الفصل السادس

مسألة القيمة الابتدائية في المعادلات التفاضلية العادية

The Initial Value Problem in ODE

تنقسم المعادلات التفاضلية إلى فئتين، عادية وجزئية؛ وذلك بناء على عدد المتغيرات المستقلة الموجودة في المعادلة التفاضلية. فإذا كانت المعادلة التفاضلية تحتوي على متغير مستقل واحد فإنها تسمى معادلة تفاضلية عادية. أما إذا كان عدد المتغيرات المستقلة أكثر من واحد فإنها تسمى معادلة تفاضلية جزئية. تكون رتبة أو درجة المعادلة التفاضلية هي أعلى درجة للتفاضل الموجود في المعادلة. يحتوي الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية ذات الرتبة n على ثوابت عشوائية عددها n. لإيجاد قيم هذه الثوابت نحتاج إلى شروط معينة عددها n إذا كانت جميع هذه الشروط معطاة عند نقطة واحدة فإنها تسمى شروطاً ابتدائية. وتسمى المسألة التي تتضمن معادلة تفاضلية عادية مع شروط ابتدائية بمسألة القيمة الابتدائية. من ناحية أخرى، إذا كانت الشروط معطاة عند أكثر من نقطة فإنها تسمى شروطاً حدية. المسألة التي تحتوي على معادلة تفاضلية عادية مقرونة بشروط حدية تسمى مسألة القيم الحدية. لهاتين المسألتين خواص مختلفة، فمسألة القيمة الابتدائية تـُعرّف بالمسألة المعتمدة على الوقت، حيث إن الحل يكون معتمداً على الوقت (أي أن دالة الحل هي دالة بالمتغير t

فقط) وبالتالي فإن الحل يدل على ماذا سوف يحصل مستقبلاً. من ناحية أخرى، مسألة القيم الحدية تعتمد على المسافة (الإزاحة) حيث إن الحل عبارة عن دالة بالمتغير x وأن هذا المتغير يرمز لموقع معين على جسم ما. وبالتالي فإن الحل في هذه الحالة يدل على ماذا يحدث في موقع ما.

يوجد العديد من الكتب التي تناقش الطرائق الرياضية لإيجاد حلولاً مضبوطة (تحليلية أو رياضية) لمسألتي القيم الابتدائية والحدية في المعادلات التفاضلية العادية. ولكن من الناحية العملية هناك الكثير من مسائل القيم الابتدائية والحدية في المعادلات التفاضلية العادية والتي تنشأ في مختلف التطبيقات العلمية والهندسية التي لا يمكن إيجاد حلها المضبوط باستخدام الطرائق الرياضية. عادة نلجأ إلى الطرائق العددية لحساب حلولاً تقريبية لمثل هذه المسائل. في هذا الفصل سوف نناقش بعض الطرائق العددية لمسألة القيمة الابتدائية في المعادلات التفاضلية العادية. أما الطرائق العددية لمسألة القيم الحدية فسوف تتم دراستها في الفصل الثامن.

تنشأ مسألة القيم الابتدائية في الكثير من التطبيقات العلمية والهندسية، فمثلاً في علم الأحياء الرياضي تتطلب دراسة النمو السكاني (التكاثر) لنوع من الأصناف الحية حل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y'(t) = (b-d)y$$
$$y(0) = y_0$$

حيث إن $y(t)$ تمثل عدد السكان عند الزمن t، b و d تمثلان عدد المواليد و الوفيات، على الترتيب. هنا الثابت $y(0) = y_0$ هو العدد السكاني الابتدائي. نشير إلى أن الحل المضبوط لهذه المسألة هو $y(t) = y_0 e^{(b-d)t}$، وبالتالي إذا $b > d$ فإن عدد السكان ينمو بشكل أسي أما إذا كان $b < d$ فإن عدد السكان يتناقص وبشكل أسي أيضاً.

يتضمن هذا الفصل الطرائق العددية لحل المعادلة التفاضلية العادية:

$$y' = f(t, y) \tag{6.1a}$$

مقرونة بالشرط الابتدائي:

$$y(t_0) = \alpha \tag{6.1b}$$

حيث إن t_0 و α عددين ثابتين، $y(t)$ هي الحل المضبوط المراد إيجاده و f دالة معطاة بالنسبة للمتغيرين المستقل t والمجهول y. نشير هنا إلى أن مسألة القيمة الابتدائية تكون خطية إذا كانت الدالة f دالة خطية بالنسبة لـ y وتكون غير خطية إذا كانت f دالة غير خطية بالنسبة لـ y.

(٦,١) مفاهيم أساسية

Basic Principles

قبل البدء في دراسة الطرائق العددية لحل مسألة القيمة الابتدائية (6.1) لنستعرض بعض التعريفات والنظريات المتعلقة بوجود ووحدانية حل هذه المسألة.

تعريف (٦,١)

يُقال إن الدالة $f(t, y)$ تحقق شرط لـيـبـشـتـز بالنسبة للمتغير y على المجموعة:

$$D = \{(t, y) : a \le t \le b,\ -\infty < y < \infty\} \tag{6.3}$$

إذا كان هناك ثابت $L > 0$ بحيث إن:

$$| f(t, y_1) - f(t, y_2) | \le L\, | y_1 - y_2 | \tag{6.4}$$

من أجل (t, y_1) و (t, y_2) ينتميان إلى المجموعة D. الثابت L يسمى ثابت لـيـبـشـتـز.

لتكن $f(t,y)$ دالة بحيث إن $\frac{\partial f}{\partial y}$ موجود ومحدود لكل (t,y) في D. فإنه باستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التفاضل لأي نقطتين (t,y_1) و (t,y_2) في D يوجد عدد ξ بين y_1 و y_2 بحيث إن:

$$\frac{f(t,y_1)-f(t,y_2)}{y_1-y_2}=\frac{\partial f(t,\xi)}{\partial y} \tag{6.5}$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$\begin{aligned} |f(t,y_1)-f(t,y_2)| &= \left|\frac{\partial f(t,\xi)}{\partial y}\right| |y_1-y_2| \\ &\le L|y_1-y_2| \end{aligned} \tag{6.6}$$

حيث إن $L \le \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ لكل (t,y) في D. هذا يعني أنه إذا كانت الدالة f معرفة في المجموعة D ويوجد عدد ثابت L بحيث إن $L \le \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ لكل (t,y) في D، فإنها تحقق شرط لـيـبـتـشـز في هذه المجموعة بالنسبة للمتغير y وثابت لـيـبـشـتـز L.

نشير هنا إلى أن شرط لـيـبـشـتـز المعرّف بالمعادلة (6.4) يعتبر أضعف من وجود $\frac{\partial f}{\partial y}$، أي أنه قد يوجد دوال يكون تفاضلها الجزئي بالنسبة للمتغير y غير موجود ولكنها تحقق شرط لـيـبـشـتـز.

نظرية (٦,١)

لتكن $f(t,y)$ دالة متصلة على المجموعة D والمعرّفة بالمعادلة (6.3). إذا كانت f تحقق شرط لـيـبـشـتـز على هذه المجموعة بالنسبة للمتغير y، فإنه يوجد لمسألة القيمة الابتدائية (6.1) حل وحيد $y(t)$ من أجل $a \le t \le b$.

بالنسبة للبنود اللاحقة في هذا الفصل والتي تتضمن الطرائق العددية لحل مسألة القيمة الابتدائية (6.1) فإننا سوف نبحث عن حل لهذه المسألة في المجال $a \le t \le b$ حيث إن a و b ثوابت محدودة. بناء عليه، فإننا سوف نكتب مسألة القيمة الابتدائية (6.1) بالشكل:

$$\begin{aligned} & y' = f(t,y), \qquad a \le t \le b \\ & y(a) = \alpha \end{aligned} \tag{6.7}$$

أيضاً سوف نفترض أن f تحقق شروط النظرية (٦,١) والتي تضمن أن يكون للمسألة حل وحيد ذو تفاضلات متصلة.

(٦,٢) طرائق الفروق المنتهية

Finite difference Methods

هنا سوف نناقش بعض طرائق الفروق المنتهية لحل المسألة (6.7). لعمل ذلك، نقطّع الفترة $[a,b]$ إلى فترات صغيرة $[t_{i-1},t_i]$، من أجل $i = 1,2,\dots,N-1$ وذلك باستخدام التقطيع المعرف بـ:

$$t_i = a + ih \tag{6.8}$$

من أجل $i = 0,1,2,\dots,N$، $h = \dfrac{b-a}{N}$، $a = t_0$ و $b = t_N$. تسمى الأعداد t_i بالنقاط العقدية ويسمى الثابت h مقياس الخطوة.

عندما $t = t_i > t_0$ فإن الدالة $y(t)$ تحقق المعادلة التفاضلية في (6.7) أي أن:

$$y'(t_i) = f(t_i, y(t_i)) \tag{6.9}$$

من أجل $i = 1,2,\dots,N$. وهذا يعني أن $y(t)$ هو الحل المضبوط لمسألة القيمة الابتدائية (6.7).

أبسط أسلوب لتقريب المعادلة التفاضلية (6.9) هو استبدال التفاضل y' عند t_i بالصيغة:

$$y'(t_i)=\frac{y(t_i+h)-y(t_i)}{h}-\frac{h}{2}y''(\xi_i) \tag{6.10}$$

حيث إن $t_i<\xi_i<t_i+h$، وهي صيغة النقطتين التي درسناها في الفصل الخامس.

بتعويض المعادلة (6.10) في المعادلة (6.9) نحصل على:

$$y(t_i+h)-y(t_i)-hf(t_i,y(t_i))=\frac{h^2}{2}y''(\xi_i) \tag{6.11}$$

من أجل $i=0,1,2,\dots,N-1$. وباختيار قيمة h صغيرة بشكل كاف فإنه يمكن إهمال حد الخطأ (الطرف الأيمن للمعادلة (6.11))، وبالرمز للقيم التقريبية للحل y عند t_i و t_i+h بـ w_i و w_{i+1}، على الترتيب (أي أننا نضع $w_i\approx y(t_i)$ و $w_{i+1}\approx y(t_i+h)$)، فإن المعادلة (6.11) تأخذ الشكل:

$$w_{i+1}=w_i+hf(t_i,w_i) \tag{6.12}$$

من أجل $i=0,1,2,\dots,N-1$. معادلة الفروق (6.12) تسمى صيغة أويلر لحل مسألة القيمة الابتدائية (6.7) والتي تحسب w_{i+1} استناداً على معرفة w_i. ابتداء من القيمة الابتدائية $w_0=y(t_0)$ فإن الصيغة (6.12) تحسب w_1 كقيمة تقريبية لـ $y(t_1)$، ثم تحسب القيم w_2، w_3، ...، w_N بالتتابع. وهي قيم تقريبية لـ $y(t_2)$، $y(t_3)$، ...، $y(t_N)$. تتضمن الخوارزمية (٦,١) خطوات استخدام هذه الطريقة.

ملاحظة:

نشير هنا إلى أن معادلة الفروق (6.12) تكون خطية بالنسبة لـ w_i إذا كانت مسألة القيمة الابتدائية (6.7) خطية. وبطبيعة الحال تكون المعادلة (6.12) غير خطية إذا كانت المسألة (6.7) غير خطية. وينطبق ذلك على جميع الطرائق العددية التي سندرسها في هذا الفصل.

مثال (٦,١)

نستعرض هنا استخدام طريقة أويلر لحل مسالة القيم الابتدائية:

$$\begin{aligned} y' &= y + e^t \\ y(0) &= 1 \end{aligned} \tag{6.13}$$

في الفترة $0 \le t \le 1$ وذلك بوضع $h = 0.1$.

بما أن $h = \dfrac{b-a}{N}$، $a = 0$ و $b = 1$ فإنه يكون لدينا $N = \dfrac{1}{0.1} = 10$، وبالتالي فإن العقد معرفة بـ $t_i = 0.1i$ من أجل $i = 0,1,2,\ldots,N$. ويمكن كتابة صيغة أويلر لهذه المسألة بالشكل:

$$\begin{aligned} w_{i+1} &= w_i + h(w_i + e^{t_i}) \\ &= (1+h)w_i + he^{0.1i} \\ &= 1.1w_i + 0.1e^{0.1i} \end{aligned} \tag{6.14}$$

من أجل $i = 0,1,2,\ldots,9$. عندما $i = 0$ فإن هذه الصيغة تأخذ الشكل $w_1 = 1.1w_0 + 0.1$ وبما أن $w_0 = y(0) = 1$ فإنه يكون لدينا $w_1 = 1.2$. وبمعرفة w_1 يمكن حساب قيمة w_2 وذلك بوضع $i = 1$ في الصيغة (6.14) حيث نحصل على $w_2 = 1.1w_1 + 0.1e^{0.1} = 1.43052$. وبوضع $i = 2$ في الصيغة العددية (6.14) يمكن أن نحسب $w_3 = 1.1w_2 + 0.1e^{0.2} = 1.69571$ وبتكرار ذلك يمكن حساب قيم w_i، $i = 4,5,\ldots,10$. الحل المضبوط لمسألة القيمة الابتدائية (6.13) هو $y(t) = (1+t)e^t$ وبالتالي يمكن حساب الأخطاء المتعلقة بالقيم التقريبية w_i من أجل $i = 1,2,\ldots,10$. هذه الأخطاء مدرجة في الجدول رقم (٦,١) حيث يتضح أن الخطأ يتزايد كلما زادت قيمة i (أو t_i)، هذه الحقيقة قائمة لجميع الطرائق العددية وذلك لأنه بازدياد قيمة t_i تبتعد قيمة الحل المحسوبة عن القيمة الابتدائية (المضبوطة).

