الثالث والرابع للدالة $f(x)$ عند $x = x_0$. سوف نستخدم كثيرة الحدود تايلور لاستنتاج بعض هذه الصيغ ونترك الباقي للقارئ حيث يمكن أن يستخدم كثيرة الحدود تايلور أو لاغرانج لاستنتاجها (انظر التمارين).

بداية نستنتج صيغة عددية لحساب $f''(x_0)$. لتكن $f \in C^4(I)$، حيث إن I فترة مفتوحة تحتوي على الأعداد $x_0 - h$، x_0 و $x_0 + h$ حيث إن $h \neq 0$. بنشر كثيرة الحدود تايلور ذات الدرجة الثالثة للدالة $f(x)$:

(5.26)

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \frac{(x-x_0)^4}{4!} f^{(4)}(\eta(x))$$

وبوضع $x = x_0 - h$ في المعادلة (5.26) يكون لدينا:

(5.27)

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) - \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(\eta_{-1})$$

حيث إن η_{-1} تقع بين $x_0 - h$ و x_0، و بوضع $x = x_0 + h$ في (5.26) نحصل على:

(5.28)

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(\eta_{+1})$$

حيث إن η_{+1} تقع بين x_0 و و $x_0 + h$.

بجمع المعادلتين (5.27) و (5.28) نحصل على:

$$f(x_0 - h) + f(x_0 + h) = 2f(x_0) + h^2 f''(x_0) + \frac{h^4}{24}[f^{(4)}(\eta_{-1}) + f^{(4)}(\eta_{+1})]$$

و بحل المعادلة الأخيرة بالنسبة لـ $f''(x_0)$ يكون لدينا:

$$f''(x_0)=\frac{1}{h^2}[f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)]-\frac{h^2}{24}[f^{(4)}(\eta_{-1})+f^{(4)}(\eta_{+1})]$$

الآن بما أن $f^{(4)}(x)$ دالة متصلة على الفترة $[x_0-h,x_0+h]$ فإنه حسب النظرية الوسيطية يوجد عدد η في الفترة (x_0-h,x_0+h) بحيث إن:

$$f''(x_0)=\frac{1}{h^2}[f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)]-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\eta) \qquad (5.29)$$

وهي الصيغة المركزية لحساب $f''(x_0)$، حيث إن التفاضل العددي هو:

$$f''(x_0)\approx D_h^2(f(x_0))=\frac{1}{h^2}[f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)]$$

والخطأ المرافق له هو $-\frac{h^2}{12}[f^{(4)}(\eta)$، وبالتالي تكون الصيغة المركزية (5.29) ذات رتبة تقاربية ثانية. المثال التالي يستعرض استخدام هذه الصيغة.

مثال (٥,٤)

اعتبر المعلومات الموجودة في المثال (٥,٢)، نريد أن نوجد القيم التقريبية الممكنة لـ $f''(0.5)$ وذلك باستخدام (5.29). في الواقع يمكن استخدام الصيغة (5.29) عندما تكون $h=0.1$ و $h=0.2$ حيث نحصل على القيم التقريبية:

$$f''(0.5)\approx D_{0.1}^2(f(x_0))=\frac{1}{(0.1)^2}[f(0.4)-2f(0.5)+f(0.6)]=-0.44544$$

و

$$f''(0.5)\approx D_{0.2}^2(f(x_0))=\frac{1}{(0.2)^2}[f(0.3)-2f(0.5)+f(0.7)]=-0.44844$$

والأخطاء المرافقة لها:

$|f''(0.5)-D_{0.1}^2(f(0.5))|=0.001$ و $|f''(0.5)-D_{0.2}^2(f(0.5))|=0.004$.

نلاحظ أن الخطأين يحققان العلاقة $0.001=\frac{0.004}{(2)^2}$ (أو $0.004=0.001(2)^2$) وهي التي تدل على أن الطريقة المستخدمة ذات رتبة تقاربية ثانية، وهو ما يتوافق مع

الواقع. راجع أيضاً التعليق المكتوب بعد المثال (٥,٢). نشير هنا إلى أنه يمكن حساب حداً أعلى للخطأ للتقريبين كما في المثالين (٥,١) و (٥,٢).

نذكر هنا أنه يوجد صيغ عددية ذات رتب تقاربية عليا لتقريب التفاضل الثاني والتي يمكن استنتاجها باستخدام متسلسلة تايلور. الجدول رقم (٥,١) يتضمن بعض هذه الصيغ، ونترك للقارئ استنتاجها في التمارين.

لنستنتج الآن صيغة عددية لحساب التفاضل الثالث للدالة $f(x)$ عندما $x = x_0$ عدد ثابت. لعمل ذلك لنفترض أن $f \in C^4(I)$ وأن I فترة مفتوحة تتضمن الأعداد المختلفة $x_0 - 2h$، $x_0 - h$، x_0 و $x_0 + h$، حيث إن $h \neq 0$. بنشر كثيرة الحدود تايلور ذات الدرجة الثالثة للدالة $f(x)$ عند العدد $x = x_0$ نحصل المعادلة (5.26)، وبالتعويض في هذه المعادلة عن $x_0 - 2h$، $x = x_0 - h$ و $x_0 + h$، بالتتابع نحصل على:

$$f(x_0 - 2h) = f(x_0) - 2hf'(x_0) + \frac{4h^2}{2!} f''(x_0) - \frac{8h^3}{3!} f'''(x_0) + \frac{16h^4}{4!} f^{(4)}(\eta_{-2}) \tag{5.30}$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) - \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(\eta_{-1}) \tag{5.31}$$

و

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(\eta_1) \tag{5.32}$$

على الترتيب، حيث إن η_{-2} تقع بين x_0 و $x_0 - 2h$، η_{-1} تقع بين x_0 و $x_0 - h$ و η_{+1} تقع بين x_0 و $x_0 + h$. بجمع المعادلة (5.30) مضروبة بـ -1 مع المعادلة (5.31) مضروبة بـ 3 وإضافة الناتج إلى المعادلة (5.32) يكون لدينا:

$$-f(x_0-2h)+3f(x_0-h)+f(x_0+h)$$
$$=3f(x_0)+h^3f'''(x_0)+\frac{h^4}{24}[-16f^{(4)}(\eta_{-2})+3f^{(4)}(\eta_{-1})+f^{(4)}(\eta_1)]$$

وبحل هذه المعادلة بالنسبة لـ $f'''(x_0)$ نحصل على:

$$f'''(x_0)=\frac{1}{h^3}[-f(x_0-2h)+3f(x_0-h)-3f(x_0)+f(x_0+h)]$$
$$+\frac{h^4}{24}[-16f^{(4)}(\eta_{-2})+3f^{(4)}(\eta_{-1})+f^{(4)}(\eta_1)] \tag{5.33}$$

و بما أن $f^{(4)}(x)$ دالة متصلة على الفترة $[x_0-2h, x_0+h]$ فإنه حسب النظرية الوسيطية يوجد عدد η في الفترة (x_0-2h, x_0+h) بحيث إن:

(5.34)

$$f'''(x_0)=\frac{1}{h^3}[-f(x_0-2h)+3f(x_0-h)-3f(x_0)+f(x_0+h)]+\frac{h}{2}f^{(4)}(\eta)$$

تسمى هذه الصيغة أمامية إذا كانت $h>0$، وخلفية إذا كانت $h<0$. من الواضح أن رتبة التقارب (الدقة) للصيغة العددية (5.34) هي الواحد، أي أن $O(h)$. نشير هنا إلى أننا سنرمز للتفاضل العددي بالرمز:

(5.35)

$$f'''(x_0)\approx D_h^3(f(x_0))=\frac{1}{h^3}[-f(x_0-2h)+3f(x_0-h)-3f(x_0)+f(x_0+h)]$$

يمكن وبأسلوب مشابه استنتاج صيغ عددية ذات دقة أفضل لتقريب $f'''(x_0)$، راجع الجدول رقم (٥،١) والتمارين. لاحظ أن الصيغة الأخرى لتقريب $f'''(x_0)$ والموجودة في الجدول هي صيغة مركزية. أيضاً يمكن استخدام نظرية تايلور لاستنتاج صيغة عددية لتقريب التفاضل الرابع للدالة $f(x)$ عندما $x=x_0$ عدد ثابت. انظر الجدول رقم (٥،١) والتمارين.

الجدول رقم (٥,٢) يحتوي على بعض الصيغ العددية لتقريب التفاضلات الأولى، الثانية، الثالثة والرابعة للدالة $f(x)$ عند $x = x_0$. للإطلاع على المزيد من الصيغ يمكن للقارئ الرجوع إلى كتاب Collatz.

الجدول رقم (٥,٢). بعض الصيغ العددية لحساب التفاضلات.

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}[f(x_0+h) - f(x_0)] - \frac{h}{2}f''(\eta_0)$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)] + \frac{h^2}{3}f'''(\eta_0)$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0+h) - f(x_0-h)] - \frac{h^2}{6}f'''(\eta_0)$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}[f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0-2h)] - \frac{h^4}{30}f^{(5)}(\eta_0)$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}[f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)] - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\eta)$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{12h^2}[-f(x_0-2h) + 16f(x_0-h) - 30f(x_0) + 16f(x_0+h) - f(x_0+2h)] + \frac{h^4}{90}f^{(4)}(\eta)$$

$$f'''(x_0) = \frac{1}{h^3}[-f(x_0-2h) + 3f(x_0-h) - 3f(x_0) + f(x_0+h)] + \frac{h}{2}f^{(4)}(\eta)$$

$$f'''(x_0) = \frac{1}{2h^3}[-f(x_0-2h) + 2f(x_0-h) - 2f(x_0+h) + f(x_0+2h)] - \frac{h^2}{4}f^{(4)}(\eta)$$

$$f^{(4)}(x_0) = \frac{1}{h^4}[f(x_0-2h) - 4f(x_0-h) + 6f(x_0) - 4f(x_0+h) + f(x_0+2h)] - \frac{h^2}{6}f^{(4)}(\eta)$$

مثال (٥,٥)

لتكن الدالة $f(x)=\sinh x$ معرفة على الفترة $[0.8,1.1]$. نريد استخدام الصيغة العددية (5.34) لحساب قيمة تقريبية لـ $f'''(1)$ وذلك بوضع $h=0.1$. بداية بما أن $x_0=1$ فإنه يكون لدينا $x_0-2h=0.8$، $x_0-h=0.9$ و $x_0+h=1.1$ وبالتعويض عن ذلك في الصيغة (5.35) نحصل على:

$$f'''(1)\approx D^3_{0.1}(f(1))=\frac{1}{(0.1)^3}[-\sinh 0.8+3\sinh 0.9-3\sinh 1+\sinh 1.1]=1.488084$$

نشير هنا إلى أنه بما أن $f'''(1)=\cosh 1=1.543081$ فإن الخطأ (المضبوط) هو $|f'''(1)-D^3_{0.1}(f(1))|\approx 0.05499$. أيضاً كما هو الحال بالنسبة للصيغ الأخرى يمكن حساب حداً أعلى للخطأ المتعلق بهذا التقريب حيث حصلنا على $|f'''(1)-D^3_{0.1}(f(1))|\leq 0.06678$.

(٥,٣) استيفاء ريشاردسون لحساب التفاضل
Richardson Extrapolation

استعرضنا في البنود السابقة بعض الصيغ العددية لحساب قيم تقريبية لتفاضلات الدالة $f(x)$ عند العدد x_0. في هذا البند سوف نُحسّن دقة القيم المحسوبة لهذه التفاضلات باستخدام أسلوب ريشاردسون والذي يتضمن حساب عدة قيم تقريبية للتفاضل، ثم ندمج هذه القيم للحصول على قيمة تقريبية تكون أفضل لتقريب التفاضل المراد حسابه.

لنعتبر الصيغة العددية (5.6) والتي يمكن كتابتها بالشكل:

$$\frac{1}{h}[f(x_0+h)-f(x_0)]=f'(x_0)+\frac{h}{2}f''(\xi_0) \qquad (5.36)$$

حيث إن ξ_0 تقع بين x_0+h و x_0. لنرمز للتفاضل العددي بالرمز:

$$D(h) = \frac{1}{h}[f(x_0 + h) - f(x_0)] \approx f'(x_0)$$

ولنضع $u = f'(x_0)$ و $v = \frac{1}{2} f''(\xi_0)$. بالتالي يمكن كتابة المعادلة (5.36) بالشكل:

$$D(h) = u + hv \tag{5.37}$$

الفكرة الرئيسة هي حساب قيمتين تقريبيتين $D(h_1)$ و $D(h_2)$ ومن ثم استخدامهما لحذف v للحصول على قيمة تقريبية أفضل لـ $f'(x_0)$. بداية نلاحظ بأنه يكون لدينا:

$$D(h_1) = u + h_1 v \quad \text{و} \quad D(h_2) = u + h_2 v$$

وبحذف v بين هاتين المعادلتين نحصل على:

$$u = \frac{h_2 D(h_1) - h_1 D(h_2)}{h_2 - h_1} \tag{5.38}$$

وبوضع $h_1 = h$ و $h_2 = sh$، حيث إن s عدد حقيقي لا يكون مساوياً للصفر أو الواحد، تأخذ المعادلة الشكل:

$$u = \frac{sD(h) - D(sh)}{s-1} \tag{5.39}$$

وإذا كان $s = \frac{1}{2}$ فإن المعادلة الأخيرة تصبح بالشكل:

$$u = 2D(0.5h) - D(h) \tag{5.40}$$

هذه المعادلة تمثل التقريب u وهو تقريب أفضل لـ $f'(x_0)$ من التقريبيين $D(h)$ و $D(0.5h)$. لنرمز لهذا التقريب بالرمز $u = D_1(h)$. بما أن v لا تكون بشكل عام مستقلة عن h، فإن التقريب $u = D_1(h)$ لا يعطينا القيمة المضبوطة للتفاضل $f'(x_0)$. يستعرض المثال (٥,٦) كيفية استخدام هذا الأسلوب.

مثال (٥,٦)

اعتبر استخدام أسلوب ريشاردسون لحساب قيم تقريبية لـ $f'(0.5)$ للدالة $f(x) = \sinh x$. سوف نحسب $D(h)$، من أجل $h = 0.2, 0.1, 0.05, 0.025$، ومن ثم يتم حساب $D_1(h)$ حيث إن $h = 0.2, 0.1, 0.05$. بداية يكون لدينا:

$$D(0.2)=\frac{1}{0.2}[f(0.7)-f(0.5)]=\frac{1}{0.2}[\sinh 0.7-\sinh 0.5]=1.18744$$

و

$$D(0.1)=\frac{1}{0.1}[f(0.6)-f(0.5)]=\frac{1}{0.1}[\sinh 0.1-\sinh 0.5]=1.15558$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$D_1(0.2)=2D(0.1)-D(0.2)=1.123726$$

النتائج العددية لهذا المثال موجودة في الجدول رقم (٥,٣) حيث يتضح أن دقة القيم التقريبية تتحسن تدريجياً.

الجدول رقم (٥,٣). النتائج العددية للمثال (٥,٦).

h	x	$\sinh x$	$D(h)$	$D_1(h)$	$\lvert f'(x_0)-D_1(h)\rvert$
	0.5	0.52109			
0.2	0.7	0.75858	1.18744	1.12373	0.00390
0.1	0.6	0.63665	1.15558	1.12667	0.00096
0.05	0.55	0.57815	1.14113	1.12739	0.00002
0.025	0.525	0.54945	1.13426		

نشير هنا إلى أنه يمكن استخدام استيفاء ريشاردسون لاستنتاج صيغ عددية ذات رتب تقاربية عليا لحساب التفاضل. فمثلاً، لنعتبر مفكوك متسلسلة تايلور:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\frac{h^3}{3!}f'''(\xi_1) \qquad (5.41)$$

حيث إن ξ_1 تقع بين $x_0 + h$ و x_0. وبحل هذه المعادلة بالنسبة لـ $f'(x_0)$ يكون لدينا:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}[f(x_0+h) - f(x_0)] - \frac{h}{2}f''(x_0) + \frac{h^2}{6}f'''(\xi_1) \tag{5.42}$$

وبما أن $\frac{h}{2}$ غير مناسبة لنقطة العقدة، فإننا نستبدل h بـ $2h$ في المعادلة (5.42) لنحصل على:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0+h) - f(x_0)] - hf''(x_0) + \frac{4h^2}{6}f'''(\xi_2) \tag{5.43}$$

حيث إن ξ_2 تقع بين $x_0 + 2h$ و x_0. وبحذف $f''(x_0)$ بين المعادلتين (5.42) و(5.43) يكون لدينا:

(5.44)

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)] + \frac{h^2}{3}[2f'''(\xi_2) - f'''(\xi_1)]$$

وإذا كانت $f'''(x_0)$ دالة متصلة على الفترة $[x_0, x_0+2h]$ فإنه حسب نظرية القيمة المتوسطة يوجد عدد ξ_0 في الفترة (x_0, x_0+2h) بحيث إن:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)] + \frac{h^2}{3}f'''(\xi_0) \tag{5.45}$$

هذه المعادلة هي صيغة الثلاث نقاط (5.10) والتي تم استنتاجها باستخدام كثيرة الحدود لاغرانج في البند (٥,١).

(٥,٤) التكامل العددي
Numerical Integration

لتكن $f \in C^{n+1}[a,b]$ حيث إن الفترة $[a,b]$ تحتوي على الأعداد المختلفة $x_0, x_1, \ldots, x_n$ والتي عددها $n+1$، بحيث إن $x_i = a + ih$ من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n$ ، $h = \frac{b-a}{n}$، $x_0 = a$، $x_n = b$ و n عدد صحيح موجب. إذن،

حسب النظرية (٤,١) توجد كثيرة حدود وحيدة $p(x)$ من الدرجة n على الأكثر والخطأ المرافق لها $e(x)$ بحيث إن:

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x)+e(x) \\ &= \sum_{j=0}^{n} L_j(x) f(x_j) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta(x)) \prod_{i=0}^{n}(x-x_i) \end{aligned} \tag{5.46}$$

حيث إن $\eta(x)$ تقع في الفترة (a,b). بتكامل طرفي المعادلة (5.46) من a إلى b نحصل على المعادلة:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \sum_{j=0}^{n} L_j(x) f(x_j)dx + \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(\eta(x)) \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)dx$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{n} a_j f(x_j) + \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(\eta(x)) \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)dx \tag{5.47}$$

حيث إن $a_j = \int_a^b L_j(x)dx$ من أجل $j=0,1,2,\ldots,n$. بناء على ذلك فإن صيغة التكامل العددي هي:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=0}^{n} a_j f(x_j) \tag{5.48}$$

والخطأ المرافق لها هو:

$$E(f) = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(\eta(x)) \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)dx \tag{5.49}$$

قبل مناقشة الصيغة العامة (5.47) لحساب التكامل العددي لندرس صيغتي شبه المنحرف وسمبسون واللتين يتم الحصول عليهما بوضع $n=1$ و $n=2$ في المعادلة (5.47)، على الترتيب.

١ - صيغة شبه المنحرف

عندما $n=1$ يكون لدينا العددين x_0 و x_1، حيث إن $x_0=a$، $x_1=b$ و $h=x_1-x_0$. بالتالي فإن المعادلة (5.47) تأخذ الشكل:

$$\int_a^b f(x)=\sum_{j=0}^{1}a_j f(x_j)+\frac{1}{2!}\int_{x_0}^{x_1} f''(\eta(x))\prod_{i=0}^{1}(x-x_i)dx \qquad (5.50)$$

حيث إن التكامل العددي هو:

$$\begin{aligned}T_1(f)&=a_0f(x_0)+a_1f(x_1)\\&=\int_{x_0}^{x_1}\frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0)dx+\int_{x_0}^{x_1}\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)dx\\&=[\frac{(x-x_1)^2}{2(x_0-x_1)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2(x_1-x_0)}f(x_1)]_{x_0}^{x_1}\\&=\frac{(x_1-x_0)^2}{2(x_1-x_0)}f(x_1)-\frac{(x_0-x_1)^2}{2(x_0-x_1)}f(x_0)\\&=\frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)]\end{aligned} \qquad (5.51)$$

والخطأ المرافق له: $E(f)=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} f''(\eta(x))(x-x_0)(x-x_1)dx$

وبما أن إشارة الدالة $(x-x_0)(x-x_1)$ لا تتغير على الفترة $[x_0,x_1]$ فإنه حسب نظرية القيمة المتوسطة للتكامل (نظرية ١,٦) يوجد عدد ξ في الفترة (x_0,x_1) بحيث إن:

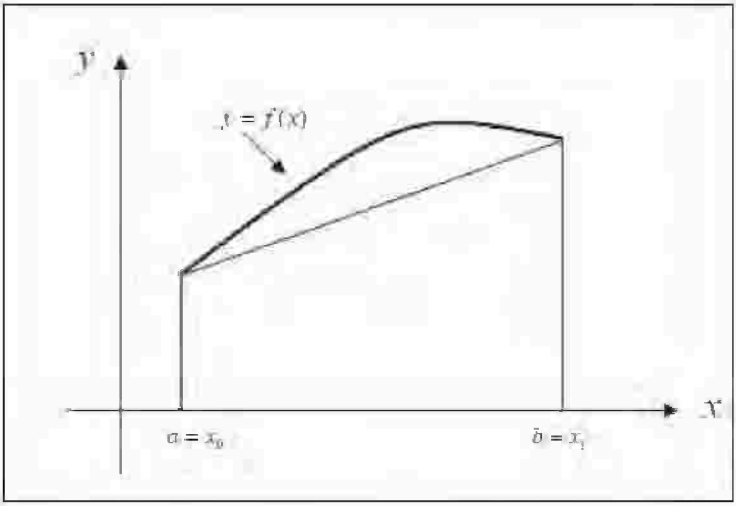
$$\begin{aligned}E(f)&=\frac{1}{2}f''(\xi)\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_1)dx\\&=\frac{1}{2}f''(\xi)[\frac{x^3}{3}-\frac{(x_0+x_1)x^2}{2}+x_0x_1x]_{x_0}^{x_1}\\&=-\frac{h^3}{12}f''(\xi)\end{aligned} \qquad (5.52)$$

باستخدام المعادلتين (5.51) و (5.52) يمكن كتابة المعادلة (5.50) بالشكل:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)] - \frac{h^3}{12}f''(\xi) \qquad (5.53)$$

وهي صيغة شبه المنحرف لحساب التكامل المحدود. من الواضح أنها ذات رتبة تقاربية ثالثة ($O(h^3)$).

نشير هنا إلى أنه إذا كانت $f(x) \geq 0$ لكل $x \in [a,b]$ فإن الشكل رقم (٥,٢) يوضح التكامل العددي (5.51) وهو مساحة شبه المنحرف الواقع تحت كثيرة الحدود الخطية الواصلة بين النقطتين $(x_0, f(x_0))$ و $(x_1, f(x_1))$ والذي يمكن مقارنته بالتكامل الفعلي $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ والذي تمثله مساحة ما تحت منحنى الدالة $f(x)$.



الشكل رقم (٥,٢). صيغة شبه المنحرف عندما $f(x) \geq 0$.