الجدول رقم (٦,١). النتائج العددية للمثال (٦,١).

i	t_i	w_i	y_i	$\lvert w_i - y_i \rvert$
0	0.0	1.00000	1.00000	0.00000
1	0.1	1.20000	1.21569	0.01569
2	0.2	1.43052	1.46568	0.03517
3	0.3	1.69571	1.75482	0.05911
4	0.4	2.00027	2.08855	0.08829
5	0.5	2.34947	2.47308	0.12361
6	0.6	2.74929	2.91539	0.16610
7	0.7	3.20644	3.42338	0.21694
8	0.8	3.72845	4.00597	0.27752
9	0.9	4.32385	4.67325	0.34940
10	1.0	5.00220	5.43656	0.43436

خوارزمية (٦,١): أويلر

تستخدم هذه الخوارزمية طريقة أويلر (6.12) لحل مسألة القيمة الابتدائية (6.7) في الفترة $[a,b]$. بوضع $w0 = w_0 = y(a)$ فإن الخوارزمية تحسب $w = w_i$ من أجل $i = 1,2,\ldots,N$.

الخطوة ١: أدخل قيم a، b، N و $w0$

الخطوة ٢: ضع

$$h = \frac{b-a}{N}$$

$$t = a$$

$$w = w0$$

الخطوة ٣: من أجل $i = 1,2,\ldots,N$ كرر الخطوات ٤ - ٦

الخطوة ٤: ضع $w = w + hf(t, w)$

الخطوة ٥: ضع $t = t + h$

الخطوة ٦: اطبع $i,\ t,\ w$

ملاحظة:

نذكر هنا أنه بالنسبة للخوارزمية (٦,١) والخوارزميات الأخرى في هذا الفصل لا تحتوي على الخطوة المتعلقة بالحل المضبوط $y(t)$ وبالتالي الخطأ المضبوط $|w_i - y_i|$. عند استخدام هذه الخوارزميات لحل مسألة ما يمكن بسهولة إضافة الخطوة المتعلقة بالحل المضبوط للمسألة التي يراد حلها وكذلك الخطوة المتضمنة للخطأ المضبوط في المكان المناسب. بالنسبة للخوارزمية (٦,١) يمكن إضافة هاتين الخطوتين بعد الخطوة الخامسة. أيضاً، ينبغي تعديل الخطوة التي تتضمن طباعة النتائج، وهي الخطوة السادسة في الخوارزمية (٦,١) لتتضمن طباعة الحل والخطأ المضبوط. على كل حال، يمكن للمستخدم تغيير خطوة الطباعة حسب النتائج العددية التي يريد طباعتها.

نشير هنا إلى أن حد الخطأ الذي تم إهماله في المعادلة (6.11) لاستنتاج الصيغة العددية (6.12) لحساب الحل العددي للمسألة (6.7) يسمى الخطأ المحلي المقطوع. بشكل عام، الخطأ المحلي المقطوع عند الخطوة $(i+1)$ هو الفرق بين القيمة المضبوطة والعددية لـ $y(t_{i+1})$. التعريف التالي يوضح ذلك.

تعريف (٦,٢)

لطريقة الفروق المنتهية:

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha \\ w_{i+1} &= w_i + h\phi(t_i, w_i, h) \end{aligned} \tag{6.15}$$

الخطأ المحلي المقطوع:

$$L_T = y(t_{i+1}) - y(t_i) - h\phi(t_i, y(t_i), h) \tag{6.16}$$

من أجل $i = 0,1,2,\dots,N-1$.

حسب التعريف (٦,٢) فإننا نلاحظ من المعادلة (6.11) أن الخطأ المحلي المقطوع لطريقة أويلر هو:

$$L_T = \frac{h^2}{2} y''(\xi_i) \tag{6.17}$$

حيث إن $t_i < \xi_i < t_i + h$. إذا كانت $\max_t |y''(t)| = M$، حيث إن M عدد ثابت، فإنه يكون لدينا:

$$|L_T| \le \frac{h^2}{2} M$$

تعريف (٦,٣)

تكون الطريقة العددية (6.15) ذات رتبة تقاربية n إذا كان n هو أكبر عدد يحقق العلاقة:

$$y(t_i + h) - y(t_i) - h\phi(t_i, y(t_i), h) = O(h^{n+1}) \tag{6.18}$$

من المعادلتين (6.11) و (6.18) نحصل على:

$$\frac{y(t_i + h) - y(t_i)}{h} - f(t_i, y(t_i)) = \frac{h}{2} y''(\xi_i) \tag{6.19}$$

وهذا يعني أن طريقة أويلر ذات رتبة تقاربية أولى، أي أن $O(h)$.

ملاحظة:

لأي طريقة عددية لحل مسألة القيمة الابتدائية (6.7)، إذا كانت رتبة الخطأ المحلي المقطوع $(n+1)$ فإن معدل تقاربها يكون n.

تعريف (٦,٤)

يُقال إن الطريقة العددية (6.15) متوافقة مع مسالة القيمة الابتدائية (6.7) إذا كان:

$$\phi(t, y, 0) = f(t, y) \tag{6.20}$$

ملاحظة:

إذا كانت الطريقة العددية (6.15) متوافقة مع مسألة القيمة الابتدائية (6.7) فإنه يكون لدينا:

$$\begin{aligned} y(t+h) - y(t) - h\phi(t, y(t), h) &= hy'(t) - h\phi(t, y(t), 0) + O(h^2) \\ &= O(h^2) \end{aligned}$$

وذلك لأن $y'(t) = f(t, y(t)) = \phi(t, y(t), 0)$ حسب العلاقة (6.20). إذن حسب التعريف (٦,٣) فإن الطريقة المتوافقة تكون ذات رتبة تقاربية واحدة على الأقل. في الواقع، طريقة أويلر هي الطريقة الوحيدة من النوع (6.15) و التي يكون معدلها التقاربي واحد.

تعريف (٦,٥)

يسمى تراكم الأخطاء المقطوعة لطريقة الفروق المنتهية بالخطأ العام.

من خلال هذا التعريف يمكننا ملاحظة أن الخطأ العام المتعلق بالتقريب w_{i+1} في طريقة أويلر هو الخطأ عندما يكون كل القيم السابقة w_i، w_{i-1}، ...، w_1 قد تم إيجادها باستخدام طريقة أويلر.

لنضع $E_{i+1} = y(t_{i+1}) - w_{i+1}$، وبالتالي فإنه باستخدام المعادلة (6.11) يكون لدينا:

$$\begin{aligned} E_{i+1} &= y(t_{i+1}) - w_{i+1} \\ &= y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_i) - w_i - hf(t_i, w_i) \qquad (6.21) \\ &= y(t_i) - w_i + h[f(t_i, y(t_i)) - f(t_i, w_i)] + \frac{h^2}{2} y''(\xi_i) \end{aligned}$$

الآن لنفترض أن الدالة $f(t,y)$ تحقق شرط لـيـبـشـتـز فإننا نحصل على:

$$| f(t_i, y(t_i)) - f(t_i, w_i) | \le L | y(t_i) - w_i | = L | E_i | \qquad (6.22)$$

وباستخدام المعادلتين (6.21) و (6.22) يكون لدينا:

$$| E_{i+1} | \le | E_i | + hL | E_i | + \frac{h^2}{2} M$$

ومنه نحصل على:

$$| E_{i+1} | \le (1 + hL) | E_i | + \frac{h^2}{2} M \qquad (6.23)$$

بوضع $i = 0$ في المعادلة (6.23) يكون لدينا $| E_1 | \le (1 + hL) | E_0 | + \frac{h^2}{2} M$، وبما أن $| E_0 | = | y(t_0) - w_0 | = 0$ فإننا نحصل على $| E_1 | \le \frac{h^2}{2} M$. وبوضع $i = 1$ في المعادلة (6.23) نحصل على:

$$| E_2 | \le (1 + hL) | E_1 | + \frac{h^2}{2} M$$

ومنه يكون لدينا $| E_2 | \le \{(1 + (1 + hL)\} \frac{h^2}{2} M$. بالاستمرار بهذا الأسلوب نحصل على:

$$| E_{i+1} | \le \{(1 + (1 + hL) + (1 + hL)^2 + \cdots + (1 + hL)^i\} \frac{h^2}{2} M \qquad (6.24)$$

وبما أن:

$$\frac{(1 + hL)^{i+1}}{hL} = 1 + (1 + hL) + (1 + hL)^2 + \cdots + (1 + hL)^i$$

فإن المعادلة (6.23) تصبح بالشكل:

$$|E_{i+1}| \le \frac{hM}{2L}[(1+hL)^{i+1}-1] \tag{6.25}$$

الآن بما أن $e^t = 1+t+\frac{1}{2}t^2e^{\varsigma}$، حيث إن $0<\varsigma<t$، فإن $e^t \ge 1+t$ و $1+hL \le e^{hL}$ وبالتالي فإن المعادلة (6.24) تأخذ الشكل:

$$|E_{i+1}| \le \frac{hM}{2L}[(e^{hL(i+1)}-1] \tag{6.26}$$

إضافة إلى ذلك، بما أن $t_{i+1} = t_0 + (i+1)h$، حيث إن $h = \frac{t_{i+1}-t_0}{i+1}$ فإن (6.26) تصبح بالشكل:

$$|E_{i+1}| \le \frac{hM}{2L}[(e^{L(t_{i+1}-t_0)}-1] \tag{6.27}$$

وبناء على ذلك فإن الخطأ العام يتناسب طردياً مع مقياس الخطوة h. وهذا يعني أن معدل التقارب لطريقة أويلر يكون واحد.

لنعود الآن إلى المعادلة (6.9)، حيث إنه إذا استبدلنا $y'(t_i)$ في (6.9) بالصيغة المركزية:

$$y'(t_i) = \frac{y(t_i+h)-y(t_i-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}y'''(\xi_i) \tag{6.28}$$

حيث إن $t_i - h < \xi_i < t_i + h$، فإن المعادلة (6.9) تكتب بالشكل:

$$y(t_i+h)-y(t_i-h)-2hf(t_i,y(t_i)) = \frac{h^3}{6}y'''(\xi_i) \tag{6.29}$$

من أجل $i=1,2,\ldots,N-1$. وباختيار قيمة h صغيرة بشكل كاف فإنه يمكن إهمال حد الخطأ (الطرف الأيمن للمعادلة (6.29))، وبالرمز للقيم التقريبية للحل y عند t_i+h، t_i و t_i-h بـ w_{i+1} و w_i، w_{i-1} و، على الترتيب، فإن المعادلة (6.29) تأخذ الشكل:

$$w_{i+1} = w_{i-1} + 2hf(t_i, w_i) \tag{6.30}$$

من أجل $i = 1,2,\ldots,N-1$. معادلة الفروق (6.30) معروفة باسم صيغة نقطة- الوسط لحل مسألة القيمة الابتدائية (6.7) والتي تحسب w_{i+1} استناداً على معرفة w_i و w_{i-1}. من المعادلة (6.30) يتضح أنه عندما $i = 1$ فإن هذه الصيغة تحسب w_2 استناداً على قيم w_0 و w_1. وبما أن w_1 عادة لا تكون قيمتها متوفرة في المسألة فإنه ينبغي استخدام صيغة أخرى لحسابها حتى يمكن استخدام الصيغة (6.30) لحل المسألة (6.7). على كل حال، تعتبر صيغة نقطة- الوسط من الصيغ ذات الخطوتين والتي تتطلب قيمتين ابتدائيتين للبدء في الحسابات. سوف ندرس هذه الصيغ بالتفصيل في بند لاحق. تستعرض الخوارزمية (٦,٢) كيفية استخدام هذه الصيغة.

الآن من المعادلة (6.29) نلاحظ أن الخطأ المحلي المقطوع لصيغة نقطة- الوسط هو $\frac{h^3}{6}y'''(\xi_i)$. أيضاً، يمكن كتابة (6.29) بالشكل:

$$L_T = \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{2h} - f(t_i, y(t_i)) = \frac{h^2}{6}y'''(\xi_i) \qquad (6.31)$$

ومنه يتضح أن معدل التقارب لطريقة نقطة- الوسط يكون تربيعياً، أي أن $O(h^2)$.