٢- صيغة سمبسون

عندما $n = 2$ يكون لدينا الأعداد الثلاثة x_0 ، x_1 و x_2 ، حيث إن $x_0 = a$ ، $x_1 = a + h$ ، $x_2 = b$ و $h = \dfrac{b-a}{2}$. بناء على ذلك ، فإن المعادلة (5.47) تأخذ الشكل:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{2} a_j f(x_j) + \frac{1}{3!}\int_{x_0}^{x_2} f'''(\eta(x))\prod_{i=0}^{2}(x - x_i)dx \qquad (5.54)$$

التكامل العددي الموجود في المعادلة (5.54) يمكن كتابته بالشكل:

$$\begin{aligned} S_2(f) &= a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) \\ &= \int_{x_0}^{x_2}\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}dx f(x_0) + \int_{x_0}^{x_2}\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}dx f(x_1) \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_2}\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}dx f(x_2) \qquad (5.55) \\ &= \frac{1}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)dx f(x_0) - \frac{1}{h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_2)dx f(x_1) \\ &\quad + \frac{1}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_1)dx f(x_2) \end{aligned}$$

سوف نحسب التكاملات الموجودة في الطرف الأيمن للمعادلة (5.55) بالتتالي:

بالنسبة للتكامل الأول يكون لدينا:

$$\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)dx = \int_{x_0}^{x_2}(x-x_0-h)(x-x_0-2h)dx$$

وباستخدام التعويض $u = x - x_0$ فإننا نحصل على $du = dx$ ، $x - x_0 - h = u - h$ و $x - x_0 - 2h = u - 2h$. وبالنسبة لحدود التكامل فإنه

عندما $x = x_0$ يكون لـديـنا $u = 0$ وعنـدما $x = x_0 + 2h$ نحـصـل عـلى $u = 2h$.
وبالتالي يكون التكامل الأخير بالشكل:

$$\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)dx = \int_0^{2h}(u-h)(u-2h)du$$

$$= \frac{1}{3}u^3 - \frac{3}{2}hu^2 + 2h^2u \Big]_0^{2h} \qquad (5.56)$$

$$= \frac{8}{3}h^3 - 6h^3 + 4h^3 = \frac{2}{3}h^3$$

وبأسلوب مشابه يكون لدينا:

$$\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_2)dx = \int_0^{2h}u(u-2h)du = -\frac{4}{3}h^3 \qquad (5.57)$$

و

$$\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_1)dx = \int_0^{2h}u(u-h)du = \frac{2}{3}h^3 \qquad (5.58)$$

وبالتعويض عن المعادلات (5.56 – 5.58) في المعادلة (5.55) نحصل على:

$$S_2(f) = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \qquad (5.59)$$

وهو التكامل العددي الموجود في (5.54). أما بالنسبة لحد الخطأ المرافق له والموجود في (5.54) فهو:

$$E(f) = \frac{1}{6}\int_{x_0}^{x_2} f'''(\eta(x))(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)dx \qquad (5.60)$$

من الواضح أن الدالة $(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ تتغير إشارتها عند $x_1 = a+h$ وبالتالي لا نستطيع استخدام نظرية القيمة المتوسطة في التكامل (نظرية ١,٦) كما هو الحال بالنسبة لصيغة شبه المنحرف. من ناحية أخرى، لحساب التكامل الموجود في حد الخطأ (5.60) لنعرّف الدالة:

$$G(x)=\int_{x_0}^{x}(t-x_0)(t-x_1)(t-x_2)dt$$

وبالتالي فإنه يمكن إثبات أن (انظر التمارين):

$$G(x)=\frac{1}{4}(x-x_0)^2(x-x_2)^2$$

من الواضح أن $G(x_0)=0$ ، $G(x_2)=0$ و $G(x)\geq 0$ لكل x . إذن يكون لدينا:

$$\int_{x_0}^{x_2} f'''(\eta(x))\prod_{i=0}^{2}(x-x_i)dx=\int_{x_0}^{x_2} f'''(\eta(x))G'(x)dx$$

وبالتكامل بالتجزيء نحصل على:

$$\int_{x_0}^{x_2} f'''(\eta(x))\prod_{i=0}^{2}(x-x_i)dx=f'''(\eta(x))G(x)\Big]_{x_0}^{x_2}-\int_{x_0}^{x_2}G(x)\frac{d}{dx}[f'''(\eta(x))]dx \tag{5.61}$$

$$=-\frac{1}{4}\int_{x_0}^{x_2}G(x)f^{(4)}(\zeta(x))dx$$

وذلك لأن $G(x_0)=0$ ، $G(x_2)=0$ و $\frac{d}{dx}[f'''(\eta(x))]=\frac{3!}{4!}f^{(4)}(\zeta(x))$ ، حيث إن $x_0<\eta(x)<x_2$ (انظر تمارين الفصل الرابع).

الآن بما أن $G(x)$ لا تتغير إشارتها على الفترة $[x_0,x_2]$ فإنه حسب نظرية القيمة المتوسطة يوجد عدد ξ في $[x_0,x_2]$ بحيث إن:

$$\int_{x_0}^{x_2} f'''(\eta(x))\prod_{i=0}^{2}(x-x_i)dx=-\frac{1}{4}f^{(4)}(\xi)\int_{x_0}^{x_2}G(x)dx$$

وبالتكامل بالتجزيء مرة أخرى يكون لدينا:

$$\int_{x_0}^{x_2} f'''(\eta(x))\prod_{i=0}^{2}(x-x_i)dx = -\frac{1}{4}f^{(4)}(\xi)[xG(x)]_{x_0}^{x_2} - \int_{x_0}^{x_2} xG'(x)dx] \tag{5.62}$$

$$= \frac{1}{4}f^{(4)}(\xi)\int_{x_0}^{x_2} x(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)dx$$

$$= -\frac{1}{15}h^5 f^{(4)}(\xi)$$

إذن من المعادلات (5.54 - 5.62) نحصل على الصيغة العددية:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)] - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi) \tag{5.63}$$

وهي صيغة سمبسون لحساب التكامل المحدود.

ملاحظة:

يتضح من صيغة شبه المنحرف (5.53) أنها تحسب القيمة الفعلية للتكامل عندما تكون f دالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى على الأكثر. أما صيغة سمبسون (5.63) فإنها تحسب القيمة الفعلية للتكامل إذا كانت f دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة أو أقل.

إن صيغتي شبه المنحرف و سمبسون هما حالتين خاصتين من صنف معين من الطرائق العددية لحساب التكامل المحدود تسمى صيغ نيوتن- كوتس المغلقة والتي يمكن تعريفها كما يلي:

تعريف (٥,١)

ليكن لدينا الأعداد المختلفة $x_i = a + ih$ من أجل $i = 0,1,2,\dots,n$، $h = \frac{b-a}{n}$، $x_0 = a$، $x_n = b$ و n عدد صحيح موجب. يمكن كتابة صيغة نيوتن- كوتس المغلقة بالشكل:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=0}^{n} a_j f(x_j) \tag{5.64}$$

حيث إن $a_j = \int_a^b L_j(x)dx$ من أجل $j = 0,1,2,\ldots,n$.

النظرية التالية تتضمن الخطأ المرافق لصيغ نيوتن- كوتس المغلقة.

نظرية (٥,١)

لتكن المعادلة (5.64) ترمز لصيغة نيوتن- كوتس المغلقة للأعداد المختلفة $x_i = a + ih$ من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n$ ، $h = \dfrac{b-a}{n}$ ، $x_0 = a$ ، $x_n = b$ و n عدد صحيح موجب، فإنه يوجد عدد η في الفترة (a,b) بحيث إن:

$$\int_a^b f(x)dx - \sum_{j=0}^{n} a_j f(x_j) = \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta) \int_0^n t(t-1)(t-2)\cdots(t-n)dt \tag{5.65}$$

إذا كانت n عدد فردي و $f \in C^{n+1}[a,b]$ ، وأن:

$$\int_a^b f(x)dx - \sum_{j=0}^{n} a_j f(x_j) = \frac{h^{n+3}}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\eta) \int_0^n t^2(t-1)(t-2)\cdots(t-n)dt \tag{5.66}$$

إذا كانت n عدد زوجي و $f \in C^{n+2}[a,b]$.

يمكن الإطلاع على برهان النظرية في كتاب Isaacson and Keller.

يتضح من النظرية (٥,١) أنه إذا كانت n عدداً زوجياً فإن رتبة الطريقة تكون $n+3$ بالرغم من أن كثيرة الحدود تكون من الدرجة n. أما إذا كانت n عدداً فردياً فإن رتبة الطريقة تكون $n+1$. بناء على ذلك، إذا كانت الطريقة التي بين أيدينا تتضمن عدداً زوجياً من العقد ونريد أن نضيف أعداداً أخرى لتحسين الدقة الحسابية فإنه يجب إضافة عددين لعمل ذلك، لأن إضافة عدداً واحداً لن يحسّن دقة الحسابات.

نذكر هنا بعض صيغ نيوتن- كوتس المغلقة:

بداية، كما سبق أن أشرنا، بأنه عندما $n=1$ و $n=2$ يكون لدينا صيغتي شبه المنحرف و سمبسون على الترتيب. أما عندما $n=3$ فيكون لدينا صيغة $\frac{3}{8}$ سمبسون:

(5.67)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8}[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)] - \frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\xi)$$

وأخيراً، عندما $n=4$ نحصل على الصيغة العددية التالية:

(5.68)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{2h}{45}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)] - \frac{8h^7}{945}f^{(6)}(\xi)$$

وهي ذات رتبة تقاربية سابعة والذي يعتبر أكثر من المطلوب تطبيقياً. في الواقع، من الناحية العملية تعتبر صيغة سمبسون من أكثر الصيغ استخداماً حيث إنها تُستخدم على نطاق واسع لحل المسائل التطبيقية التي تتضمن تكاملات محدودة وذلك لأن دقتها الحسابية عادة ما تكون مُرضية (عملياً) وسهلة الاستخدام.

قبل الشروع بطرح مثالاً عددياً يوضح تطبيق الطرائق العددية الآنفة الذكر نشير هنا إلى أنه يمكن استخدام نظرية (٥,١) لاستنتاج حد الخطأ المرافق لكل من طريقتي شبه المنحرف وسمبسون ولكننا نترك ذلك للقارئ للمناقشة في التمارين.

مثال (٥,٧)

في هذا المثال نستخدم الصيغ العددية (5.53)، (5.63) ، (5.67) و (5.68) لحساب قيم تقريبية للتكامل المحدود $\int_1^2 \frac{1}{(x+2)^2}dx$ ، ثم سنحسب الأخطاء الفعلية المتعلقة بها

ونقارنها. أيضاً سوف نحسب حداً أعلى للخطأ المتعلق بطريقة سمبسون.

لاستخدام طريقة شبه المنحرف نلاحظ أولاً أن $x_0 = 1$ ، $x_1 = 2$ و $h = b - a = 1$.

وبالتالي يكون لدينا:

$$T_1 = \frac{1}{2}[f(1) + f(2)] = \frac{1}{2}[\frac{1}{9} + \frac{1}{16}] = 0.08680556$$

أما بالنسبة لطريقة سمبسون فيكون لدينا $x_0 = 1$ ، $x_1 = \frac{3}{2}$ ، $x_2 = 2$

و $h = \frac{b-a}{2} = \frac{1}{2}$ والقيمة التقريبية للتكامل:

$$S_2 = \frac{1/2}{3}[f(1) + 4f(f(1.5) + f(2)] = \frac{1}{6}[\frac{1}{9} + 4\frac{4}{49} + \frac{1}{16}] = 0.08335695$$

وبالنسبة لطريقة $\frac{3}{8}$ سمبسون فيكون لدينا $x_0 = 1$ ، $x_1 = \frac{4}{3}$ ، $x_2 = \frac{5}{3}$ ، $x_3 = 2$ ،

و $h = \frac{b-a}{3} = \frac{1}{3}$

$$St_3 = \frac{3(1/3)}{8}[f(1) + 3f(f(\frac{4}{3}) + 3f(\frac{5}{3}) + f(2)]$$

$$= \frac{1}{8}[\frac{1}{9} + 3\frac{9}{100} + 3\frac{9}{121} + \frac{1}{16}] = 0.08334395$$

وأخيراً بالنسبة للصيغة العددية (5.68) فإنه يكون لدينا $x_0 = 1$ ، $x_1 = \frac{5}{4}$ ،

$x_2 = \frac{6}{4}$ ، $x_3 = \frac{7}{4}$ ، $x_4 = 2$ ، $h = \frac{b-a}{4} = \frac{1}{4}$ و

$$St_4 = \frac{2(1/4)}{45}[7f(1) + 32f(f(\frac{5}{4}) + 12f(\frac{6}{4}) + 32f(\frac{7}{4}) + 7f(2)]$$

$$= \frac{1}{90}[7\frac{1}{9} + 32\frac{16}{69} + 12\frac{4}{49} + 32\frac{16}{225} + 7\frac{1}{16}] = 0.083333455$$

وبمعرفة القيمة المضبوطة للتكامل:

$$I(f) = \int_1^2 \frac{1}{(x+2)^2}dx = -\frac{1}{x+2}\Big]_1^2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

فإنه يمكن حساب الأخطاء المضبوطة حيث إنه حصلنا على:

$|I(f)-T_1(f)|=3.47\times10^{-3}$ ، $|I(f)-S_2(f)|=2.36\times10^{-5}$ ،

$|I(f)-St_3(f)|=1.06\times10^{-5}$ و $|I(f)-St_4(f)|=1.22\times10^{-7}$.

والتي تتوافق مع الأخطاء المرافقة للصيغ المستخدمة حيث إنه كلما زادت الرتبة التقاربية للصيغة حصلنا على قيمة تقريبية أفضل.

الآن لنحسب حداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب الذي حصلنا عليه باستخدام طريقة سمبسون حيث إنه يكون لدينا:

$$|I(f)-S_2(f)|\le\left|-\frac{h^5}{90}\right|\max_{x\in[1,2]}|f^{(4)}(x)|$$

وبما أن $h=0.5$ و $\max_{x\in[1,2]}|f^{(4)}(x)|=\max_{x\in[1,2]}\left|\frac{120}{(x+2)^6}\right|=\frac{40}{243}$ فإننا نحصل على:

$$|I(f)-S_2(f)|\le\left|-\frac{0.5^5}{90}\right|\frac{40}{243}=5.72\times10^{-5}$$

وهو أكبر من الخطأ المضبوط المتعلق باستخدام هذه الطريقة كما يجب أن يكون.

نعلم مما سبق أننا استكملنا الدالة $f(x)$ عند الأعداد المختلفة $x_i=a+ih$ من أجل $i=0,1,2,\ldots,n$ حيث إن $h=\frac{b-a}{n}$ ، $x_0=a$ ، $x_n=b$ و n عدد صحيح موجب، باستخدام كثيرة حدود من الدرجة n على الأكثر فحصلنا على صيغ نيوتن-كوتس المغلقة. الآن لنستكمل الدالة $f(x)$ عند الأعداد $x_i=x_0+ih$ من أجل $i=0,1,2,\ldots,n$ عندما يكون $h=\frac{b-a}{n+2}$ و $x_0=a+h$. وهذا يجعل $x_n=b-h$ ، $x_{-1}=a$ و $x_{n+1}=b$. وبالتالي يكون لدينا:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{x_{-1}}^{x_{n+1}}f(x)dx\approx\sum_{j=0}^{n}a_jf(x_j)\qquad(5.69)$$

حيث إن $a_j=\int_a^b L_j(x)dx$ من أجل $j=0,1,2,\ldots,n$.

تسمى صيغ التكامل العددي المعرفة في المعادلة (5.69) صيغ نيوتن- كوتس المفتوحة. النظرية التالية تتضمن هذه الصيغ والأخطاء المرافقة لها. مرة أخرى يمكن الإطلاع على البرهان في كتاب Isaacson and Keller.

نظرية (٥,٢)

لتكن المعادلة (5.69) ترمز لصيغة نيوتن- كوتس المفتوحة للأعداد المختلفة $x_i = a + ih$ من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n$ ،حيث إن $h = \dfrac{b-a}{n+2}$ ، $x_0 = a + h$ ، $x_n = b - h$ و n عدد صحيح موجب، فإنه يوجد عدد η في الفترة (a,b) بحيث إن:

(5.70)

$$\int_a^b f(x)dx - \sum_{j=0}^{n} a_j f(x_j) = \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta) \int_{-1}^{n+1} t(t-1)(t-2)\cdots(t-n)dt$$

إذا كانت n عدد فردي و $f \in C^{n+1}[a,b]$ ، وأن:

(5.71)

$$\int_a^b f(x)dx - \sum_{j=0}^{n} a_j f(x_j) = \frac{h^{n+3}}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\eta) \int_{-1}^{n+1} t^2(t-1)(t-2)\cdots(t-n)dt$$

إذا كانت n عدد زوجي و $f \in C^{n+2}[a,b]$.

فيما يلي بعض صيغ نيوتن- كوتس المفتوحة والمشهورة :

١- عندما $n = 0$ نحصل على صيغة نقطة الوسط:

$$\int_a^b f(x)dx = 2hf(x_0) + \frac{h^3}{3} f''(\xi) \qquad (5.72)$$

٢- عندما $n = 1$ يكون لدينا الصيغة العددية:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{3h^3}{4} f''(\xi) \qquad (5.73)$$

٣ - عندما $n = 2$ تصبح نيوتن- كوتس المفتوحة بالشكل:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{4h}{3}[2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2)] + \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\xi) \qquad (5.74)$$

حيث إن $\xi \in (a,b)$.

مثال (٥,٨)

هنا نستخدم الصيغتين (5.72) و (5.73) لحساب قيم تقريبية للتكامل الموجود في المثال(٥,٦). بداية بالنسبة لصيغة نقطة الوسط يكون لدينا $h = \frac{1}{2}$، $x_{-1} = 1$، $x_0 = 1.5$ ، $x_1 = 2$ و

$$\int_1^2 \frac{1}{(x+2)^2} dx \approx 2(\frac{1}{2})[\frac{1}{(1.5+2)^2}] = 0.0816327$$

أما بالنسبة للصيغة (5.73) فيكون لدينا $h = \frac{1}{3}$، $x_{-1} = 1$، $x_0 = \frac{4}{3}$، $x_1 = \frac{5}{3}$، و $x_2 = 2$

$$\int_1^2 \frac{1}{(x+2)^2} dx \approx \frac{1}{2}[\frac{1}{(\frac{4}{3}+2)^2} + \frac{1}{(\frac{5}{3}+2)^2}] = 0.08219$$

يمكن للقارئ حساب الخطأ المضبوط وحداً أعلى للخطأ لكل تقريب كما في المثال (٥,٧).

(٥,٥) صيغ التكامل العددي المركبة

Composite Formulas

قد لا يكون استخدام صيغ نيوتن- كوتس عملياً في الكثير من الحالات خصوصاً إذا كانت فترة التكامل كبيرة نسبياً؛ حيث إننا نضطر في مثل هذه الحالات

إلى استخدام كثيرات حدود استكمالية ذات درجات عالية. وبالتالي ينتج عن ذلك كثيرات حدود ذات درجة عالية من الذبذبة وهذا بدوره يترك تأثيراً سيئاً على دقة الحلول العددية. للتغلب على هذه المشكلة فإننا نقطّع الفترة $[a,b]$ إلى فترات صغيرة ومعرفة كالتالي:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$x_i = a + ih, \quad i = 0,1,2,\ldots,n, \qquad h = \frac{b-a}{n} \tag{5.75}$$

ومن ثم نطبق الصيغة المراد استخدامها على كل فترة من الفترات الصغيرة للحصول على صيغة مركبة للصيغة المستخدمة على كل الفترة $[a,b]$. النظريتان التاليتان توضحان الصيغتين المركبتين لطريقتي شبه المنحرف وسمبسون، ونترك الصيغ المركبة للطرائق الأخرى لمناقشتها في التمارين.

نظرية (٥,٣)

لتكن $f \in C^2[a,b]$، بحيث تحتوي الفترة $[a,b]$ على الأعداد المختلفة $x_0, x_1, \ldots, x_n$ والمعرفة في (5.75) حيث إن n عدد صحيح موجب. فإنه يمكن كتابة صيغة شبه المنحرف المركبة للفترات الصغيرة $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ التي عددها n بالشكل:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)] - \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\mu) \tag{5.76}$$

حيث إن $\mu \in (a,b)$.

البرهان:

لنضع $h = \frac{b-a}{n}$ ولنقطع الفترة $[a,b]$ إلى n فترة صغيرة $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ والمعرفة في (5.75). إذن من خواص التكامل

المحدود يكون لدينا:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

وبتطبيق صيغة شبه المنحرف على كل فترة $[x_{i-1}, x_i]$، $i = 1,2,\dots,n$ نحصل على:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \{\frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] - \frac{h^3}{12} f''(\eta_i)\}$$

حيث إن η_i تقع في الفترة $[x_{i-1}, x_i]$. وبما أن $f(x_i)$ تكون موجودة في الحد الذي يمثل الفترتين $[x_{i-1}, x_i]$ و $[x_i, x_{i+1}]$ من أجل $i = 1,2,\dots,n-1$ يكون لدينا:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)] - \frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i)$$

الآن لنضع $E(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\eta_i)$. بما أن f'' دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ فإنه حسب نظرية القيم القصوى يوجد للدالة f'' قيم عظمى وصغرى على $[a,b]$ أي أن:

$$\min_{x\in[a,b]} f''(x) \le f''(\eta_i) \le \max_{x\in[a,b]} f''(x)$$

بأخذ مجموع الأطراف الثلاثة من 1 إلى n نحصل على:

$$n \min_{x\in[a,b]} f''(x) \le \sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i) \le n \max_{x\in[a,b]} f''(x)$$

وبقسمة الأطراف الثلاثة على n يكون لدينا:

$$\min_{x\in[a,b]} f''(x) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i) \le \max_{x\in[a,b]} f''(x)$$

وبما أن f'' دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ فإنه حسب نظرية القيمة المتوسطة يوجد عدد $\mu \in (a,b)$ بحيث إن:

$$f''(\mu)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f''(\eta_i)$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$E(f)=-\frac{h^3}{12}nf''(\mu)$$

وبما أن $h=\dfrac{b-a}{n}$ فإننا نحصل على:

$$E(f)=-\frac{(b-a)h^2}{12n}nf''(\mu)=-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\mu)$$

وهو المطلوب.

نظرية (٥,٤)

لتكن $f\in C^4[a,b]$ ، بحيث تحتوي الفترة $[a,b]$ على الأعداد المختلفة $x_0,x_1,\ldots,x_n$ والمعرفة في (5.75) وأن $n=2m$ ، m عدد صحيح موجب. فإنه يمكن كتابة صيغة سمبسون المركبة للفترات الصغيرة $[x_0,x_2],[x_2,x_4],\ldots,[x_{n-2},x_n]$ التي عددها m بالشكل:

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{3}[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{m-1}f(x_{2i})+4\sum_{i=1}^{m}f(x_{2i-1})+f(x_n)]$$
$$-\frac{(b-a)h^4}{180}f^{(4)}(\mu) \qquad (5.77)$$

حيث إن $\mu\in(a,b)$.

البرهان:

لنضع $h=\dfrac{b-a}{n}$ ولنقطع الفترة $[a,b]$ إلى m فترة صغيرة $[x_0,x_2],[x_2,x_4],\ldots,[x_{n-2},x_n]$ والمعرفة في (5.75). وبالتالي يكون لدينا:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx$$

وبتطبيق صيغة سمبسون على كل فترة $[x_{2i-2}, x_{2i}]$، $i = 1,2,\dots,m$ نحصل على:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \{\frac{h}{3}[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_i)] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta_i)\}$$

حيث إن η_i تقع في الفترة $[x_{2i-2}, x_{2i}]$. وبما أن $f(x_{2i})$ تكون موجودة في الحد الذي يمثل الفترتين $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ و $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ من أجل $i = 1,2,\dots,m-1$ يكون لدينا:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + f(x_n)] - \frac{h^5}{90}\sum_{i=1}^{n} f^{(4)}(\eta_i)$$

الآن لنضع $E(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta_i)$. بما أن $f^{(4)}$ دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ فإنه حسب نظرية القيم القصوى يوجد للدالة $f^{(4)}$ قيم عظمى وصغرى على $[a,b]$ أي أن:

$$\min_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x) \le f^{(4)}(\eta_i) \le \max_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x)$$

بأخذ مجموع الأطراف الثلاثة من 1 إلى m نحصل على:

$$m \min_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x) \le \sum_{i=1}^{m} f^{(4)}(\eta_i) \le m \max_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x)$$

وبقسمة الأطراف الثلاثة على m يكون لدينا:

$$\min_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x) \le \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f^{(4)}(\eta_i) \le \max_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x)$$

وبما أن $f \in C^4[a,b]$ فإنه حسب نظرية القيمة المتوسطة يوجد عدد $\mu \in (a,b)$ بحيث إن:

$$f^{(4)}(\mu) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f^{(4)}(\eta_i)$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$E(f) = -\frac{h^5}{90} m f^{(4)}(\mu)$$

وبما أن $h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$ فإننا نحصل على:

$$E(f) = -\frac{(b-a)h^4}{180m} m f^{(4)}(\mu) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\mu)$$

وهو المطلوب.

مثال (٥,٩)

هنا سنستعرض الصيغتين المركبتين لطريقتي شبه المنحرف و سمبسون لحساب قيم تقريبية للتكامل المحدود $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+2} dx$ وذلك بوضع $n = 4$. سوف نحسب الخطأ المضبوط وحداً أعلى للخطأ في كل حالة.