مثال (٦,٢)

نستعرض هنا استخدام طريقة نقطة- الوسط (6.30) لحل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = y + e^t$$
$$y(0) = 1$$

في الفترة $0 \le t \le 1$ وذلك بوضع $h = 0.1$. كما في المثال السابق يكون لدينا $N = 10$ و $t_i = 0.1i$ من أجل $i = 0,1,2,\ldots,N$. ويمكن كتابة صيغة نقطة- الوسط لهذه المسألة بالشكل:

$$\begin{aligned} w_{i+1} &= w_{i-1} + 2h(w_i + e^{t_i}) \\ &= w_{i-1} + 2h(w_i + e^{0.1i}) \qquad (6.32) \\ &= w_{i-1} + 0.2(w_i + e^{0.1i}) \end{aligned}$$

من أجل $i=1,2,\ldots,9$. الآن عندما $i=1$ تصبح هذه الصيغة بالشكل $w_2 = w_0 + 0.2(w_1 + e^{0.1})$ و بالتالي لا يمكن الاستمرار في الحساب بدون معرفة قيمة w_1. يمكن حساب قيمة w_1 باستخدام طريقة أويلر ولكن بما أن معدل التقارب لطريقة أويلر هو الواحد فإن ذلك سوف يؤثر على دقة الحلول العددية و ذلك لأن طريقة نقطة- الوسط ذات رتبة تقاربية ثانية. بناء عليه، فإنه من الأفضل استخدام طريقة عددية ذات رتبة تقاربية ثانية على الأقل وتتطلب معرفة w_0 فقط. سوف ندرس هذه الطرائق في بنود لاحقة. بالنسبة للمثال الحالي فقد استخدمنا طريقة أويلر لحساب w_1. أيضاً، ولهدف المقارنة، استخدمنا $w_1 = y(t_1)$، أي القيمة المضبوطة. النتائج العددية موجودة في الجدول رقم (٦,٢) حيث يتضح أنه عندما استخدمنا $w_1 = y(t_1)$ حصلنا على نتائج أفضل. أيضاً، من النتائج العددية الموجودة في الجدولين رقمي (٦,١) و(٦,٢) أن الحلول العددية المحسوبة باستخدام طريقة نقطة- الوسط أدق من تلك التي تم حسابها باستخدام طريقة أويلر وهذا طبيعي لأن رتبة التقارب لطريقة نقطة- الوسط أعلى من تلك لطريقة أويلر.

الجدول رقم (٦,٢). النتائج العددية للمثال (٦,٢).

		عندما تم استخدام أويلر		عندما تم استخدام الحل المضبوط	
i	t_i	w_i	$\lvert w_i - y_i \rvert$	w_i	$\lvert w_i - y_i \rvert$
0	0.0	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000
1	0.1	1.20000	0.01569	1.21569	0.00000
2	0.2	1.46103	0.00465	1.46417	0.00151
3	0.3	1.73649	0.01833	1.7528	0.00201
4	0.4	2.07830	0.01025	2.08470	0.00385
5	0.5	2.45051	0.02757	2.46811	0.00497
6	0.6	2.89815	0.01724	2.90807	0.00732
7	0.7	3.39457	0.02881	3.41415	0.00923
8	0.8	3.97981	0.02616	3.99365	0.01232
9	0.9	4.63564	0.03761	4.65798	0.01526
10	1.0	5.39886	0.03770	5.41717	0.01940

خوارزمية (٦,٢): نقطة– الوسط

تستخدم هذه الخوارزمية طريقة نقطة– الوسط (6.30) لحل مسألة القيمة الابتدائية (6.7) في الفترة $[a,b]$. بوضع $w0 = w_0 = y(a)$ فإن الخوارزمية تحسب $w = w_i$ من أجل $i = 2,\ldots,N$.

الخطوة ١: أدخل قيم a، b، N، $w0$ و w_1

الخطوة ٢: ضع

$$h = \frac{b-a}{N}$$

$$t = a$$

الخطوة ٣: من أجل $i = 2,\ldots,N$ كرر الخطوات ٤ - ٧

الخطوة ٤: ضع $w = w0 + 2hf(t, w1)$

الخطوة ٥: ضع $t = t + h$

الخطوة ٦: ضع $w0 = w1$

$$w1 = w$$

الخطوة ٧: اطبع $i,\ t,\ w$

تعتبر طريقتي أويلر ونقطة- الوسط حالتين خاصتين مما يسمى بالطرائق متعددة الخطوات، حيث إن طريقة أويلر ذات خطوة واحدة وهي أبسط طريقة من مجموعة الطرائق متعددة الخطوات. من ناحية أخرى، فإنه من الواضح أن طريقة نقطة- الوسط هي طريقة ذات خطوتين. سوف ندرس الطرائق متعددة الخطوات بالتفصيل في البند (٦,٥).

(٦,٣) طرائق تايلور
Taylor's Methods

ليكن الحل المضبوط $y(t)$ لمسألة القيمة الابتدائية (6.7) يحقق $y \in C^{n+1}[a,b]$ فإنه حسب نظرية تايلور (نظرية ١,٨) يوجد $\varsigma \in (a,b)$ بحيث إن:

$$y(t) = y_i + (t-t_i)y_i' + \frac{(t-t_i)^2}{2!}y_i'' + \cdots + \frac{(t-t_i)^n}{n!}y_i^{(n)} + \frac{(t-t_i)^{(n+1)}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\varsigma) \tag{6.33}$$

هنا استخدمنا الرموز $y_i^{(m)} = y^{(m)}(t_i)$ ، $m = 0,1,2,\ldots,n$ لتسهيل الكتابة.

الآن بما أن $y^{(m)}(t) = f^{(m-1)}(t,y)$، من أجل $m = 1,2,\dots,n$، فإنه يمكن كتابة المعادلة (6.33) بالشكل:

$$\begin{aligned} y(t) = y_i + (t-t_i) f(t_i, y_i) + \frac{(t-t_i)^2}{2!} f'(t_i, y_i) + \cdots \\ + \frac{(t-t_i)^n}{n!} f^{(n-1)}(t_i y_i) + \frac{(t-t_i)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n)}(\varsigma, y(\varsigma)) \end{aligned} \tag{6.34}$$

وبوضع $t = t_i + h$ في هذه المعادلة نحصل على:

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2!} f'(t_i, y_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(t_i y_i) + \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n)}(\varsigma_i, y(\varsigma_i))$$

حيث إن $t_i < \varsigma_i < t_i + h$، من أجل $i = 0,1,2,\dots,N-1$. يمكن كتابة المعادلة الأخيرة بالشكل:

$$y_{i+1} = y_i + hT^{(n)}(t_i, y_i, h) + \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n)}(\varsigma_i, y(\varsigma_i)) \tag{6.35}$$

حيث إن:

$$T^{(n)}(t_i, y_i, h) = f(t_i, y_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, y_i) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{n!} f^{(n-1)}(t_i y_i) \tag{6.36}$$

وإذا اخترنا h صغيرة بما فيه الكفاية ووضعنا $w_{i+1} \approx y_{i+1}$ و $w_i \approx y_i$ فإننا نحصل على:

$$w_{i+1} = w_i + hT^{(n)}(t_i, w_i, h) \tag{6.37}$$

من أجل $i = 0,1,2,\dots,N-1$، حيث إن $T^{(n)}(t_i, w_i)$ كما هي معرفة في المعادلة (6.36) مع الأخذ بالاعتبار استبدال y_i بـ w_i. إذن، إذا كان لدينا $w_0 = \alpha$ فإننا نستطيع حساب w_i، من أجل $i = 1,2,\dots,N$.

تسمى المعادلة (6.35) صيغة تايلور ذات الرتبة n لحل مسألة القيمة الابتدائية (6.7).

لاحظ أن الخطأ المحلي المقطوع للصيغة (6.37) هو:

(6.38)
$$L_T = y_{i+1} - y_i - hT^{(n)}(t_i, y_i, h) = \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n)}(\varsigma_i, y(\varsigma_i)) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\varsigma_i)$$

من أجل $i = 0,1,2,\ldots, N-1$، والذي يعني أن معدل التقارب للصيغة (6.37) هو n، أي أن $O(h^n)$. نشير هنا أنه إذا كانت $n=1$ فإن صيغة تايلور (6.37) تصبح صيغة أويلر (6.12) والتي هي ذات رتبة تقاربية واحدة.

ملاحظة:

نذكر هنا أن خوارزمية تايلور ذات الرتبة n مشابه لخوارزمية أويلر باستثناء أن الخطوة الرابعة تصبح بالشكل:

الخطوة ٤: ضع $w = w + hT(t, w, h)$

حيث يتم كتابة $T(t, w, h)$ باستخدام العلاقة (6.36) وذلك حسب رتبة الطريقة المراد استخدامها.

مثال (٦,٣)

هنا نستعرض استخدام طريقة تايلور ذات الرتبة الثانية، أي الصيغة (6.37) عندما $n=2$، لحل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = y + e^t$$
$$y(0) = 1$$

في الفترة $0 \le t \le 1$ وذلك بوضع $h = 0.1$. كما في المثال السابق يكون لدينا $N = 10$ و $t_i = 0.1i$ من أجل $i = 0,1,2,\ldots, N$. الآن عندما $n = 2$ تصبح المعادلة (6.35) بالشكل:

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) + \frac{h^2}{2} f'(t_i, w_i) \qquad (6.39)$$

و بما أن $f(t,y) = y + e^t$ فإنه يكون لدينا $f'(t,y) = y' + e^t = y + 2e^t$، ويمكن

كتابة صيغة تايلور ذات الرتبة الثانية لهذه المسالة بالشكل:

$$\begin{aligned} w_{i+1} &= w_i + h(w_i + e^{t_i}) + \frac{h^2}{2}(w_i + 2e^{t_i}) \\ &= (1 + h + \frac{h^2}{2})w_i + h(1+h)e^{t_i} \qquad (6.40) \\ &= 1.105w_i + 0.11e^{t_i} \end{aligned}$$

من أجل $i = 1,2,\dots,9$. ابتداء من $w_0 = y(0) = 1$ تم استخدام الصيغة (6.40) لحساب الحلول التقريبية w_i من أجل $i = 1,2,\dots,10$ والنتائج العددية موجودة في الجدول رقم (٦,٣).

الجدول رقم (٦,٣). النتائج العددية للمثال (٦,٣).

i	t_i	w_i	y_i	$\lvert w_i - y_i \rvert$
0	0.0	1.00000	1.00000	0.00000
1	0.1	1.21500	1.21569	0.00069
2	0.2	1.46414	1.46568	0.00154
3	0.3	1.75223	1.75482	0.00258
4	0.4	2.08470	2.08855	0.00385
5	0.5	2.46770	2.47308	0.00539
6	0.6	2.90816	2.91539	0.00723
7	0.7	3.41395	3.42338	0.00943
8	0.8	3.99393	4.00597	0.01204
9	0.9	4.65810	4.67325	0.01514
10	1.0	5.41776	5.43656	0.01880

بمقارنة النتائج الموجودة في الجدول رقم (٦,٣) مع تلك الموجودة في الجدول رقم (٦,٢) حيث تم استخدام صيغة نقطة- الوسط ذات الرتبة التقاربية الثانية نلاحظ أن الأخطاء $|w_i - y_i|$ من أجل $i = 2,...,10$ متقاربة (جداً) للطريقتين وذلك عندما نكون قد استخدمنا $w_1 = y(t_1)$ في حساباتنا أثناء استخدام طريقة نقطة- الوسط. لاحظ أن الخطأ المحلي المقطوع للطريقتين يحتوي على المعامل الثابت $\frac{h^3}{6}$. أما إذا تم استخدام طريقة أويلر لحساب w_1 فإن النتائج العددية لطريقة نقطة الوسط تكون أسوأ من تلك التي حصلنا عليها باستخدام طريقة تايلور ذات الرتبة التقاربية الثانية وذلك لأن طريقة أويلر هي ذات رتبة تقاربية أولى. نشير هنا أنه أثناء حساباتنا باستخدام طريقة نقطة- الوسط إذا تم استخدام طريقة تايلور لحساب w_1 فإن النتائج العددية ستكون أفضل، لماذا ؟ راجع التمارين. المثال التالي يستعرض استخدام طرائق ذات رتب تقاربية أعلى من تربيعية لحل المسألة التي تم حلها في الأمثلة السابقة.

مثال (٦,٤)

هنا نستخدم طريقتي تايلور التكعيبية والرباعية التقارب لحل المسألة الموجودة في المثال السابق. أولاً، بالنسبة لطريقة تايلور ذات الرتبة الثالثة يكون لدينا الصيغة العددية التالية:

$$\begin{aligned} w_{i+1} &= w_i + h(w_i + e^{t_i}) + \frac{h^2}{2}(w_i + 2e^{t_i}) + \frac{h^3}{6}(w_i + 3e^{t_i}) \\ &= (1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6})w_i + h(1 + h + \frac{h^2}{2})e^{t_i} \end{aligned} \tag{6.41}$$

أما بالنسبة لطريقة تايلور ذات الرتبة الرابعة فإننا نحصل على الصيغة:

(6.42)

$$w_{i+1} = w_i + h(w_i + e^{t_i}) + \frac{h^2}{2}(w_i + 2e^{t_i}) + \frac{h^3}{6}(w_i + 3e^{t_i}) + \frac{h^4}{24}(w_i + 4e^{t_i})$$
$$= (1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24})w_i + h(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6})e^{t_i}$$

حيـــــــث إن $i = 1,2,\dots,9$ و $h = 0.1$. وذلـــــــك لأن $f''(t,y) = y + 3e^t$ و $f'''(t,y) = y + 4e^t$ تم إدراج النتائج العددية لهذا المثال في الجدول رقم (٦,٤).

الجدول رقم (٦,٤). النتائج العددية للمثال (٦,٤).

		تايلور ذات الرتبة الثالثة		تايلور ذات الرتبة الرابعة	
i	t_i	w_i	$\lvert w_i - y_i \rvert$	w_i	$\lvert w_i - y_i \rvert$
0	0.0	1.000000	0.000000	1.000000	0.000000
1	0.1	1.215667	0.000021	1.215688	0.000001
2	0.2	1.465636	0.000048	1.465682	0.000001
3	0.3	1.754737	0.000080	1.754815	0.000002
4	0.4	2.088436	0.000119	2.088552	0.000003
5	0.5	2.472916	0.000166	2.473078	0.000004
6	0.6	2.915168	0.000222	2.915385	0.000005
7	0.7	3.423091	0.000289	3.423373	0.000007
8	0.8	4.005606	0000368	4.005965	0.000009
9	0.9	4.672784	0.000462	4.673235	0.000011
10	1.0	5.435499	0.000572	5.436550	0.000014

بمقارنة القيم المطلقة للخطأ المتعلق بالحل التقريبي w_i، من أجل $i=1,2,\ldots,10$ لهاتين الطريقتين والطرائق الثلاث التي تم استخدامها في الأمثلة (٦,١ – ٦,٣) نلاحظ أنها أقل وأن تلك المحسوبة باستخدام طريقة تايلور ذات الرتبة الرابعة هي الأصغر مما يعني أن الحلول العددية المحسوبة باستخدام هذه الطريقة هي الأفضل. وهذا طبيعي لأن الخطأ المحلي المقطوع لهذه الطريقة والمعرّف في المعادلة (6.26) هو الأفضل. تجدر الإشارة هنا إلى أن $|w_1-y_1|=5\times10^{-7}$ وحيث إن الأخطاء الموجودة في الجدول رقم (٦,٥) مسجلة حتى ستة أرقام عشرية معنوية فإننا نرى أن الخطأ $|w_1-y_1|$ مسجل بالشكل 0.000001، كذلك الحال بالنسبة لبعض النتائج الموجودة في الجدول.

(٦,٤) طرائق رنج- كوتا
Runge-Kutta Methods

نعلم أن أسهل طريقة مستخدمة لحل مسألة القيمة الابتدائية (6.7) هي طريقة أويلر المعرّفة في المعادلة (6.12)؛ فهي طريقة مباشرة وذات خطوة واحدة، وبالتالي لا تتطلب قيمة ابتدائية إضافية. ولكن معدلها التقاربي الخطي سبباً يجعل استخدامها من الناحية التطبيقية محدود. من ناحية أخرى، يمكن استخدام طريقة تايلور للحصول على نتائج عددية أفضل. ولكن للحصول على نتائج أفضل لابد من حساب تفاضلات أعلى للدالة $f(t,y)$ وهذا قد يكون مستعصياً في بعض الأحيان. هناك طرائق عددية نستطيع استخدامها لحساب قيم تقريبية أفضل بدون الحاجة لحساب تفاضلات عليا للدالة $f(t,y)$ بالرغم من أنها ذات رتب تقاربية عليا. يطلق على هذه الطرائق اسم " طرائق رنج- كوتا" حيث يعود الفضل في ابتكارها إلى الباحثين

رنج و كوتا في العام ١٨٩٩م. سوف نستنتج بعض هذه الطرائق ذات رتب تقاربية مختلفة ونناقش الأخطاء المتعلقة بها.

يمكن كتابة طريقة رنج- كوتا ذات المرحلة M بالشكل التالي:

$$w_{i+1} = w_i + \psi(t_i, w_i, h) \qquad (6.43)$$

حيث إن:

$$\psi(t_i, w_i, h) = \sum_{m=1}^{M} \sigma_m k_m$$

$$k_1 = hf(t_i, w_i)$$

$$k_m = hf(t_i + \alpha_m h, w_i + \sum_{l=1}^{m-1} \beta_{ml} k_l)$$

$$\alpha_m = \sum_{l=1}^{m-1} \beta_{ml}$$

من أجل $m = 2,3,\ldots,M$.

قبل البدء بدراسة طرائق رنج- كوتا بالشكل العام، لنبدأ بمتسلسلة تايلور ذات الدرجة الثانية وذلك باعتبار مفكوك تايلور:

$$y_{i+1} = y_i + hy_i' + \frac{h^2}{2!} y_i'' + \frac{h^{(n+1)}}{3!} y'''(\varsigma_i) \qquad (6.44)$$

حيث إن ς_i تقع بين t_i و t_{i+1}. الآن بما أن $y' = f(t_i, y_i)$ فإنه يمكن كتابة المعادلة (6.44) بالشكل:

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2!} f'(t_i, y_i) + \frac{h^3}{3!} f''(\varsigma_i, y(\varsigma_i)) \qquad (6.45)$$

الفكرة هنا هي التخلص من $f'(t_i, y_i)$ والتي تساوي:

$$f_t(t_i, y(t_i)) + f(t_i, y(t_i)) f_y(t_i, y(t_i))$$

لاحظ أننا استخدمنا الرمزين $f_t = \frac{\partial f}{\partial t}$ و $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$. سيتم التخلص من وجود $f'(t_i, y_i)$ بتقريبها بواسطة الفرق الأمامي:

$$f'(t_i, y(t_i)) \approx \frac{1}{h}[f(t_i + h, y(t_i + h)) - f(t_i, y(t_i))] \qquad (6.46)$$

وبالتالي فإن المعادلة (6.45) تصبح بالشكل:

$$y_{i+1} \approx y_i + hf(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2!}[\frac{f(t_i + h, y_{i+1}) - f(t_i, y_i)}{h} - \frac{h}{2} f''(\eta_i, y(\eta_i))] + \frac{h^3}{3!} f''(\varsigma_i, y(\varsigma_i)) \qquad (6.47)$$

وبما أن f'' دالة متصلة فإنه يمكن كتابة المعادلة (6.47) بالشكل:

$$y_{i+1} \approx y_i + \frac{h}{2}[f(t_i, y_i) + f(t_i + h, y_{i+1})] - \frac{h^3}{12} f''(\xi_i, y(\xi_i)) \qquad (6.48)$$

حيث إن ξ_i تقع بين t_i و $t_i + h$. بوضع $w_i \approx y(t_i)$ و $w_{i+1} \approx y(t_i + h)$، وإهمال الخطأ المحلي المقطوع نحصل على معادلة الفروق:

$$w_{i+1} \approx w_i + \frac{h}{2}[f(t_i, w_i) + f(t_i + h, w_{i+1})] \qquad (6.49)$$

من أجل $i = 0,1,2,\dots, N-1$. وباستبدال المجهول w_{i+1} في الطرف الأيمن من المعادلة الأخيرة بتقريب أويلر (الصيغة (6.12)) نحصل على:

$$w_{i+1} \approx w_i + \frac{h}{2}[f(t_i, w_i) + f(t_i + h, w_i + hf(t_i, w_i))] \qquad (6.50)$$

من أجل $i = 0,1,2,\dots, N-1$. المعادلة (6.50) تسمى صيغة رنج-كوتا ذات الرتبة الثانية. وبمقارنتها مع طريقة تايلور ذات نفس الرتبة الثانية:

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) + \frac{h^2}{2} f'(t_i, w_i) \qquad (6.51)$$

فإنه من الواضح أننا لا نحتاج إلى تفاضل الدالة f من أجل تنفيذها ومع ذلك فإننا نحصل على نفس الرتبة التقاربية.

لنطوّر الآن أسلوب عام لاستنتاج طريقة رنج- كوتا (6.50) وذلك باستخدام نظرية تايلور. نحن نبحث عن صيغة عددية من الشكل:

$$w_{i+1} = w_i + \sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2 \tag{6.52}$$

حيث إن:

$$k_1 = hf(t_i, w_i)$$

$$k_2 = hf(t_i + \alpha_2 h, w_i + \beta_{21} k_1)$$

حيث إن σ_1، σ_2، α_2 و β_{21} ثوابت حقيقية نريد إيجادها بحيث تكون المعادلتين (6.51) و (6.52) متساويتان. يسمى هذا الأسلوب طريقة رنج- كوتا ذات المرحلتين. هدفنا هو أن نجعل معاملات h و h^2 نفس تلك الموجودة في مفكوك متسلسلة تايلور لطرفي المعادلة (6.52) حول (t_i, w_i). بداية مفكوك الطرف الأيسر للمعادلة (6.52) يمكن كتابته بالشكل:

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) + \frac{h^2}{2!} f'(t_i, w_i) + \frac{h^3}{3!} f''(t_i, w_i) + O(h^4) \tag{6.53}$$

وبالتعويض عن قيم $f'(t_i, w_i)$ و $f''(t_i, w_i)$ في (6.53) حيث إن:

$$f'(t, y) = \frac{d}{dt}[f(t, y)] = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = f_t(t, y) + f_y(t, y) f(t, y)$$

و

$$f''(t, y) = f_{tt}(t, y) + 2f(t, y) f_{ty}(t, y) + f^2(t, y) f_{yy}(t, y) + f_t(t, y) f_y(t, y) + f(t, y) f_y^2(t, y)$$

واستخدام الرموز:

$$\begin{aligned} &f = f(t_i, w_i), \quad f_t = f_t(t_i, w_i), \quad f_y = f_y(t_i, w_i) \\ &f_{tt} = f_{tt}(t_i, w_i), \quad f_{ty} = f_{ty}(t_i, w_i), \text{ and } \quad f_{yy} = f_{yy}(t_i, w_i) \end{aligned} \tag{6.54}$$

نحصل على:

$$w_{i+1} = w_i + hf + \frac{h^2}{2!}[f_t + ff_y] + \frac{h^3}{3!}[f_{tt} + 2ff_{ty} + f^2 f_{yy} + f_y(f_t + ff_y)] + O(h^4) \tag{6.55}$$

من أجل $i = 0,1,2,\ldots,N-1$. من ناحية أخرى، فإن مفكوك تايلور لـ k_2 والموجودة في الطرف الأيمن للمعادلة (6.52) يمكن كتابته بالشكل:

$$\begin{aligned} k_2 &= hf(t_i + \alpha_2 h, w_i + \beta_{21} k_1) \\ &= h[f(t_i, w_i) + (\alpha_2 h \frac{\partial}{\partial t} + \beta_{21} k_1 \frac{\partial}{\partial y}) f(t_i, w_i) \\ &\quad + \frac{1}{2!}(\alpha_2 h \frac{\partial}{\partial t} + \beta_{21} k_1 \frac{\partial}{\partial y})^2 f(t_i, w_i) + \text{حدود ذات رتب أعلى} \end{aligned} \tag{6.56}$$

وذلك باستخدام نظرية (١,٩).

الآن باستخدام الرموز الموجودة في (6.54) يمكن كتابة المعادلة الأخيرة بالشكل:

$$\begin{aligned} k_2 &= h[f + \alpha_2 hf_t + \beta_{21} hff_y + \frac{h^2}{2}(\alpha_2^2 f_{tt} + 2\alpha_2\beta_{21} ff_{ty} \\ &\quad + \beta_{21}^2 f^2 f_{yy}) + \text{حدود ذات رتب أعلى}] \end{aligned} \tag{6.57}$$

وبالتعويض عن k_1 و k_2 في المعادلة (6.52) يكون لدينا:

$$\begin{aligned} w_{i+1} &= w_i + h(\sigma_1 + \sigma_2) f + \sigma_2 h^2 [\alpha_2 f_t + \beta_{21} ff_y] \\ &\quad + \frac{\sigma_2 h^3}{2}[\alpha_2^2 f_{tt} + 2\alpha_2\beta_{21} ff_{ty} + \beta_{21} f^2 f_{yy}] \\ &\quad + \text{حدود ذات رتب أعلى} \end{aligned} \tag{6.58}$$

وبمقارنة معاملات h و h^2 في الطرف الأيمن للمعادلتين (6.52) و (6.58) نحصل على:

$$\begin{aligned} \sigma_1 + \sigma_2 &= 1 \\ \alpha_2 \sigma_2 &= \frac{1}{2} \\ \beta_{21} \sigma_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{6.59}$$

إذن يكون لدينا أربع مجاهيل و ثلاثة معادلات، وبناء على ذلك فإنه يكون لدينا متغير حر في حل المعادلات (6.59). وبحل هذه المعادلات بدلالة المتغير α_2 يكون لدينا:

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \frac{1}{2\alpha_2} \\ \sigma_1 &= 1-\sigma_2 = 1-\frac{1}{2\alpha_2} = \frac{2\alpha_2-1}{2\alpha_2} \\ \beta_{21} &= \frac{1}{2\sigma_2} = \alpha_2 \end{aligned} \tag{6.60}$$

يمكننا الآن اختيار قيمة α_2 التي تجعل الخطأ المحلي المقطوع أصغر ما يمكن والذي ينتج حدود تتضمن على h^3 في المعادلتين (6.55) و (6.58).