بداية نلاحظ أن $x_i = -1 + ih$ ، من أجل $i = 0,1,2,3,4$ و $h = \frac{1-(-1)}{4} = \frac{1}{2}$

وبالتالي يكون لدينا $x_0 = -1$ ، $x_1 = -\frac{1}{2}$ ، $x_2 = 0$ ، $x_3 = \frac{1}{2}$ و $x_4 = 1$.

الآن باستخدام صيغة شبه المنحرف المركبة نحصل على:

$$\begin{aligned} T_4(f) &= \frac{1/2}{2}[f(-1) + 2\{f(-\frac{1}{2}) + f(0) + f(\frac{1}{2})\} + f(1)] \\ &= \frac{1}{4}[1 + 2\{\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5}\} + \frac{1}{3}] \\ &= 1.11667 \end{aligned}$$

وبما أن التكامل المضبوط هو:

$$I(f)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x+2}dx=\ln(x+1)]_{-1}^{1}=\ln 3$$

فإن الخطأ المضبوط يكون:

$$|I(f)-T_4(f)|=|\ln 3-1.11667|=0.01806$$

والحد الأعلى للخطأ هو:

$$|I(f)-T_4(f)|\le\frac{2(1/2)^2}{12}\max_{-1\le x\le 1}|f''(x)|$$

وبما أن $\max_{-1\le x\le 1}|f''(x)|=\max_{-1\le x\le 1}\left|\frac{2}{(x+2)^3}\right|=2$ فإننا نحصل على:

$$|I(f)-T_4(f)|\le\frac{2(1/2)^2}{12}(2)=\frac{1}{12}\approx 0.08333333$$

أما بالنسبة لصيغة سمبسون المركبة فيكون لدينا ما يلي:

$$\begin{aligned}S_4(f)&=\frac{1/2}{3}[f(-1)+4f(-\frac{1}{2})+2f(0)+4f(\frac{1}{2})+f(1)]\\&=\frac{1}{6}[1+4\frac{2}{3}+2\frac{1}{2}+4\frac{2}{5}+\frac{1}{3}]\\&=1.1\end{aligned}$$

والخطأ المضبوط $|I(f)-S_4(f)|=|\ln 3-1.1|=0.00139$. لحساب حداً أعلى للخطأ نلاحظ أن:

$$|I(f)-S_4(f)|\le\frac{2(1/2)^4}{180}\max_{-1\le x\le 1}|f^{(4)}(x)|$$

وبما أن $\max_{-1\le x\le 1}|f^{(4)}(x)|=\max_{-1\le x\le 1}\left|\frac{24}{(x+2)^5}\right|=24$ فإنه يكون لدينا:

$$|I(f)-S_4(f)|\le\frac{2(1/2)^4}{180}(24)=0.01667$$

يتضح من النتائج العددية للمثال (٥,٩) أن القيمة التقريبية للتكامل التي تم الحصول عليها باستخدام طريقة سمبسون المركبة أفضل من تلك التي حصلنا عليها باستخدام طريقة شبه المنحرف المركبة وهذا يتوافق مع النتائج الواردة في النظريتين

(٥,٢) و(٥,٣). في الواقع يمكن استخدام هاتين النظريتين لتحديد قيمة h التي تجعل دقة القيمة التقريبية المحسوبة للتكامل أقل من أو تساوي $\varepsilon = 5\times10^{-t}$ من أجل $t \geq 1$. المثال التالي يستعرض ذلك بالنسبة لصيغة شبه المنحرف المركبة. ونترك استخدام صيغة سمبسون المركبة والصيغ الأخرى لمناقشتها في التمارين.

مثال (٥,١٠)

نريد استخدام طريقة شبه المنحرف المركبة لحساب قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ بدقة 5×10^{-2}. هنا نحن نريد إيجاد قيمة تقريبية للتكامل المحدود بحيث إن $|I(f)-T_4(f)| \leq 5\times10^{-2}$ أي أن:

$$|I(f)-T_n(f)| \leq \frac{(b-a)h^2}{12}\max_{1\leq x\leq 2}|f''(x)| \leq 5\times10^{-2}$$

وبما أن $\max_{1\leq x\leq 2}|f''(x)| = 2$ فإنه يكون لدينا:

$$\frac{h^2}{12}(2) \leq 5\times10^{-2}$$

ومنه نحصل على:

$$h^2 \leq 3\times10^{-1}, \qquad \Rightarrow \qquad h \leq 0.5477$$

وهذا يعني أنه إذا كان $h = 0.5$ ($n = 2$) فإننا نحصل على قيمة تقريبية للتكامل بالدقة المطلوبة. إذن يكون لدينا:

$$\begin{aligned} T_3(f) &= \frac{1/2}{2}[f(1)+2f(\frac{3}{2})+f(2)] \\ &= \frac{1}{4}[1+2\frac{2}{3}+\frac{1}{2}] \\ &= 0.7083 \end{aligned}$$

(٥,٦) تكامل رومبرغ
Romberg Extrapolation

نناقش في هذا البند طريقة رومبرغ لحساب التكامل والذي يحسب قيم تقريبية ذات دقة أفضل للتكامل. بداية يمكن كتابة صيغة شبه المنحرف (5.53) بالشكل:

$$\begin{aligned} R_{0,0} &= \frac{h}{2}[f(a)+f(b)] \\ &= I(f)+c_2h^2+c_4h^4+c_6h^6+\cdots \end{aligned} \tag{5.78}$$

حيث إن $I(f)=\int_a^b f(x)dx$، $h=b-a$ و $c_2,c_4,\ldots$ ثوابت. يمكن استخدام أسلوب استيفاء ريشاردسون للحصول على تقريب أفضل للتكامل $I(f)$ وذلك بحذف حدود الخطأ ذات الرتب الدنيا في المعادلة (5.78). الآن بتطبيق طريقة شبه المنحرف على الفترتين اللتين طول كل واحدة منهما $\frac{h}{2}$ نحصل على:

$$\begin{aligned} R_{1,0} &= \frac{h}{4}[f(a)+2f(a+\frac{h}{2})+f(b)] \\ &= I(f)+c_2(\frac{h}{2})^2+c_4(\frac{h}{2})^4+c_6(\frac{h}{2})^6+\cdots \end{aligned} \tag{5.79}$$

وللحصول على تقريب أفضل فإننا نحذف الثابت c_2 بين المعادلتين (5.78) و (5.79)، وذلك بضرب المعادلة (5.78) بـ $-\frac{1}{4}$ وإضافة الناتج إلى المعادلة (5.79) حيث نحصل على:

$$R_{1,0}-\frac{1}{4}R_{0,0}=I(1-\frac{1}{4})+c_4(\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^2})+c_6(\frac{1}{2^6}-\frac{1}{2^2})h^6+\cdots$$

وبضرب هذه المعادلة بـ $\frac{4}{3}$ تصبح بالشكل:

$$R_{1,1} = \frac{4^1 R_{1,0} - R_{0,0}}{4-1} = I + c_4^{(1)} h^4 + c_6^{(1)} h^6 + \cdots \qquad (5.80)$$

حيث إن:

$$c_4^{(1)} = \frac{c_4}{3}(\frac{1}{4}-1), \quad c_6^{(1)} = \frac{c_6}{4}(\frac{1}{4^2}-1), \ldots$$

يمكن أيضاً الحصول على تقريب أفضل وذلك بحذف الثابت $c_4^{(1)}$. لعمل ذلك نُطبق الصيغة (5.80) باستخدام $\frac{h}{2}$ لنحصل على:

$$R_{2,1} = \frac{4^1 R_{2,0} - R_{1,0}(h/2)}{4-1} = I + c_4^{(1)}(\frac{h}{2})^4 + c_6^{(1)}(\frac{h}{2})^6 + \cdots \qquad (5.81)$$

ثم نضرب المعادلة (5.80) بـ $-\frac{1}{4^2}$ وإضافة الناتج إلى المعادلة (5.81) لنحصل على المعادلة:

$$R_{2,1} - \frac{1}{4^2} R_{1,1} = I(1 - \frac{1}{4^2}) + c_6^{(1)}(\frac{1}{2^6} - \frac{1}{4^2}) h^6 + \cdots$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل:

$$R_{2,2} = \frac{4^2 R_{2,1} - R_{1,1}}{4^2 - 1} = I + c_6^{(1)} h^6 + \cdots \qquad (5.82)$$

حيث إن:

$$c_6^{(2)} = c_6^{(1)} \frac{1/2^2 - 1}{4^2 - 1}$$

وهكذا فإنه عند الخطوة k نحصل على:

$$R_{k,k} = \frac{4^k R_{k,k-1} - R_{,k-1k-1}}{4^k - 1} = I + c_{2k+2}^{(k)} h^{2k+2} + \cdots$$

من أجل $k = 1,2,\ldots,n$. يسمى هذا التطبيق لاستيفاء ريشاردسون لطريقة شبه المنحرف بطريقة رومبرغ لحساب التكامل. يمكن كتابة العناصر $R_{k,k}$ بشكل مرتب كما في الجدول رقم (٥,٤).

الجدول رقم (٥,٤). العناصر $R_{k,k}$ لتكامل رومبرغ.

$$\begin{array}{lllll}
R_{0,0} & & & & \\
R_{1,0} & R_{1,1} & & & \\
R_{2,0} & R_{2,1} & R_{2,2} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
R_{n,0} & R_{n,1} & R_{n,2} & \text{ÖÖ} & R_{n,n}
\end{array}$$

نشير هنا إلى عناصر العمود الأول في الجدول رقم (٥,٤)، $R_{k,0}$ من أجل $k = 0,1,2,\ldots,n$، هي عبارة عن تطبيق طريقة شبه المنحرف حيث يكون لدينا:

$$R_{0,0} = \frac{h}{2}[f(a) + f(b)]$$

وهو يمثل تطبيق طريقة شبه المنحرف مرة واحدة على الفترة $[a,b]$ و :

$$\begin{aligned}
R_{1,0} &= \frac{h/2}{2}[f(a) + 2f(a+\frac{h}{2}) + f(b)] \\
&= \frac{1}{2}[\frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + hf(a+\frac{h}{2})] \\
&= \frac{1}{2}[R_{0,0} + hf(a+\frac{h}{2})]
\end{aligned}$$

والذي يمثل تطبيق الطريقة مرتين على هذه الفترة، وكذلك فإن:

$$\begin{aligned}
R_{2,0} &= \frac{h/4}{2}[f(a) + 2f(a+\frac{h}{4}) + 2f(a+2(\frac{h}{4})) + 2f(a+2(\frac{h}{2})) + f(b)] \\
&= \frac{1}{2}[\frac{h}{4}([f(a) + 2f(a+\frac{h}{2}) + f(b)] + 2f(a+\frac{h}{4}) + 2f(a+\frac{3h}{4}))] \\
&= \frac{1}{2}[R_{1,0} + \frac{h}{2}f(a+\frac{h}{4}) + \frac{h}{2}f(a+\frac{3h}{4})]
\end{aligned}$$

يمثل تطبيق طريقة شبه المنحرف أربع مرات على الفترة $[a,b]$. وبشكل عام، فإنه يمكن كتابة $R_{k,0}$ كما يلي:

$$R_{k,0} = \frac{1}{2}[R_{k-1,0} + \frac{h}{2^{k-1}} \sum_{i=1}^{2^{k-1}} f(a+(i-\frac{1}{2})\frac{h}{2^{k-1}})] \qquad (5.83)$$

من أجل $k = 1,2,\ldots,n$. في الواقع، من الناحية العملية نحن لا نحسب عناصر الجدول رقم (٥,٣) بالشكل العمودي وإنما يتم حسابها بشكل صفي. إذا تم حساب العنصرين الأولين في العمود الأول يمكن حساب $R_{1,1}$ باستخدام المعادلة (5.80)، أي أن:

$$R_{1,1} = \frac{4^1 R_{1,0} - R_{0,0}}{4-1} \qquad (5.84)$$

ثم يتم حساب $R_{2,0}$، $R_{2,1}$ و $R_{2,2}$ حيث إن:

$$R_{2,1} = \frac{4^1 R_{2,0} - R_{1,0}}{4-1} \qquad (5.85)$$

و

$$R_{2,2} = \frac{4^2 R_{2,1} - R_{1,1}}{4^2-1} \qquad (5.86)$$

بشكل عام فإن عناصر العمود الثاني في الجدول يتم حسابها كالتالي:

$$R_{k,1} = \frac{4^1 R_{k,0} - R_{k-1,0}}{4-1} \qquad (5.87)$$

من أجل $k = 1,2,\ldots,n$. وباستخدام المعادلة (5.82) فإننا نجد أن عناصر العمود الثالث يمكن حسابها كالتالي:

$$R_{k,2} = \frac{4^2 R_{k,1} - R_{k-1,1}}{4^2-1} \qquad (5.88)$$

من أجل $k = 2,3,\ldots,n$. وبشكل عام، فإن عناصر العمود $j+1$ يتم حسابها بواسطة:

$$R_{k,j} = \frac{4^j R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^j - 1} \tag{5.89}$$

من أجل $k = j, j+1, \ldots, n$. انظر الخوارزمية (٥,١).