يمكن الحصول على حد الخطأ بأخذ الفرق بين الحدود التي تتضمن h^3 في المعادلتين (6.55) و (6.58) وهي:

$$\frac{h^3}{6}[f_{tt}+2ff_{ty}+f^2f_{yy}+f_y(f_t+ff_y)]-\frac{\sigma_2 h^3}{2}[\alpha_2^2 f_{tt}+2\alpha_2\beta_{21}ff_{ty}+\beta_{21}^2f^2f_{yy}]$$

$$=\frac{h^3}{6}[(\frac{1}{6}-\frac{\alpha_2}{4})\{f_{tt}+2ff_{ty}+f^2f_{yy}\}+\frac{1}{6}f_y\{f_t+ff_y\}] \tag{6.61}$$

إذا اخترنا قيمة α_2 بحيث تكون المعادلة (6.61) مساوية للصفر، فإننا نكون قد حصلنا على طريقة ذات رتبة تقاربية ثالثة. ولكنه لا يوجد قيمة لـ α_2 تجعل المعادلة (6.61) تختفي لجميع قيم t و y. بناء على ذلك، فإنه يكمن اختيار قيمة α_2 التي تجعل المعادلة صغيرة بقدر المستطاع. فيما يلي ندرج بعض طرائق رنج- كوتا المعروفة ذات الرتبة التقاربية الثانية والتي يمكن استنتاجها بوضع قيم مختلفة لـ α_2 في المعادلة (6.60):

١- عندما $\alpha_2 = 1$ فإن $\beta_{21} = 1$ و $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{2}$ وتأخذ صيغة رنج-كوتا ذات الرتبة التقاربية الثانية (6.52) الشكل:

$$\begin{aligned} w_{i+1} &= w_i + \frac{1}{2}[k_1 + k_2] \\ k_1 &= hf(t_i, w_i) \\ k_2 &= hf(t_i + h, w_i + k_1) \end{aligned} \tag{6.62}$$

والتي يمكن كتابتها أيضاً بالشكل:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[f(t_i, w_i) + f(t_i + h, w_i + hf(t_i, w_i))] \tag{6.63}$$

المعادلة (6.63) معروفة أيضاً باسم طريقة أويلر المطوّرة أو طريقة هن، انظر الخوارزمية (٦,٣).

٢- عندما $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ فإن $\beta_{21} = \frac{1}{2}$، $\sigma_1 = 0$ و $\sigma_2 = 1$ وتكون الصيغة (6.52) بالشكل:

$$\begin{aligned} w_{i+1} &= w_i + k_2 \\ k_1 &= hf(t_i, w_i) \\ k_2 &= hf(t_i + \frac{1}{2}h, w_i + \frac{1}{2}k_1) \end{aligned} \tag{6.64}$$

والتي عادة تكتب بالشكل التالي:

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}f(t_i, w_i)) \tag{6.65}$$

والتي تـعرف باسم طريقة أويلر المعدّلة.

٣- عندما $\alpha_2 = \frac{2}{3}$ فإن $\beta_{21} = \frac{2}{3}$، $\sigma_1 = \frac{1}{4}$ و $\sigma_2 = \frac{3}{4}$ وتصبح طريقة رنج- كوتا (6.52) بالشكل:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{4}[k_1 + 3k_2]$$
$$k_1 = hf(t_i, w_i) \qquad (6.66)$$
$$k_2 = hf(t_i + \frac{2}{3}h, w_i + \frac{2}{3}k_1)$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{4}[f(t_i, w_i) + 3f(t_i + \frac{2}{3}h, w_i + \frac{2}{3}hf(t_i, w_i))] \qquad (6.67)$$

نشير هنا إلى أن الخطأ المحلي المقطوع (6.61) يكون أصغر ما يمكن في هذه الحالة. تأكد من ذلك ؟.

لنوجد الآن حداً أعلى للخطأ المحلي المقطوع (6.61). لعمل ذلك نعرّف ما يلي:

$$|f(t,y)| < M$$

و

$$\left|\frac{\partial^{i+j} f}{\partial t^i \partial y^j}\right| \le \frac{L^{i+j}}{M^{j-1}}$$

من أجل $i + j \le n$. بالتالي نحصل على $|f(t,y)| < M$، $|f_y| \le L$، $|f_t| < LM$، $|f_{ty}| < L^2$، $|f_{tt}| < L^2 M$ و $|f_{yy}| < \frac{L^2}{M}$. وبالتالي فإن الخطأ المحلي المقطوع (L.T.E.) محدود من الأعلى بـ:

(6.68)

$$|\text{L.T.E.}| = h^3 \left|\{(\frac{1}{6} - \frac{\alpha^2}{4})[f_{tt} + 2ff_{ty} + f^2 f_{yy}] + \frac{1}{6} f_y [f_t + ff_y]\}\right|$$
$$\le h^3 ML^2 (4\left|\frac{1}{6} - \frac{\alpha^2}{4}\right| + \frac{1}{3})$$

يكون هذا الحد أصغر ما يمكن عندما نضع $\alpha_2 = \frac{2}{3}$، وفي هذه الحالة يكون لدينا:

$$|\,\text{L.T.E.}\,| \le \frac{h^3}{3} M L^2 \qquad (6.69)$$

لاحظ أن هذه الطريقة ذات رتبة تقاربية ثانية. لماذا ؟.

مثال (٦,٥)

نستعرض في هذا المثال استخدام طريقة رنج- كوتا ذات الرتبة الثانية والمعرّفة في المعادلة (6.62) لحل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = y + e^t$$
$$y(0) = 1$$

في الفترة $0 \le t \le 1$ وذلك بوضع $N = 10$ و نترك مناقشة استخدام الصيغتين الأخريين في التمارين.

هنا يكون لدينا $h = 0.1$ و $t_i = 0.1i$ من أجل $i = 0,1,2,\ldots,N$. يمكن كتابة الصيغة (6.62) لهذه المسألة بالشكل:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{2}[k_1 + k_2]$$
$$k_1 = h[w_i + e^{t_i}]$$
$$k_2 = h[w_i + k_1 + e^{t_i + h}]$$

وبالتعويض عن قيم h و t_i نحصل على:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{2}[k_1 + k_2]$$
$$k_1 = 0.1[w_i + e^{0.1i}]$$
$$k_2 = 0.1[w_i + k_1 + e^{0.1(i+1)}]$$

من أجل $i = 0,1,2,\ldots,N-1$.

الآن عندما $i = 0$ يكون لدينا:

$$k_1 = 0.1[w_0 + 1] = 0.1[1+1] = 0.2$$
$$k_2 = 0.1[w_0 + k_1 + e^{0.1}] = 0.1[1+0.2+1.105171] = 0.2305171$$
$$w_1 = w_0 + \frac{1}{2}[k_1 + k_2] = 1 + 0.5[0.2 + 0.2305171] = 1.215259$$

النتائج العددية لهذا المثال موجودة في الجدول رقم (٦,٥) حيث نلاحظ أنه، كما في الطرائق السابقة، الخطأ يكبر مع ازدياد قيمة i أي مع ابتعادنا عن القيمة الابتدائية المعطاة. قارن النتائج التي تحصل عليها في التمارين مع تلك الموجودة في هذا الجدول. ماذا تلاحظ ؟.

الجدول رقم (٦,٥). النتائج العددية للمثال (٦,٥).

i	t_i	w_i	y_i	$\lvert w_i - y_i \rvert$
0	0.0	1.000000	1.000000	0.000000
1	0.1	1.215259	1.215688	0.000430
2	0.2	1.464715	1.465683	0.000968
3	0.3	1.753180	1.754816	0.001636
4	0.4	2.086098	2.088555	0.002457
5	0.5	2.469625	2.473082	0.003457
6	0.6	2.910721	2.915390	0.004669
7	0.7	3.417251	3.423380	0.006129
8	0.8	3.998095	4.005974	0.007878
9	0.9	4.663280	4.673259	0.009966
10	1.0	5.424117	5.436564	0.012447

خوارزمية (٦،٣): رنج- كوتا ذات المرحلتين

تستخدم هذه الخوارزمية طريقة رنج- كوتا ذات الرتبة الثانية (6.62) لحل مسألة القيمة الابتدائية (6.7) في الفترة $[a,b]$. بوضع $w0 = w_0 = y(a)$ فإن الخوارزمية تحسب $w = w_i$ من أجل $i = 2,\ldots,N$.

الخطوة ١: أدخل قيم a، b، N و $w0$

الخطوة ٢: ضع $h = \frac{b-a}{N}$

$$t = a$$

$$w = w0$$

الخطوة ٣: من أجل $i = 1,2,\ldots,N$ كرر الخطوات ٤ - ٧

الخطوة ٤: ضع

$$k1 = hf(t,w)$$
$$k2 = hf(t+h, w+k1)$$

الخطوة ٥: ضع $w = w + \frac{1}{2}[k1 + k2]$

الخطوة ٦: ضع $t = t + h$

الخطوة ٧: اطبع $i,\ t,\ w$

(٦،٤،١) طرائق رنج- كوتا ذات رتب أعلى

يمكن استنتاج صيغ رنج- كوتا ذات الرتب الأعلى بنفس الأسلوب الذي استخدمناه لاستنتاج الصيغ ذات الرتبة الثانية ولكن كلما زادت رتب الطريقة تعقدت العمليات الجبرية بشكل مطرد وسريع. هنا سوف نستعرض كيفية استنتاج صيغ رنج- كوتا ذات المراحل الثلاث وللمهتم باستنتاج الطريقة ذات الأربع مراحل

يمكن أن يجدها في بعض الكتب المتخصصة في مجال الحلول العددية لمسألة القيم الابتدائية وكذلك يمكن للقارئ الإطلاع على ذلك في كتاب Rlaston.

(٦,٤,٢) طرائق رنج-كوتا ذات الثلاث مراحل

لاستنتاج طرائق رنج- كوتا ذات الرتبة الثالثة نضيف أولاً الحد (المرحلة) $\sigma_3 k_3$ إلى الطرف الأيمن من المعادلة (6.52) لنحصل على طريقة رنج- كوتا ذات الثلاث مراحل:

$$w_{i+1} = w_i + \sigma_1 k_1 + \sigma_2 + k_2 + \sigma_3 k_3 \tag{6.70}$$

حيث إن:

$$k_1 = hf(t_i, w_i)$$
$$k_2 = hf(t_i + \alpha_2 h, w_i + \beta_{21} k_1)$$
$$k_3 = hf(t_i + \alpha_3 h, w_i + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2)$$

حيث إن σ_1، σ_2، σ_3، α_2، α_3، β_{21}، β_{31} و β_{32} ثوابت حقيقية سيتم إيجادها بنشر متسلسلة تايلور حول النقطة (t_i, w_i) ومن ثم مقارنتها بحدود متسلسلة تايلور ذات الدرجة الثالثة والمعرفة في المعادلة (6.55).

بداية، بنشر الدالتين k_2 و k_3 باستخدام متسلسلة تايلور حول (t_i, w_i) وإبقاء الحدود حتى تلك التي تحتوي على h^3 :

(6.71)

$$k_2 = hf + h^2[\alpha_2 f_t + \beta_{21} ff_y] + \frac{h^3}{2}[\alpha_2^2 f_{tt} + 2\alpha_2 \beta_{21} ff_{ty} + \beta_{21}^2 f^2 f_{yy}] + O(h^4)$$

و

(6.72)

$$k_3 = hf + h^2[\alpha_3 f_t + (\beta_{31} + \beta_{32}) ff_y] + \frac{h^3}{2}[2\beta_{32}(\alpha_2 f_t + \beta_{21} ff_y) f_y$$
$$+ \alpha_3^2 f_{tt} + 2\alpha_3(\beta_{31} + \beta_{32}) ff_{ty} + (\beta_{31} + \beta_{32})^2 f^2 f_{yy}] + O(h^4)$$

وبالتعويض عن قيم k_1، k_2 و k_3 في المعادلة (6.70) يكون لدينا:

(6.73)

$$w_{i+1} = w_i + h(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)f + h^2\{(\sigma_2\alpha_2 + \sigma_3\alpha_3)f_t + [\sigma_2\beta_{21} + \sigma_3(\beta_{31} + \beta_{32})]ff_y\} + h^3\{\frac{1}{2}(\sigma_2\alpha_2^2 + \sigma_3\alpha_3^2)f_{tt} + [\sigma_2\alpha_2\beta_{21} + \sigma_3\alpha_3(\beta_{31} + \beta_{32})]ff_{ty} + \frac{1}{2}[\sigma_2\beta_{21}^2 + \sigma_3(\beta_{31} + \beta_{32})^2]f^2 f_{yy} + \sigma_3\alpha_2\beta_{32}f_t f_y + \sigma_3\beta_{21}\beta_{32}ff_y^2\}$$

وبمقارنة معاملات h، h^2 و h^3 في المعادلتين (6.55) و (6.73) نحصل على:

(6.74)

$$\begin{aligned}
\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 &= 1 \\
\sigma_2\alpha_2 + \sigma_3\alpha_3 &= \frac{1}{2} \\
\sigma_2\beta_{21} + \sigma_3(\beta_{31} + \beta_{32}) &= \frac{1}{2} \\
\sigma_2\alpha_2^2 + \sigma_3\alpha_3^2 &= \frac{1}{3} \\
\sigma_2\alpha_2\beta_{21} + \sigma_3\alpha_3(\beta_{31} + \beta_{32}) &= \frac{1}{3} \\
\sigma_2\beta_{21}^2 + \sigma_3(\beta_{31} + \beta_{32})^2 &= \frac{1}{3} \\
\sigma_3\alpha_2\beta_{32} &= \frac{1}{6} \\
\sigma_3\beta_{21}\beta_{32} &= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

وبما أن $\sigma_3\beta_{21}\beta_{32} = \frac{1}{6} = \sigma_3\alpha_2\beta_{32}$ فإنه يكون لدينا $\alpha_2 = \beta_{21}$. إضافة إلى ذلك، بما أن $\sigma_2\alpha_2\beta_{21} + \sigma_3\alpha_3(\beta_{31} + \beta_{32}) = \frac{1}{3} = \sigma_2\alpha_2^2 + \sigma_3\alpha_3^2$ و $\alpha_2 = \beta_{21}$ فإننا نحصل على $\alpha_3 = \beta_{31} + \beta_{32}$. بناء على ذلك فإنه يمكن كتابة المعادلات (6.74) بالشكل المختصر:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 &= 1 \\
\sigma_2\alpha_2 + \sigma_3\alpha_3 &= \frac{1}{2} \\
\sigma_2\alpha_2^2 + \sigma_3\alpha_3^2 &= \frac{1}{3} \\
\sigma_3\alpha_2\beta_{32} &= \frac{1}{6}
\end{aligned} \tag{6.75}$$

وهو نظام خطي يتكون من أربع معادلات وستة مجاهيل. بناء عليه فإنه يكون لدينا متغيرين حرين. وبالتالي يكون لدينا عائلتين من طرائق رنج- كوتا ذات الثلاث مراحل. فيما يلي نذكر المشهور من هذه الطرائق:

١- عندما $\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{1}{6}$، $\sigma_2 = \frac{2}{3}$، $\alpha_2 = \beta_{21} = \frac{1}{2}$، $\alpha_3 = -\beta_{31} = 1$ و $\beta_{32} = 2$ تصبح الصيغة (6.70) بالشكل:

$$\begin{aligned}
w_{i+1} &= w_i + \frac{1}{6}[k_1 + 4k_2 + k_3] \\
k_1 &= hf(t_i, w_i) \\
k_2 &= hf(t_i + \frac{1}{2}h, w_i + \frac{1}{2}k_1) \\
k_3 &= hf(t_i + h, w_i - k_1 + 2k_2)
\end{aligned} \tag{6.76}$$

والتي يكون خطأها المحلي المقطوع يحتوي على h^4 و نترك استنتاجه للمناقشة في التمارين.

٢- عندما $\sigma_1 = \frac{1}{4}$، $\sigma_2 = 0$، $\sigma_3 = \frac{3}{4}$، $\alpha_2 = \beta_{21} = \frac{1}{3}$، $\alpha_3 = -\beta_{31} = \frac{2}{3}$ و $\beta_{32} = \frac{2}{3}$ تصبح الصيغة (6.70) بالشكل:

$$
\begin{aligned}
w_{i+1} &= w_i + \frac{1}{4}[k_1 + 3k_3] \\
k_1 &= hf(t_i, w_i) \\
k_2 &= hf(t_i + \frac{1}{3}h, w_i + \frac{1}{3}k_1) \\
k_3 &= hf(t_i + \frac{2}{3}h, w_i + \frac{2}{3}k_2)
\end{aligned}
\tag{6.77}
$$

والتي تُعرف أيضاً بطريقة هن ذات الرتبة الثالثة. نشير هنا إلى أن الحد k_2 غير موجود في المعادلة الأولى للصيغة (6.77) إلاّ أنه يتم حسابه عند كل خطوة. كما نذكر أن الخطأ المحلي المقطوع لهذه الصيغة يحتوي على h^4 ونترك أيضاً استنتاجه للمناقشة في التمارين.

(٦,٤,٣) طرائق رنج- كوتا ذات الأربع مراحل

كما أشرنا سابقاً يتطلب استنتاج صيغة رنج- كوتا ذات الأربع مراحل الكثير من العمليات الجبرية المعقدة وبالتالي لن نذكرها هنا. من ناحية أخرى، أشهر طرائق رنج- كوتا ذات الأربع مراحل يمكن كتابتها بالشكل:

$$
\begin{aligned}
w_{i+1} &= w_i + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \\
k_1 &= hf(t_i, w_i) \\
k_2 &= hf(t_i + \frac{1}{2}h, w_i + \frac{1}{2}k_1) \\
k_3 &= hf(t_i + \frac{1}{2}h, w_i + \frac{1}{2}k_2) \\
k_4 &= hf(t_i + h, w_i + k_3)
\end{aligned}
\tag{6.78}
$$

وحد الخطأ المحلي المقطوع المتعلق بهذه الصيغة يتضمن h^5، مما يعني أن رتبتها التقاربية تكون رابعة.

ملاحظة:

يمكن كتابة خوارزميات لتنفيذ طرائق رنج- كوتا ذات الرتب العليا كتلك التي كتبناها أعلاه لطريقة رنج- كوتا ذات الرتبة الثانية عدا أنه يتم تغيير الخطوتين الرابعة والخامسة حسب الطريقة المستخدمة.

مثال (٦,٦)

نستعرض هنا استخدام الصيغتين (6.76) و (6.78) لحل مسالة القيمة الابتدائية الموجودة في المثال (٦,٥). بداية يمكن كتابة طريقة رنج- كوتا ذات الرتبة الثالثة (6.76) لهذه المسالة بالشكل:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}[k_1 + 4k_2 + k_3]$$
$$k_1 = 0.1[w_i + e^{0.1i}]$$
$$k_2 = 0.1[w_i + \frac{1}{2}k_1 + e^{0.1(i+0.5)}]$$
$$k_3 = 0.1[w_i - k_1 + 2k_2 + e^{0.1(i+1)}]$$

من أجل $i = 0,1,2,\ldots,9$، وذلك لأن $h = 0.1$ و $t_i = 0.1i$. أما بالنسبة لطريقة رنج- كوتا ذات الرتبة الرابعة (6.78) فتصبح بالشكل:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$
$$k_1 = 0.1[w_i + e^{0.1i}]$$
$$k_2 = 0.1[w_i + \frac{1}{2}k_1 + e^{0.1(i+0.5)}]$$
$$k_3 = 0.1[w_i + \frac{1}{2}k_2 + e^{0.1(i+0.5)}]$$
$$k_4 = 0.1[w_i + k_3 + e^{0.1(i+1)}]$$

من أجل $i = 0,1,2,\ldots,9$. النتائج العددية لهذا المثال مدرجة في الجدول رقم (٦,٦) حيث يتضح أن قيم الأخطاء الناتجة من استخدام طريقة رنج- كوتا ذات الرتبة الرابعة أصغر من تلك التي حصلنا باستخدام طريقة رنج- كوتا ذات الرتبة الثالثة وهذا يتوافق مع الرتب التقاربية للطريقتين. أيضاً بمقارنة النتائج العددية الموجودة في الجدولين رقمي (٦,٥ و٦,٦) نلاحظ أن أسوأ النتائج هي تلك الموجودة في الجدول رقم (٦,٥) والتي حصلنا عليها باستخدام طريقة رنج-كوتا ذات الرتبة الثانية وهذا بديهي.

الجدول رقم (٦,٦). النتائج العددية للمثال (٦,٦).

		رنج- كوتا ذات الرتبة الثالثة		رنج- كوتا ذات الرتبة الرابعة	
i	t_i	w_i	$\lvert w_i - y_i \rvert$	w_i	$\lvert w_i - y_i \rvert$
0	0.0	1.000000	0.000000	1.000000	0.000000
1	0.1	1.215675	0.000013	1.215688	0.000000
2	0.2	1.465654	0.000029	1.465682	0.000001
3	0.3	1.754768	0.000049	1.754815	0.000001
4	0.4	2.088482	0.000073	2.088552	0.000001
5	0.5	2.472980	0.000102	2.473078	0.000002
6	0.6	2.915253	0.000138	2.915385	0.000003
7	0.7	3.423199	0.000180	3.423373	0.000003
8	0.8	4.005743	0.000231	4.005965	0.000004
9	0.9	4.672955	0.000291	4.673235	0.000005
10	1.0	5.436201	0.000363	5.436550	0.000007

(٦,٥) طرائق متعددة الخطوات

Multistep Methods

يمكن كتابة الطريقة متعددة الخطوات ذات الخطوات k لحل مسألة القيمة الابتدائية (6.7) بالشكل:

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j w_{i+j} = h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{i+j} \qquad (6.79)$$

حيث إن $f_i = f(t_i, w_i)$، α_j و β_j ثوابت حقيقية. سوف نفترض أن $\alpha_k \neq 0$ وأنه ليس كلا من α_0 و β_0 يكون صفراً. بما أنه لا يكون هناك أي تأثير ناتج من ضرب طرفي المعادلة (6.79) بثابت لا يساوي الصفر، فإنه يمكن وضع $\alpha_k = 1$.

ملاحظة:

نقول أن الصيغة (6.79) مباشرة إذا كان $\beta_k = 0$، أما إذا كان $\beta_k \neq 0$ فإنها تكون ضمنية.

نشير هنا إلى أنه إذا كانت الصيغة (6.79) مباشرة فإن ذلك يعني أنها تحسب قيمة w_{i+k} مباشرة من قيم w_{i+j} و f_{i+j}، من أجل $i = 1,2,\ldots,N$ و $j = 0,1,2,\ldots,k-1$. أما إذا كانت ضمنية فإنها تأخذ الشكل:

$$w_{i+k} = h\beta_k f(t_{i+k}, w_{i+k}) + g \qquad (6.80)$$

من أجل $i = 1,2,\ldots,N$، حيث إن g تعتبر دالة للقيم المحسوبة للمجاهيل w_{i+j} و f_{i+j}، من أجل $j = 0,1,2,\ldots,k-1$. كما سبق أن ذكرنا، عندما تكون المعادلة التفاضلية الموجودة في (6.7) خطية، فإن المعادلة (6.79) تكون خطية بالنسبة لـ w_{i+k}. وبالطبع تكون غير خطية إذا كانت المعادلة التفاضلية غير خطية.

يوجد عدة أساليب مختلفة لاستنتاج الطريقة متعددة الخطوات، أي إيجاد قيم الثوابت α_j و β_j الموجودة في المعادلة (6.79). نذكر أسلوبين من هذه الأساليب فيما يلي:

(٦,٥,١) الاستنتاج باستخدام التكامل العددي

هنا سوف نستخدم مبدأ التكامل العددي والذي تم دراسته في الفصل الخامس لاستنتاج طريقة متعددة الخطوات. سيتم في هذا الأسلوب تقريب الدالة بكثيرة حدود على فترة معينة، ولتكن مثلاً $[t_i, t_{i+1}]$، ثم نُكامل كثيرة الحدود على هذه الفترة للحصول على الطريقة المنشودة.

بداية لنعتبر المعادلة:

$$y(t_i+h)-y(t_i)=\int_{t_i}^{t_i+h} y'(t)dt \tag{6.81}$$

وباستخدام المعادلة التفاضلية في (6.7) يمكن كتابة المعادلة (6.81) بالشكل:

$$y(t_i+h)-y(t_i)=\int_{t_i}^{t_i+h} f(t,y)dt \tag{6.82}$$

هدفنا هو استنتاج طريقة عددية متعددة الخطوات ذات خطوة، وبالتالي فإن القيم المتوفرة لحساب التكامل تكون f_i و f_{i+1}. لتكن $p(t)$ كثيرة الحدود الوحيدة ذات الدرجة الأولى والتي تمر بالنقطتين (t_i, f_i) و (t_{i+1}, f_{i+1}). فإنه من صيغة نيوتن الاستكمالية الأمامية يكون لدينا:

$$p(t)=p(t+sh)=f_i+s\Delta f_i$$

وبالتالي نحصل على:

$$\int_{t_i}^{t_i+h} f(t,y)dt \approx \int_{t_i}^{t_i+h} p(t)dt=\int_0^1 [f_i+s\Delta f_i]hds$$

$$=h[f_i+\frac{1}{2}\Delta f_i]$$

وباستخدام الحقيقة أن $\Delta f_i = f_{i+1}-f_i$ نحصل على:

$$\int_{t_i}^{t_i+h} f(t,y)dt \approx \frac{h}{2}[f_i + f_{i+1}] \qquad (6.83)$$

من المعادلتين (6.82) و (6.83) و باستخدام الرموز $w_j \approx y(t_j)$ من أجل $j = i, i+1$ نحصل على الصيغة العددية:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[f_i + f_{i+1}] \qquad (6.84)$$

وهي صيغة شبه المنحرف لحل مسألة القيمة الحدية (6.7) والتي تعتبر أفضل (أدق) صيغة ضمنية متعددة الخطوات ذات خطوة واحدة، حيث إنه باستخدام متسلسلة تايلور يمكن إثبات أن الخطأ المحلي المقطوع لها هو

$$L_T = \pm \frac{1}{12} h^3 y^{(3)}(\xi_i) + O(h^4) \qquad (6.85)$$

حيث إن $t_i < \xi_i < t_{i+1}$، (انظر التمارين). وبما أن الخطأ المحلي المقطوع يحتوي على الحد h^3 فإن رتبة طريقة شبه المنحرف تكون تربيعية، انظر الخوارزمية (٦,٤).