خوارزمية (٥,١): تكامل رومبرغ

تتضمن هذه الخوارزمية تنفيذ طريقة تكامل رومبرغ لحساب قيمة تقريبية للتكامل المحدود $I(f)$:

الخطوة ١: أدخل قيم a، b، N و eps.

الخطوة ٢: ضع $R_{0,0} = \frac{h}{2}[f(a) + f(b)]$.

الخطوة ٣: كرر الخطوات ٤ - ١٢ من أجل $k = 1,2,\ldots,n$.

الخطوة ٤: $sum = 0$.

الخطوة ٥: $m = 2^{k-1}$.

الخطوة ٦: $h1 = \frac{h}{m}$.

الخطوة ٧: كرر الخطوة ٨ من أجل $j = 1,2,\ldots,m$.

الخطوة ٨: $sum = sum + f(a + (j - \frac{1}{2})h1)$.

الخطوة ٩: $R_{k,0} = \frac{1}{2}[R_{k-1,0} + h1 * sum]$.

الخطوة ١٠: كرر الخطوة ١١ من أجل $i = 1,2,\ldots,k$.

الخطوة ١١: $R_{k,i} = \frac{4^i R_{k,i-1} - R_{k-1,i-1}}{4^i - 1}$.

الخطوة ١٢: إذا كان $|R_{k,k} - R_{k,k-1}| < eps$ فاطبع " التكامل التقريبي $R_{k,k}$ " قف.

الخطوة ١٣: اطبع " لم تتقارب الطريقة إلى الحل المطلوب لقيمة n المعطاة".

مثال (٥,١١)

نريد استخدام طريقة رومبرغ لحساب قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^2 \frac{1}{2x-1}dx$.

بداية نلاحظ أن $h=1$ وبالتالي يكون لدينا:

$$R_{0,0} = \frac{h}{2}[f(a)+f(b)] = \frac{1}{2}[1+\frac{1}{3}] = 0.666667$$

$$R_{1,0} = \frac{1}{2}[R_{0,0} + f(1+\frac{1}{2})] = \frac{1}{2}[0.666667 + \frac{1}{2(1+1/2)-1}] = 0.583333$$

وبالتالي نحصل على:

$$R_{1,1} = \frac{4^1 R_{1,0} - R_{0,0}}{4-1} = \frac{4(0.583333) - 0.666667}{3} = 0.555556$$

وبعد ذلك نحسب:

$$\begin{aligned} R_{2,0} &= \frac{1}{2}[R_{1,0} + \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{2} f(1+(i-\frac{1}{2})\frac{h}{2})] \\ &= \frac{1}{2}[0.583333 + \frac{1}{2}\{f(1+\frac{1}{4}) + f(1+\frac{3}{4})\}] \\ &= 0.558333 \end{aligned}$$

$$R_{2,1} = \frac{4^1 R_{2,0} - R_{1,0}}{4-1} = \frac{4(0.5583333) - 0.583333}{3} = 0.550000$$

وبمعرفة قيم $R_{1,1}$ و $R_{2,1}$ يمكن حساب قيمة $R_{2,2}$ كما يلي:

$$R_{2,2} = \frac{4^2 R_{2,1} - R_{1,1}}{4^2-1} = \frac{16(0.550000) - 0.555556}{15} = 0.549629$$

وهكذا حصلنا على النتائج العددية الموجودة في الجدول رقم (٥,٥).

الجدول رقم (٥,٥). النتائج العددية للمثال (٥,١١).

0.666667				
0.583333	0.555556			
0.558333	0.550000	0.549629		
0.551605	0.549363	0.549320	0.549315	
0.549884	0.549310	0.549307	0.549306	0.549306

بما أن $I(f)=\int_1^2 \frac{1}{2x-1}dx=\frac{1}{2}\ln 3$ و بالتالي فإن الخطأ المتعلق بالتقريب الذي حصلنا عليه يكون $|I(f)-0.549306|=1.6\times 10^{-7}$.

(٥,٧) تكامل جاوس
Gaussian Integration

نعلم أن جميع الصيغ العددية التي درسناها في البنود السابقة لحساب القيم التقريبية للتكامل المحدود $I(f)=\int_a^b f(x)dx$ يمكن كتابتها بالشكل:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=0}^{n} a_j f(x_j) \qquad (5.90)$$

وأن المسافات بين الأعداد المختلفة x_j ، $j=0,1,2,\ldots,n$ تكون متساوية. في هذا البند سوف ندرس الصيغة العددية (5.90) عندما تكون المسافات بين هذه الأعداد غير متساوية وغير محددة مسبقاً، وبالتالي فإن المعادلة (5.90) تحتوي على $2n+2$ مجهول والتي ينبغي لها أن تحقق $2n+2$ معادلة. وبناء عليه، فإن ذلك يعني أننا نتوقع أن

نحصل على صيغة تكون مضبوطة إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة حدود ذات الدرجة $2n+1$ على الأكثر. لقد أثبت العالم الرياضي جاوس أنه إذا تم اختيار الأعداد المختلفة x_j ، $j=0,1,2,\ldots,n$ بشكل مناسب فإنه من الممكن استنتاج صيغ تكون أكثر دقة من تلك المرادفة لها من صيغ نيوتن- كوتس. يسمى هذا الأسلوب بصيغ التكامل لجاوس. نشير هنا إلى أن المقصود بعبارة " المرادفة لها "،أي الصيغة التي تتطلب حساب قيم نفس عدد الدوال. فمثلاً، يمكن أن نستنتج صيغة تعتمد على حساب قيمتين للدالة $f(x)$ تكون نتائجها العددية أفضل من تلك التي يُحصل عليها باستخدام طريقة شبه المنحرف والتي بدورها تعتمد على حساب قيمتين للدالة، انظر مثال (٥,٧).

لنبدأ بعرض أسلوب جاوس عندما $n=1$. قبل البدء نشير إلى أنه من المعلوم أنه من المناسب كتابة التكامل المحدود $\int_a^b f(x)dx$ بالشكل:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)t+(a+b)}{2}\right)dt \qquad (5.91)$$

(انظر التمارين). لنوجد المجاهيل a_0، a_1، $f(x_0)$ و $f(x_1)$ بحيث إن:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx G_1(f) = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) \qquad (5.92)$$

تعطينا قيمة التكامل المضبوط عندما تكون $f(x)$ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة أو أقل. الآن للحصول على أربع معادلات تمكننا من إيجاد المجاهيل الأربعة آنفة الذكر فإننا نجعل $f(x)=1$ ، $f(x)=x$ ، $f(x)=x^2$ و $f(x)=x^3$ في المعادلة (5.92).

بداية عندما $f(x)=1$ نحصل على:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} dx = 2$$

ومن المعادلة (5.92) يكون لدينا:

$$a_0 f(x_0)+a_1 f(x_1)=a_0+a_1=2$$

وبجعل $f(x)=x$ نحصل على $\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1} xdx=0$ و $a_0x_0+a_1x_1=0$.

وبالمثل بالنسبة للحالتين عندما $f(x)=x^2$ و $f(x)=x^3$. عموماً فإننا نحصل على المعادلات التالية:

$$\begin{aligned} a_0+a_1&=2\\ a_0x_0+a_1x_1&=0\\ a_0x_0^2+a_1x_1^2&=\frac{2}{3}\\ a_0x_0^3+a_1x_1^3&=0 \end{aligned} \tag{5.93}$$

وبحل هذه المعادلات نحصل على:

$$x_0=-x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{و} \quad a_0=a_1=1$$

وبالتعويض عن هذه القيم في المعادلة (5.92) يكون لدينا الصيغة العددية:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx G_1(f)=f(-\frac{\sqrt{3}}{3})+f(\frac{\sqrt{3}}{3}) \tag{5.94}$$

والتي تسمى صيغة النقطتين لتكامل جاوس.

مثال (٥,١٢)

هنا نستخدم صيغة تكامل جاوس (5.94) لحساب قيمة تقريبية للتكامل $\int_{1}^{2}\frac{1}{(x+2)^2}dx$. بداية يكون لدينا:

$$\int_{1}^{2}\frac{dx}{(x+2)^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{4}{(t+7)^2}dt=2\int_{-1}^{1}\frac{dt}{(t+7)^2}$$

وباستخدام الصيغة (5.94) نحصل على:

$$
\begin{aligned}
I(f) &= \int_1^2 \frac{dx}{(x+2)^2} \\
&= 2\int_{-1}^{1} \frac{dt}{(t+7)^2} \\
&\approx 2G_1(f) = 2\left[\frac{1}{(-\sqrt{3}/3+7)^2} + \frac{1}{(\sqrt{3}/3+7)^2}\right] = 0.08331774
\end{aligned}
$$

الخطأ المضبوط المرافق لهذا التقريب هو $|I(f)-G_1(f)| = 1.6\times10^{-5}$.

بمقارنة النتائج العددية لهذا المثال مع تلك التي في المثال (٥,٧) والتي حصلنا عليها باستخدام صيغة شبه المنحرف نلاحظ أنها أفضل بكثير حيث إن الخطأ المضبوط المرافق للقيمة التقريبية التي تم حسابها باستخدام طريقة شبه المنحرف هو $|I(f)-T_1(f)| = 3.47\times10^{-3}$. في الواقع، الخطأ المضبوط هنا أصغر بقليل من ذلك المرافق للقيمة العددية التي تم حسابها باستخدام صيغة سمبسون والتي تتطلب حساب ثلاث قيم للدالة $f(x)$. راجع النتائج العددية الموجودة في المثال (٥,٧).

الآن لتعميم هذا الأسلوب للأعداد x_j، $j = 0,1,2,\ldots,n$، $n > 1$ يكون لدينا معادلات غير خطية يصعب التعامل معها، لذلك سنعرض طريقة أخرى لاستنتاج صيغ تكامل جاوس العامة. بما أن الأعداد المختلفة x_j، $j = 0,1,2,\ldots,n$ غير معروفة، نستخدم كثيرة الحدود لاغرانج الاستكمالية والتي كما نعلم، تسمح باستخدام الأعداد التي تكون المسافات فيما بينها غير متساوية. حسب نظرية (٤,٢) يكون لدينا:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x) f(x_j) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta(x)) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \qquad (5.95)$$

حيث إن $L_j(x)$ معرفة كما في المعادلة (4.8) بالفصل الرابع و η تقع بين -1 و 1.

بناء على ذلك فإنه بالنسبة للمعادلة (5.90) يكون لدينا $2n+2$ مجهول a_j و x_j، من أجل x_j، $j=0,1,2,\ldots,n$ وبالتالي فإن المعادلة (5.90) تعطينا القيمة المضبوطة للتكامل إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة حدود من الدرجة $2n+1$ على الأكثر. من ناحية أخرى، إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة حدود من الدرجة n على الأكثر فإننا نجعل:

$$\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\eta(x))=g_n(x) \qquad (5.96)$$

حيث إن $g_n(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n. بالتعويض عن ذلك في المعادلة (5.95) ومن ثم نكامل الطرفين من -1 إلى 1 نحصل على:

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\sum_{j=0}^{n}\int_{-1}^{1}L_j(x)dxf(x_j)+\int_{-1}^{1}g_n(x)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)dx \qquad (5.97)$$

نريد الآن أن نختار x_j، $j=0,1,2,\ldots,n$ بحيث إن حد الخطأ الموجود في المعادلة (5.97) يكون مساوياً للصفر وذلك لأن $f(x)$ دالة كثيرة حدود من الدرجة $2n+1$ على الأكثر. أي أننا نريد أن يكون:

$$\int_{-1}^{1}g_n(x)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)dx=0 \qquad (5.98)$$

وبما أن $\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ كثيرة حدود من الدرجة $n+1$ و $g_n(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n على الأكثر، فإن المعادلة (5.98) تتحقق إذا تم اختيار كثيرة حدود $\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ من الدرجة $n+1$ تكون متعامدة مع كل كثيرات الحدود ذات الدرجة n على الأكثر في الفترة $[-1,1]$. كثيرة الحدود التي تحقق ذلك تسمى كثيرة الحدود ليجندر.