خوارزمية (٦,٤): شبه المنحرف

تستخدم هذه الخوارزمية طريقة شبه المنحرف (6.46) لحل مسألة القيمة الابتدائية (6.7) في الفترة $[a,b]$. بوضع $w0 = w_0 = y(a)$ فإن الخوارزمية تحسب $w = w_i$ من أجل $i = 2, \ldots, N$.

الخطوة ١: أدخل قيم a، b، N و $w\ 0$

الخطوة ٢: ضع $h = \frac{b-a}{N}$

$t0 = a$

$t = a + h$

الخطوة ٣: من أجل $i = 1, 2, \ldots, N$ كرر الخطوات ٤ – ٧

الخطوة ٤: ضع $w = w0 + \frac{h}{2}[f(t,w) + f(t0,w0)]$
الخطوة ٥: ضع
$t0 = t$
$t = t + h$
الخطوة ٦: ضع $w0 = w$
الخطوة ٧: اطبع $i,\ t,\ w$

(٦,٥,٢) الاستنتاج باستخدام متسلسلة تايلور

هنا يتم استخدام كثيرة الحدود تايلور لاستنتاج طريقة متعددة الخطوات (6.79) وذلك بنشر كثيرة الحدود تايلور للدالة $y(t)$ (وتفاضلاتها) حول العدد t_i. انظر أيضاً البندين (٦,٢) و (٦,٣).

لنفترض أننا نريد إيجاد طريقة متعددة الخطوات ذات الخطوتين الضمنية والتي تكون ذات رتبة تقاربية أفضل ما يمكن. بداية نعلم أن هذه الطريقة لابد أن تأخذ الشكل التالي:

$$w_{i+2} + \alpha_1 w_{i+1} + \alpha_0 w_i = h[\beta_2 f_{i+2} + \beta_1 f_{i+1} + \beta_0 f_i]$$

العلاقة التقريبية لهذه المعادلة يمكن كتابتها بالشكل:

$$y(t_i + 2h) + \alpha_1 y(t_i + h) + \alpha_0 y(t_i) = h[\beta_2 y'(t_i + 2h) + \beta_1 y'(t_i + h) + \beta_0 y'(t_i)] \tag{6.86}$$

ونختار قيم الثوابت α_0، α_1، β_0، β_1 و β_2 بحيث يكون التقريب أفضل ما يمكن. باستخدام متسلسلة تايلور نحصل على:

$$y(t_i+h)=y(t_i)+hy'(t_i)+\frac{h^2}{2}y''(t_i)+\frac{h^3}{6}y'''(t_i)+\frac{h^4}{24}y^{(iv)}+\frac{h^5}{120}y^{(v)}+\cdots$$
$$y(t_i+2h)=y(t_i)+2hy'(t_i)+2h^2y''(t_i)+\frac{4h^3}{3}y'''(t_i)+\frac{2h^4}{3}y^{(iv)}(t_i)+\frac{4h^5}{15}y^{(v)}(t_i)+\cdots$$
$$y'(t_i+h)=y'(t_i)+hy''(t_i)+\frac{h^2}{2}y'''(t_i)+\frac{h^3}{6}y^{(iv)}(t_i)+\frac{h^4}{24}y^{(v)}(t_i)+\cdots$$
$$y'(t_i+2h)=y'(t_i)+2hy''(t_i)+2h^2y'''(t_i)+\frac{4h^3}{3}y^{(iv)}(t_i)+\frac{2h^4}{3}y^{(v)}(t_i)+\cdots \tag{8.87}$$

وبالتعويض عن ذلك في المعادلة (6.86) و من ثم تجميع و نقل الحدود في طرف واحد يكون لدينا:

$$c_0y(t_i)+c_1hy'(t_i)+c_2h^2y''(t_i)+c_3h^3y'''(t_i)+c_4h^4y^{(iv)}(t_i)+c_5h^5y(t_i)+\cdots=0 \tag{6.88}$$

حيث إن:

$$c_0=1+\alpha_0+\alpha_1\,,\qquad c_1=2+\alpha_1-\beta_0-\beta_1-\beta_2$$
$$c_2=2+\frac{1}{2}\alpha_1-\beta_1-2\beta_2\,,\qquad c_3=\frac{4}{3}+\frac{1}{6}\alpha_1-\frac{1}{2}\beta_1-2\beta_2$$
$$c_4=\frac{2}{3}+\frac{1}{24}\alpha_1-\frac{1}{6}\beta_1-\frac{4}{3}\beta_2,\quad c_5=\frac{4}{15}+\frac{1}{120}\alpha_1-\frac{1}{24}\beta_1-\frac{2}{3}\beta_2$$

بناء على ذلك فإنه لكي يكون التقريب (6.86) أفضل ما يمكن يجب أن نحل النظام الخطي:

$$\begin{aligned}
\alpha_0+\alpha_1 & & &=-1\\
\alpha_1-\beta_0-\beta_1-\beta_2 & & &=-2\\
\alpha_1\quad -2\beta_1-4\beta_2 & & &=-4\\
\alpha_1\quad -3\beta_1-12\beta_2 & & &=-8\\
\alpha_1\quad -4\beta_1-32\beta_2 & & &=-16
\end{aligned} \tag{6.89}$$

بحل هذا النظام حصلنا على $\alpha_0 = -1$، $\alpha_1 = 0$، $\beta_0 = \beta_2 = \frac{1}{3}$ و $\beta_1 = \frac{4}{3}$. عند هذه القيم يأخذ الثابت c_5 القيمة $-\frac{1}{90}$. وتصبح طريقة متعددة الخطوات عند هذه القيم بالشكل:

$$w_{i+2} = w_i + \frac{h}{3}[f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}] \tag{6.90}$$

من أجل $i = 0,1,2,\dots,N-1$. تسمى المعادلة (6.90) صيغة سمبسون لحل مسألة القيمة الابتدائية (6.7). الخطأ المحلي المقطوع لهذه الصيغة هو $L_T = \frac{1}{90}h^5 y^{(v)}(\varsigma_i)$، حيث إن $t_i < \varsigma_i < t_i + 2h$.

نشير هنا إلى أن طريقة سمبسون هي طريقة ذات رتبة تقاربية رابعة، $O(h^4)$، وذلك لأن:

$$\frac{y_{i+2} - y_i}{h} - \frac{1}{4}[f_{i+2} + 4f_{i+1} + f_i] = \frac{1}{90}h^4 y^{(v)}(\varsigma_i) \tag{6.91}$$

نترك للقارئ كتابة خوارزمية سمبسون للمناقشة في التمارين.

مثال (٦,٧)

هنا نستخدم طريقتي شبه المنحرف وسمبسون لحل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = y + e^t$$
$$y(0) = 1$$

في الفترة $0 \le t \le 1$ وذلك بوضع $h = 0.1$. كما في المثال السابق يكون لدينا $N = 10$ و $t_i = 0.1i$ من أجل $i = 0,1,2,\dots,N$. يمكن كتابة صيغة شبه المنحرف لهذه المسألة بالشكل:

$$\begin{aligned} w_{i+1} &= w_i + \frac{h}{2}[w_i + e^{t_i} + w_{i+1} + e^{t_{i+1}}] \\ &= 1.05w_i + 0.05w_{i+1} + 0.05[e^{0.1i} + e^{0.1(1+i)}] \end{aligned}$$

وبحل هذه المعادلة بالنسبة لـ w_{i+1} يكون لدينا:

$$w_{i+1} = \frac{1}{0.95}[1.05w_i + 0.05(e^{0.1i} + e^{0.1(1+i)})] \tag{6.92}$$

من أجل $i = 1,2,\ldots,9$. أما بالنسبة لصيغة سمبسون لحل هذه المسالة فإنه يمكن كتابتها بالشكل:

$$\begin{aligned} w_{i+2} &= w_i + \frac{h}{3}[w_i + e^{t_i} + 4(w_{i+1} + e^{t_{i+1}}) + w_{i+2} + e^{t_{i+2}}] \\ &= \frac{3.1}{3}w_i + \frac{0.4}{3}w_{i+1} + \frac{0.1}{3}w_{i+2} + \frac{0.1}{3}[e^{0.1i} + 4e^{0.1(i+1)} + e^{0.1(i+2)}] \end{aligned}$$

و منه نحصل على:

$$w_{i+2} = \frac{1}{2.9}[3.1w_i + 0.4w_{i+1} + 0.1(e^{0.1i} + 4e^{0.1(i+1)} + e^{0.1(i+2)})] \tag{6.93}$$

من أجل $i = 0,1,2,\ldots,8$. ابتداء من $w_0 = y(0) = 1$ تم استخدام المعادلة (6.92) لحساب الحلول التقريبية w_i من أجل $i = 1,2,\ldots,10$ والنتائج العددية موجودة في الجدول رقم (٦,٤). أما بالنسبة لصيغة سمبسون فإننا نحتاج إلى قيمتين ابتدائيتين w_0 و w_1 وذلك لأنه عندما $i = 0$ تصبح المعادلة (6.93) بالشكل:

$$w_2 = \frac{1}{2.9}[3.1w_0 + 0.4w_1 + 0.1(1 + 4e^{0.1} + e^{0.2})]$$

وبالتالي فإنه إضافة إلى $w_0 = y(0) = 1$ فإننا استخدمنا طريقة تايلور ذات الرتبة التقاربية الرابعة لحساب $w_1 = y(0.1)$ وحصلنا على النتائج العددية المدرجة في الجدول رقم (٦,٧). كما هو الحال بالنسبة لطريقة تايلور ذات الرتبة الرابعة والتي تم استخدامها في المثال السابق فإن الأخطاء الموجودة في الجدول رقم (٦,٧) مسجلة حتى ستة أرقام عشرية معنوية وعليه فإن بعض هذه الأخطاء أصغر (أو أكبر) بقليل عما هو مدرج في الجدول. على كل حال، بمقارنة النتائج الموجودة في الجدول رقم (٦,٧) مع تلك الموجودة في الجدول رقم (٦,٤) والتي تم الحصول عليها باستخدام

طريقة تايلور ذات الرتبة الرابعة فإننا نلاحظ أن القيم التقريبية للحل والتي حصلنا عليها باستخدام طريقة سمبسون تكون أفضل من تلك التي تم الحصول عليها باستخدام طريقة تايلور.

الجدول رقم (٦,٧). النتائج العددية للمثال (٦,٧).

		طريقة شبه المنحرف		طريقة سمبسون	
i	t_i	w_i	$\lvert w_i - y_i \rvert$	w_i	$\lvert w_i - y_i \rvert$
0	0.0	1.000000	0.000000	1.000000	0.000000
1	0.1	1.216062	0.000374	1.215688	0.000001
2	0.2	1.466519	0.000836	1.465684	0.000001
3	0.3	1.756219	0.001403	1.754817	0.000001
4	0.4	2.090647	0.002092	2.088556	0.000002
5	0.5	2.476007	0.002925	2.473084	0.000002
6	0.6	2.919315	0.003925	2.915394	0.000003
7	0.7	3.428499	0.005197	3.423383	0.000004
8	0.8	4.012515	0.006541	4.005979	0.000006
9	0.9	4.681471	0.008225	4.673253	0.000007
10	1.0	5.446778	0.010214	5.436573	0.000009

نختتم هذا البند بالإشارة إلى أنه إذا كانت الطريقة متعددة الخطوات تتطلب أكثر من قيمة ابتدائية واحدة، فإننا، كما في الأمثلة السابقة، نضع $w_0 = y(t_0) = \alpha$.

وللحصول على أفضل النتائج فإنه يجب أن تكون دقة حساب القيم الابتدائية الأخرى، w_j، من أجل $j = 1,2,\ldots,k-1$، نفس دقة الطريقة الرئيسة المستخدمة. أي أنه يجب أن يكون:

$$w_j - y(t_j) = O(h^{n+1})$$

من أجل $j = 1,2,\ldots,k-1$، حيث إن n هي رتبة الطريقة الرئيسة المستخدمة. كما نود أن نشير إلى أن الطريقة التي تستخدم لحساب القيم الابتدائية w_j، من أجل $j = 1,2,\ldots,k-1$ لا تتطلب حساب قيم ابتدائية بجانب w_0، أي أنها يجب أن تكون ذات خطوة واحدة. انظر المثال (٦,٧)

(٦,٦) الاستقرار، التقارب وتحليل الخطأ
Stability, Convergence and Error Analysis

هنا سوف ندرس التقارب المتعلق بالطرائق متعددة الخطوات لحل مسألة القيمة الحدية (6.7). المقصود بالتقارب هو أنه عندما تؤول h إلى الصفر فإن الحل العددي w_i يؤول إلى الحل المضبوط $y(t_i)$ للمسالة (6.7).

تعريف (٦,٦)

يُقال إن طريقة متعددة الخطوات (6.79) تتقارب إذا كان لكل مسألة قيمة ابتدائية (6.7) تحقق شروط النظرية (٦,١) يكون لدينا:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ ih\to t-a}} w_i = y(t_i) \tag{6.94}$$

من أجل $i = 0,1,2,\ldots,N$ صحيحاً لكل $t \in [a,b]$.