يمكن تعريف كثيرة الحدود ليجندر $P_i(x)$ كما يلي:

$$
\begin{aligned}
&P_0(x) = 1 \\
&P_1(x) = x \\
&P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
&\quad \vdots \\
&P_i(x) = \frac{1}{i}[(2i-1)xP_{i-1}(x) - (i-1)P_{i-2}(x)], \qquad i = 2,3,\ldots
\end{aligned}
\tag{5.99}
$$

وهي متعامدة على الفترة $[-1,1]$ بالنسبة لدوال الأساس $w(x) = 1$. من المعلوم أن كثيرات الحدود المتعامدة تكون مستقلة خطياً وبالتالي فإنه يمكن كتابة الدالة $g_n(x)$ الموجودة في المعادلة (5.96) كتركيب خطي لكثيرات الحدود ليجندر $P_i(x)$، $i = 0,1,2,\ldots,n$. إذا تم اختيار x_i، $i = 0,1,2,\ldots,n$ لـ $\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ كأصفار (جذور) لكثيرة الحدود ليجندر $P_{n+1}(x)$ ذات الدرجة $n+1$، فإنه يمكن تحقيق المعادلة (5.98). أيضا من المعلوم أن أصفار كثيرة الحدود ليجندر ذات الدرجة أكبر من أو تساوي الواحد تكون أعداداً حقيقية. الآن باختيار الأعداد المختلفة x_j، $j = 0,1,2,\ldots,n$ كأصفار لكثيرة الحدود ليجندر $P_{n+1}(x)$ فإن المعادلة (5.97) تصبح بالشكل:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{j=0}^{n} \int_{-1}^{1} L_j(x)dx f(x_j) \tag{5.100}$$

حيث إن $f(x)$ دالة كثيرة الحدود ذات الدرجة $2n+1$ على الأكثر، بالتالي يكون لدينا:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{j=0}^{n} a_j f(x_j) + \frac{1}{2n+2} f^{(2n+2)}(\eta(x)) \int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{n} (x - x_i)dx \tag{5.101}$$

حيث إن $a_j = \int_{-1}^{1} L_j(x)dx$. إذن، يكون لدينا التكامل العددي:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx G_n(f) = \sum_{j=0}^{n} a_j f(x_j) \qquad (5.102)$$

حيث إن x_j ، $j = 0,1,2,\ldots,n$ هي أصفار كثيرة الحدود ليجندر ذات الدرجة $n+1$.

لنستعرض الآن كيفية إيجاد قيم الثوابت a_j ، من أجل $j = 0,1,2,\ldots,n$ عندما $n = 2$. بداية نلاحظ أن القيم $-\sqrt{0.6}$ ، 0 و $\sqrt{0.6}$ هي أصفار كثيرة الحدود $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ وهذا يعني أن $x_0 = -\sqrt{0.6}$ ، $x_1 = 0$ و $x_2 = \sqrt{0.6}$ وبالتالي يكون لدينا:

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-\sqrt{0.6})}{(-\sqrt{0.6}-0)(-\sqrt{0.6}-\sqrt{0.6})} = \frac{5}{6}x(x-\sqrt{0.6})$$

$$L_1(x) = \frac{(x+\sqrt{0.6})(x-\sqrt{0.6})}{(0+\sqrt{0.6})(0-\sqrt{0.6})} = \frac{5}{3}(x+\sqrt{0.6})(x-\sqrt{0.6})$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x+\sqrt{0.6})}{(\sqrt{0.6}-0)(\sqrt{0.6}+\sqrt{0.6})} = \frac{5}{6}x(x+\sqrt{0.6})$$

وبناء عليه نحصل على:

$$a_0 = \int_{-1}^{1} L_0(x)dx = \frac{5}{6}\int_{-1}^{1}[x^2 - \sqrt{0.6}x]dx = \frac{5}{9}$$

$$a_1 = \int_{-1}^{1} L_1(x)dx = \frac{5}{3}\int_{-1}^{1}[x^2 - 0.6]dx = \frac{8}{9} \qquad (5.103)$$

$$a_0 = \int_{-1}^{1} L_2(x)dx = \frac{5}{6}\int_{-1}^{1}[x^2 + \sqrt{0.6}x]dx = \frac{5}{9}$$

نشير هنا إلى أنه بشكل مماثل يمكن حساب الثوابت a_j، من أجل $j = 0,1,2,\ldots,n$ عندما $n \geq 3$ وأنه كلما زادت قيمة n تزداد التعقيدات الجبرية لتحديد أصفار كثيرة الحدود ليجندر وكذلك التكاملات المحدودة التي يجب حسابها. لقد أدرجنا في الجدول رقم (٥,٦) أصفار كثيرات الحدود ليجندر (حتى سبعة أرقام عشرية معنوية) و قيم الثوابت a_j، من أجل $j = 0,1,2,\ldots,n$ لبعض قيم n.

الجدول رقم (٥,٦). أصفار كثيرات الحدود ليجندر.

a_j	الأصفار (الجذور)	كثيرات الحدود ليجندر	n
2.0000000	0.0000000	$p_1(x) = x$	0
1.0000000	−0.5773503	$P_2(x) = \frac{3}{2}(x^2 - \frac{1}{3})$	1
1.0000000	0.5773503		
0.5555556	−0.7745967	$P_3(x) = \frac{5}{2}(x^3 - \frac{3}{5}x)$	2
0.8888889	0.0000000		
0.5555556	0.7745967		
0.3478549	−0.8611363	$P_4(x) = \frac{35}{8}(x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35})$	3
0.6521452	−0.3399810		
0.6521452	0.3399810		
0.3478549	0.8611363		
0.2369269	−0.9061799	$P_5(x) = \frac{63}{8}(x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x)$	4
0.4786287	−0.5384693		
0.5688889	0.0000000		
0.4786287	−0.5384693		
0.2369269	−0.9061799		

مثال (٥,١٣)

نريد استخدام تكامل جاوس عندما $n=2$ لحساب قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^2 \frac{1}{(x+2)^2}dx$. بداية نعلم من المثال (٥,١٢) أن $\int_1^2 \frac{dx}{(x+2)^2} = 2\int_{-1}^{1} \frac{dt}{(t+7)^2}$
وباستخدام الصيغة العددية (5.102) مع $n=2$ والثوابت a_0، a_1 و a_2 كما هي معرّفة في المعادلة (5.103) نحصل على:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{(t+7)^2} \approx G_2(f) = [\frac{5}{9(-\sqrt{3/5}+7)^2} + \frac{8}{9(7)^2} + \frac{5}{9(\sqrt{3/5}+7)^2}] = 0.0416666$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$I(f) = \int_1^2 \frac{dx}{(x+2)^2} \approx 2G_2(f) = 0.0833333$$

و الخطأ المضبوط المرافق لهذا التقريب هو: $|I(f)-G_2(f)| = 5.4\times 10^{-8}$.

(٥,٨) تمارين
Exercises

١ - اعتبر المعلومات التالية:

x	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
$f(x)$	0.182322	0.336472	0.470004	0.587787	0.693147

أ) استخدم صيغ النقطتين لحساب جميع القيم الممكنة لـ $f'(2.2)$، $f'(2.6)$، $f'(2.7)$ و $f'(3)$. ثم قارن هذه القيم مع القيم المضبوطة $f'(2.2) = 0.8333333$ ، $f'(2.6) = 0.6250000$ ، $f'(2.7) = 0.5882353$ و $f'(3) = 0.5000000$ (صحيحة إلى سبعة أرقام عشرية معنوية). ماذا تلاحظ؟

ب) استخدم صيغ الثلاث نقاط لحساب جميع القيم التقريبية الممكنة لـ $f'(2.2)$ ، $f'(2.6)$ ، $f'(2.7)$ و $f'(3)$ ثم قارن هذه القيم مع القيم المضبوطة الموجودة في الفقرة (أ). ماذا تلاحظ ؟

جـ) استخدم صيغ الخمس نقاط لحساب جميع القيم التقريبية الممكنة لـ $f'(2.2)$ ، $f'(2.6)$ ، $f'(2.7)$ و $f'(3)$. ثم قارن هذه القيم مع المضبوطة الموجودة في الفقرتين (أ) و (ب).

قارن النتائج العددية التي تحصل عليها في الفقرات الثلاث ورتبها من ناحية الأفضلية. ماذا تلاحظ؟.

٢- اعتبر الدالة $f(x) = \sinh x$. استخدم صيغ التفاضل العددي الواردة في هذا الفصل لحساب قيماً تقريبية لـ $f'(1)$ وذلك بوضع $h = 0.1$. احسب الأخطاء المضبوطة لكل حالة ثم قارن النتائج. ماذا تلاحظ ؟. ثم احسب حداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب الذي تحصل عليه باستخدام صيغة الثلاث نقاط المركزية، وقارنه مع الخطأ المضبوط لهذه الحالة.

٣- اعتبر المعلومات الموجودة في التمرين الأول. استخدم الصيغة العددية المركزية (5.29) لحساب جميع القيم التقريبية الممكنة لـ $f''(2.6)$. ثم قارن هذه القيم مع القيمة المضبوطة $f''(2.6) = -0.3906250$ (صحيحة إلى سبعة أرقام عشرية معنوية). ماذا تلاحظ ؟.

٤- اعتبر المعلومات الموجودة في التمرين الأول. استخدم الصيغة العددية (5.34) لحساب جميع القيم التقريبية الممكنة لـ $f'''(2.6)$. ثم قارن هذه القيم مع القيمة المضبوطة $f'''(2.6) = 0.4882813$ (صحيحة إلى سبعة أرقام عشرية معنوية). ماذا تلاحظ؟.

٥- اعتبر المعلومات الموجودة في التمرين الأول. استخدم الصيغة العددية الموجودة في الجدول رقم (٥,١) لحساب جميع القيم التقريبية الممكنة لـ $f^{(4)}(2.6)$. ثم قارن هذه القيم مع القيمة المضبوطة $f''(2.6) = -0.9155273$ (صحيحة إلى سبعة أرقام عشرية معنوية). ماذا تلاحظ؟.

٦- اعتبر المعلومات الموجودة في المثال (٥,٢):

أ) استخدم الصيغة العددية (5.16) لحساب قيمة تقريبية لـ $f'(0.4)$، ثم احسب الخطأ المضبوط وحداً أعلى لهذا الخطأ.

ب) استخدم الصيغة العددية (5.17) لحساب قيمة تقريبية لـ $f'(0.5)$، ثم احسب الخطأ المضبوط و حداً أعلى لهذا الخطأ. قارن القيمة التقريبية التي تحصل عليها هنا مع القيم التقريبية التي تم الحصول عليها في المثال (٥,٢).

٧- استنتج الصيغة العددية (5.14).

٨- لتكن $f(x) \in C^3[x_0, x_0 + 2h]$ حيث إن $h \neq 0$ عدد ثابت. استخدم كثيرة الحدود تايلور المناسبة لاستنتاج صيغة الثلاث نقاط (5.10).

٩- لتكن $f(x) \in C^5[x_0 - h, x_0 + 3h]$ حيث إن $h \neq 0$ عدد ثابت. استخدم كثيرة الحدود تايلور المناسبة لاستنتاج صيغة الثلاث نقاط (5.16).

١٠- استخدم كثيرة الحدود لاغرانج المناسبة لاستنتاج صيغة الخمس نقاط المركزية (5.17).

١١- لنفترض أننا اعتبرنا أخطاء التدوير أثناء حساب القيمة التقريبية لـ $f'(x_0)$ وذلك باستخدام الصيغة العددية (5.13). أوجد الحد الأعلى للفرق بين القيم المحسوبة و المضبوطة في هذه الحالة.

١٢- اعتبر استخدام الصيغة (5.13) لحساب قيمة عددية لـ $f'(2)$ حيث إن $f(x)=\frac{1}{x}$ على الفترة $[1.9,2.1]$. أوجد القيمة المثلى لـ h لحساب أفضل تقريب ممكن لـ $f'(2)$ وذلك باستخدام عمليات حسابية ترتكز على خمسة أرقام عشرية معنوية (أي أن $\delta=5\times10^{-6}$).

١٣- اعتبر المعلومات التالية:

x	0.1	0.3	0.4	0.6	0.7	0.9	1.0
$f(x)$	1.4	1.6	1.7	1.9	2.0	2.2	2.4

أ) استخدم صيغ الثلاث نقاط المناسبة لحساب أفضل تقريب ممكن لـ $f'(0.1)$، $f'(0.5)$ و $f'(1)$.

ب) احسب أفضل وأسوأ تقريب ممكن لـ $f'(0.6)$.

أذكر الأسباب التي جعلتك تعتقد أن القيم التي حسبتها هي الأفضل (الأسوأ) لكل حالة.

١٤- استنتج الصيغة العددية (5.29) باستخدام كثيرة الحدود لاغرانج المناسبة.

١٥- لتكن $f(x)\in C^6[x_0-2h,x_0+2h]$ حيث إن $h\neq0$ عدد ثابت. استخدم كثيرة الحدود تايلور المناسبة لاستنتاج الصيغة العددية:

$$f''(x_0)=\frac{1}{12h^2}[-f(x_0-2h)+16f(x_0-h)-30f(x_0)+16f(x_0+h)-f(x_0+2h)]$$
$$+\frac{h^4}{90}f^{(4)}(\eta)$$

١٦- لتكن لدينا الأعداد x_0-2h، x_0-h، x_0، x_0+h و x_0+2h حيث إن $h\neq0$ عدد ثابت وأن $f(x)\in C^5[x_0-2h,x_0+2h]$. استخدم كثيرة الحدود تايلور المناسبة لاستنتاج الصيغة العددية:

$$f'''(x_0)=\frac{1}{2h^3}[-f(x_0-2h)+2f(x_0-h)-2f(x_0+h)+f(x_0+2h)]-\frac{h^2}{4}f^{(5)}(\eta)$$

١٧- لتكن $f(x)\in C^6[x_0-2h,x_0+2h]$ حيث إن $h\neq 0$ عدد ثابت. استخدم كثيرة الحدود تايلور المناسبة لاستنتاج الصيغة العددية:

$$f^{(4)}(x_0)=\frac{1}{h^4}[f(x_0-2h)-4f(x_0-h)+6f(x_0)-4f(x_0+h)+f(x_0+2h)]$$
$$-\frac{h^2}{6}f^{(4)}(\eta)$$

حيث إن $\eta\in(x_0-2h,x_0+2h)$.

١٨- ليكن لدينا الدالة $f(x)=\cosh x$. استخدم صيغ التفاضل العددي الواردة في هذا الفصل لحساب قيماً تقريبية لـ $f'''(1)$ وذلك عندما يكون $h=0.1$ ، $h=0.2$ و $h=0.4$. احسب الأخطاء المضبوطة لكل حالة ثم قارن النتائج. ماذا تلاحظ ؟. ثم احسب حداً أعلى للخطأ عندما $h=0.2$ ، وقارنه مع الخطأ المضبوط لهذه الحالة.

١٩- ليكن لدينا الدالة $f(x)=\ln(x+1)$. استخدم صيغ التفاضل العددي الواردة في هذا الفصل لحساب قيماً تقريبية لـ $f'''(1)$ وذلك عندما يكون $h=0.1$ ، $h=0.2$ و $h=0.4$. احسب الأخطاء المضبوطة لكل حالة ثم قارن النتائج. ماذا تلاحظ ؟. ثم احسب حداً أعلى للخطأ عندما $h=0.2$ ، وقارنه مع الخطأ المضبوط لهذه الحالة.

٢٠- ليكن لدينا الدالة $f(x)=\ln(x+1)$. استخدم صيغة التفاضل العددي الواردة في هذا الفصل لحساب قيماً تقريبية لـ $f^{(4)}(1)$ وذلك عندما يكون $h=0.1$ ، $h=0.2$ و $h=0.4$. احسب الأخطاء المضبوطة لكل حالة ثم قارن

النتائج. ماذا تلاحظ ؟. ثم احسب حداً أعلى للخطأ عندما $h = 0.2$ ، وقارنه مع الخطأ المضبوط لهذه الحالة.

٢١- عندما استخدمنا صيغة عددية لحساب القيم التقريبية لـ $f''(0)$ لدالة ما $f(x)$ حصلنا على النتائج العددية التالية:

h	$\lvert f''(0) - D_h^2(f(0)) \rvert$
0.1	0.000313
0.2	0.001258
0.4	0.005137

ما هي الرتبة التقاربية للصيغة المستخدمة. ولماذا؟.

٢٢- استخدم أسلوب ريشاردسون والمعرّف في المعادلة (5.40) لحساب قيم تقريبية لـ $f'(0.5)$ حيث إن $f(x) = \ln(x+1)$ وذلك بوضع $h = 0.2, 0.1, 0.05, 0.025$ لحساب $D(h)$ ومن ثم وضع $h = 0.2, 0.1, 0.05$ لحساب $D_1(h)$.

٢٣- استنتج صيغة عددية لحساب قيماً تقريبية لـلتفاضل الأول للدالة f باستخدام أسلوب ريشاردسون والصيغة المركزية (5.13).

تلميح: ضع $D(h) = \dfrac{1}{2h}[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] \approx f'(x_0)$.

٢٤- استخدم الصيغة التي استنتجتها في التمرين السابق لحساب قيماً تقريبية لـ $f'(0.5)$ حيث إن $f(x) = \ln(x+1)$ وذلك بوضع $h = 0.2, 0.1, 0.05, 0.025$ لحساب $D(h)$ ومن ثم وضع $h = 0.2, 0.1, 0.05$ لحساب $D_1(h)$.

٢٥- استخدم صيغ نيوتن كوتس المغلقة: شبه المنحرف، سمبسون، 3/8 سمبسون و تلك المعرّفة بالمعادلة (5.68) لحساب قيماً تقريبية للتكامل $\int_0^1 \sinh x dx$.

ثم احسب الخطأ المضبوط وحداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب الذي تحصل عليه لكل حالة.

٢٦- استخدم صيغتي سمبسون و 3/8 سمبسون لتقريب التكامل $\int_1^2 \frac{x}{2x^2-1}dx$. ثم احسب الخطأ المضبوط لكل حالة. قارن النتائج العددية، ماذا تلاحظ ؟.

٢٧- استخدم النظرية (٥،١) لإيجاد حد الخطأ لطريقة شبه المنحرف.

٢٨- استخدم النظرية (٥،١) لإيجاد حد الخطأ لطريقة سمبسون.

٢٩- ليكن لدينا $G(x)=\int_{x_0}^{x}(t-x_0)(t-x_1)(t-x_2)dt$ ، أثبت أن $G(x)=\frac{1}{4}(x-x_0)^2(x-x_2)^2$.

٣٠- استنتج صيغة نقطة الوسط (5.72).

٣١- استنتج صيغة نيوتن كوتس المفتوحة (5.73).

٣٢- استخدم صيغ نيوتن كوتس المفتوحة والمعرّفة بالمعادلات (5.72)، (5.73) و (5.74) لحساب قيماً تقريبية للتكامل الموجود في التمرين السابق. ثم احسب الخطأ المضبوط وحداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب الذي تحصل عليه لكل حالة. قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي حصلت عليها في التمرين ٢٥. ماذا تلاحظ؟.

٣٣- استخدم طريقة شبه المنحرف المركبة لحساب قيمة تقريبية للتكامل $\int_0^1 \sinh x dx$ وذلك بوضع $n=6$. ثم احسب الخطأ المضبوط وحداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب الذي تحصل عليه.

٣٤- أعد التمرين السابق باستخدام طريقة سمبسون المركبة وذلك $n = 6$. هل النتائج العددية التي تحصل عليها هنا أفضل من تلك التي تحصل عليها في التمرين ٣٣ ولماذا؟.

٣٥- استنتج طريقة $\frac{3}{8}$ سمبسون المركبة.

٣٦- استخدم طريقة $\frac{3}{8}$ سمبسون المركبة لحساب قيمة تقريبية للتكامل $\int_0^1 \sinh\, x dx$ وذلك بوضع $n = 6$. ثم احسب الخطأ المضبوط وحداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب الذي تحصل عليه. قارن النتائج العددية التي تحصل عليها مع تلك التي حصلت عليها في التمرينين ٣٣ و ٣٤.

٣٧- استنتج طريقة نقطة الوسط المركبة.

٣٨- استخدم طريقة نقطة الوسط المركبة لحساب قيمة تقريبية للتكامل $\int_0^1 \sinh\, x dx$ وذلك بوضع $n = 6$. ثم احسب الخطأ المضبوط وحداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب الذي تحصل عليه. قارن النتائج العددية التي تحصل عليها مع تلك في التمرين ٣٣.

٣٩- اعتبر الدالة $f(x) = e^{1-x}$ عند الأعداد التالية:

$$x:\ 1.0 \quad 1.1 \quad 1.4 \quad 1.6 \quad 1.7 \quad 2.0 \quad 2.1 \quad 2.3 \quad 2.6$$

أ) استخدم صيغة شبه المنحرف المركبة لحساب أفضل قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^{2.6} e^{1-x} dx$. ثم احسب الخطأ المضبوط.

ب) أعد الفقرة (أ) باستخدام صيغة سمبسون المركبة. ماذا تلاحظ؟.

٤٠- استخدم طريقة سمبسون المركبة لحساب قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ بدقة 5×10^{-3}.

٤١- استخدم طريقة رومبرغ لحساب قيماً تقريبية للتكامل $\int_0^1 \sinh\ x dx$. احسب قيم $R_{k,0}$ من أجل $k = 0,1,2$. ثم احسب الأخطاء $|I(f) - R_{k,0}|$، من أجل $k = 0,1,2$. ماذا تلاحظ؟.

٤٢- اعتبر القيم التقريبية $R_{0,0} = 0.75$، $R_{1,0} = 0.775$، $R_{2,0} = 0.78279$ للتكامل $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ احسب القيم التقريبية $R_{1,1}$، $R_{2,1}$ و $R_{2,2}$، ثم احسب الأخطاء المرافقة لهذه القيم التقريبية.

٤٣- استنتج المعادلة (5.91).

٤٤- استخدم تكامل جاوس عندما $n = 1$ لحساب قيمة تقريبية للتكامل $\int_0^1 \sinh\ x dx$ ، ثم احسب الخطأ المرافق لهذا التقريب.

٤٥- استخدم تكامل جاوس عندما $n = 2$ لحساب قيمة تقريبية للتكامل $\int_0^1 \sinh\ x dx$ ، ثم احسب الخطأ المرافق لهذا التقريب. قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي حصلت عليها في التمارين السابقة التي تم استخدام الطرائق الأخرى لحساب هذا التكامل.

تمارين الحاسب

ح١- اعتبر الدالة $f(x)=\ln x$ استخدم الصيغة العددية (5.17) لحساب قيماً تقريبية لـ $f'(2)$ عندما $h=0.4$، $h=0.2$، $h=0.1$ و $h=0.05$. ثم احسب الأخطاء المرافقة لكل تقريب $|f'(2)-D_h(f)|$. ماذا تلاحظ؟ هل يمكن الاستدلال من هذه الأخطاء أن الرتبة التقاربية لهذه الصيغة هي الرابعة؟.

ح٢- اعتبر الدالة $f(x)=\ln x$ استخدم الصيغة العددية الموجودة في الجدول رقم (٥,١) لحساب قيماً تقريبية لـ $f^{(4)}(2)$ عندما $h=0.4$، $h=0.2$، $h=0.1$ و $h=0.05$ حيث إن $f(x)=\ln x$، ثم احسب الأخطاء المرافقة لكل تقريب $|f^{(4)}(2)-D_h^{(4)}(f)|$. ماذا تلاحظ؟ هل يمكن الاستدلال من هذه الأخطاء على أن الرتبة التقاربية لهذه الصيغة هي الثانية؟.

ح٣- استخدم طريقة سمبسون المركبة لحساب قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ بدقة 5×10^{-5}.

ح٤- استخدم طريقة رومبرغ لحساب قيمة تقريبية للتكامل $\int_0^1 \sinh x dx$ بدقة 5×10^{-8}.