يتضح من هذا التعريف أنه عندما h تؤول إلى الصفر فإن هذا يعني أن i تؤول إلى ما لانهاية وأن ih تؤول إلى $t-a$.

تعريف (٦,٧)

ليكن L المؤثر الخطي المتعلق بطريقة متعددة الخطوات (6.79) والمعرف بـ:

$$L[y(t),h)]=\sum_{j=0}^{k}[\alpha_j y(t+jh)-h\beta_j y'(t+jh)] \tag{6.95}$$

حيث إن $y(t)$ دالة عشوائية ذات تفاضلات متصلة على الفترة $[a,b]$.

الآن باستخدام متسلسلة تايلور للدالتين $y(t+jh)$ و $y'(t+jh)$ نحصل على:

$$\begin{aligned} y(t+jh)&=y(t)+jhy'(t)+\frac{1}{2}j^2h^2y''(t)+\frac{1}{3!}j^3h^3y'''(t)+\cdots \\ y'(t+jh)&=y'(t)+jhy''(t)+\frac{1}{2}j^2h^2y'''(t)+\cdots \end{aligned} \tag{6.96}$$

ومن المعادلتين (6.95) و (6.96) يكون لدينا:

$$L[y(t),h)]=a_0y(t)+a_1hy'(t)+a_2h^2y''(t)+\cdots+a_nh^ny^{(n)}+\cdots \tag{6.97}$$

حيث إن الثوابت a_r، $r=0,1,2,\ldots$ معرفة كما يلي:

(6.98)

$$\begin{aligned} a_0&=\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k \\ a_1&=\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+k\alpha_k-\beta_0-\beta_1-\cdots-\beta_k \\ a_r&=\frac{1}{r!}[\alpha_1+2^r\alpha_2+\cdots+k^r\alpha_k]-\frac{1}{(r-1)!}[\beta_1+2^{r-1}\beta_2+\cdots+k^{r-1}\beta_k] \end{aligned}$$

من أجل $r=2,3,\ldots$.

تعريف (٦,٨)

يُقال إن مؤثر الفروق (6.95) والمرافق لطريقة متعددة الخطوات (6.79) ذو الرتبة n إذا كان $a_0=a_1=\cdots=a_n=0$ و لكن $a_{n+1}\neq 0$ في المعادلة (6.97).

في الواقع يمكن استخدام التعريف (٦,٨) لاستنتاج صيغة متعددة الخطوات كما يوضحه المثال (٦,٨):

مثال (٦,٨)

نريد أن نستنتج صيغة مباشرة ذات خطوتين تكون رتبتها أعلى ما يمكن. إذن حسب هذه المعطيات يكون لدينا $k=2$، $\beta_2=0$ و $\alpha_2=1$. بالتالي يجب علينا إيجاد قيم المعاملات α_1، β_0 و β_1. بناء على ذلك فإننا نضع $a_0=a_1=a_2=a_3=0$ في المعادلة (6.97)، وهذا يعطينا المعادلات الأربع التالية:

$$a_0=b+\alpha_1+1=0$$
$$a_1=\alpha_1+2-\beta_0-\beta_1=0$$
$$a_2=\frac{1}{2}[\alpha_1+4]-\beta_1=0$$
$$a_3=\frac{1}{6}[\alpha_1+8]-\frac{1}{2}\beta_1=0$$

وبحل هذه المعادلات نحصل على $\alpha_0=-5$، $\alpha_1=4$، $\beta_0=2$ و $\beta_1=4$.

وبالتالي يكون لدينا:

$$w_{i+2}+4w_{i+1}-5w_i=2h[f_{i+1}+2f_i] \qquad (6.99)$$

أيضاً يكون لدينا:

$$a_4=\frac{1}{24}[\alpha_1+16]-\frac{1}{6}\beta_1=\frac{1}{6}$$

إذن حسب التعريف (٦,٨) فإن رتبة هذه الطريقة تكون الثالثة. في الواقع، الخطأ المحلي المقطوع لهذه الطريقة هو: $\frac{1}{6}h^4y^{(v)}(\xi_i)+O(h^5)$.

تعريف (٦,٩)

يُقال إن طريقة متعددة الخطوات (6.79) متوافقة مع مسألة القيمة الابتدائية إذا كانت رتبتها التقاربية $n\geq 1$.

إذن باستخدام التعريفين (٦,٨) و (٦,٩) و المعادلتين (6.95) و (6.97) فإننا نلاحظ أن صيغة متعددة الخطوات (6.79) تكون متوافقة إذا وفقط إذا كان:

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j = 0$$
$$\sum_{j=0}^{k} j\alpha_j = \sum_{j=0}^{k}\beta_j \tag{6.100}$$

وبالتالي فإنه يمكن إثبات أنه إذا كانت المتتالية $\{w_i\}$ تتقارب إلى الحل المضبوط لمسألة القيمة الابتدائية (6.7) فإن الشروط الموجودة في المعادلة (6.100) يجب أن تكون متحققة. بعبارة أخرى، إذا كانت طريقة متعددة الخطوات متقاربة فإنها تكون متوافقة. من ناحية أخرى، الطريقة المتوافقة ليس بالضرورة أن تكون متقاربة.

تعريف (٦,١٠)

كثيرتي الحدود الكارتيزية $\mu(\xi)$ و $\nu(\xi)$ لطريقة متعددة الخطوات (6.79) معرّفة بالتالي:

$$\mu(\xi) = \sum_{j=0}^{k}\alpha_j\xi^j$$
$$\nu(\xi) = \sum_{j=0}^{k}\beta_j\xi^j \tag{6.101}$$

باستخدام المعادلة (6.100) والتعريف (٦,١٠) يمكن استنتاج أن طريقة متعددة الخطوات (6.79) تكون متوافقة إذا وفقط إذا كان:

$$\mu(1) = 0, \qquad \mu'(1) = \nu(1) \tag{6.102}$$

بناء على ذلك فإنه يكون للطريقة المتوافقة جذر عند العدد واحد. نسمي هذا الجذر بالجذر الرئيس وسنرمز له بالرمز ξ_1. أما الجذور الأخرى لكثيرة الحدود $\mu(\xi)$، ξ_s من أجل $s = 2,3,\ldots,k$، وتسمى الجذور الثانوية وتكون موجودة فقط إذا كان عدد خطوات الطريقة أكثر من واحد.

تعريف (٦,١١)

يُقال إن طريقة متعددة الخطوات (6.79) مستقرة صفرياً إذا كان لا يوجد هناك أي جذر لكثيرة الحدود $\mu(\xi)$ قيمته المطلقة أكبر من واحد، وكل جذر قيمته المطلقة واحد يكون بسيطاً.

ملاحظة:

إذا كانت طريقة متعددة الخطوات ذات خطوة واحدة فإن كثيرة الحدود $\mu(\xi)$ تكون خطية، وبالتالي إذا كانت متوافقة فإن الجذر الوحيد يكون هو الواحد. بناء عليه، فإن الطريقة ذات الخطوة الواحدة المتوافقة يجب أن تكون مستقرة صفرياً.

ملاحظة:

إذا كانت طريقة متعددة الخطوات متوافقة فيجب أن يكون $\nu(1) \neq 0$. وذلك لأنه إذا كان $\nu(1) = 0$ فإنه حسب المعادلة (6.102) يكون لكثيرة الحدود $\mu(\xi)$ جذر مكرر عند الواحد، وهذا يتناقض مع تعريف الاستقرار الصفري.

فيما يلي نستعرض النظرية الأساسية المتعلقة بطريقة متعددة الخطوات والتي طورها العالم الرياضي داهلكويست (Dahlquist).

نظرية (٦,٢)

الشروط الضرورية والكافية لكي تكون طريقة متعددة الخطوات متقاربة هي أن تكون متوافقة ومستقرة صفرياً.

مثال (٦,٩)

لنعتبر الطريقة المتعددة الخطوات التالية:

$$w_{i+2} - (1-c)w_{i+1} - cw_i = \frac{h}{4}[(3+c)f_{i+2} - (1+3c)f_i] \qquad (6.103)$$

نريد إثبات أن هذه الطريقة تكون مستقرة صفرياً عندما $c = 0$، وأنها غير مستقرة إذا كان $c = -2$.

بداية عندما $c = 0$ يكون لدينا:

$$w_{i+2} - w_{i+1} = \frac{h}{2}[3f_{i+1} - f_i]$$

وتكون كثيرة الحدود الكارتيزية بالشكل:

$$\mu(\xi) = \xi^2 - \xi$$

ومنه نحصل على الجذرين $\xi_1 = 1$ و $\xi_2 = 0$. وبالتالي فإن الصيغة تكون مستقرة صفرياً حسب التعريف (٦,١١). كما يمكن التأكد أن $\mu(1) = 0$ و $\mu'(1) = \nu(1)$ ، مما يعني أنها متوافقة. أيضاً يمكن إثبات أن رتبة الصيغة في هذه الحالة تكون الثانية.

أما إذا كان $c = -2$ فإن (6.103) تصبح بالشكل:

$$w_{i+2} - 3w_{i+1} + 2w_i = \frac{h}{4}[f_{i+2} + 5f_i]$$

وتصبح كثيرة الحدود الكارتيزية المرافقة لها بالشكل:

$$\mu(\xi) = \xi^2 - 3\xi + 2$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على الجذرين $\xi_1 = 1$ و $\xi_2 = 2$. وبما أن $|\xi_2| > 1$ فإنه حسب تعريف (٦,١١) تكون هذه الطريقة غير مستقرة صفرياً. يمكن أيضاً إثبات أن الصيغة تكون غير مستقرة صفرياً وغير متوافقة عندما $c = -1$ ولكننا نترك ذلك للقارئ.

(٦,٧) طرائق التنبؤ والتصحيح

Predictor and Corrector Methods

نعلم أنه إذا كانت الطريقة المستخدمة ضمنية، فإننا نحل المعادلة التي تمثل الصيغة العددية بالنسبة للمجهول w_{i+1} ومن ثم نتابع حساب القيم التقريبية للحل. في الواقع، إذا كانت الدالة $f(t, y)$ دالة خطية بالنسبة للمتغير y فإن هذا يكون سهلاً، انظر تطبيق طريقة شبه المنحرف في المثال (٦,٧). أما إذا كانت الدالة $f(t, y)$ غير خطية فإنه، بشكل عام، يكون حل الصيغة العددية بالنسبة للمجهول w_{i+1}

صعباً. فعلى سبيل المثال إذا كانت طريقة شبه المنحرف هي المستخدمة فإن المعادلة الناتجة تكون غير خطية بالنسبة للمجهول w_{i+1}. ومن أجل عدد ثابت i، فإن w_{i+1} هي الحل للمعادلة غير الخطية:

$$y = g(y) \tag{6.104}$$

حيث إن:

$$g(y) = w_i + \frac{h}{2}[f(t_{i+1}, y) + f(t_i, w_i)]$$

وحل المعادلة (6.104) يمكن استخدام صيغة تكرار النقطة الثابتة:

$$y^{(l+1)} = g(y^{(l)}) \quad ، \quad l \geq 0 \tag{6.105}$$

وذلك لأن w_{i+1} نقطة ثابتة للدالة g. وإذا كانت $|g'(y)| < 1$ لكل y من أجل $|y - w_{i+1}| \leq |y^{(0)} - w_{i+1}|$ فإن المعادلة (6.105) تتقارب. وبما أن $g'(y) = \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y}$، فإن المعادلة (6.105) تتقارب إذا كان $h < (0.5 |\frac{\partial f}{\partial y}|)^{-1}$ و $y^{(0)}$ قريبة بشكل كافي من w_{i+1}. بناء على ذلك، فإن الاختيار المناسب لـ $y^{(0)}$ يؤدي إلى تقارب المعادلة (6.105) بأقل عدد ممكن من التكرارات.

يوجد أسلوب بديل لحل هذه المسألة وهو أسلوب التنبؤ والتصحيح. تتضمن طريقة التنبؤ والتصحيح زوج من الطرائق، أحدها مباشرة والأخرى ضمنية. بداية لندمج صيغة أويلر (المباشرة) مع صيغة شبه المنحرف (الضمنية) للحصول على طريقة تنبؤ وتصحيح. من أجل $i = 0,1,2,...$ نوجد قيمة المجهول w_{i+1} بواسطة إيجاد تقريب أويلر:

$$w_{i+1}^{(0)} = w_i + hf_i \tag{6.106}$$

ثم نستخدمه لحساب تقريب أدق باستخدام صيغة شبه المنحرف:

$$\begin{aligned} w_{i+1} &= w_i + \frac{h}{2}[f(t_{i+1}, w_{i+1}^{(0)}) + f(t_i, w_i)] \\ &= w_i + \frac{h}{2}[f_{i+1}^{(0)} + f_i] \end{aligned} \tag{6.107}$$

لاحظ أن صيغة أويلر هنا تكون التنبؤ وصيغة شبه المنحرف تمثل التصحيح.

نشير هنا إلى أنه، بشكل عام، تكون رتبة التقارب للصيغة المباشرة (التنبؤ) أقل أو تساوي تلك للصيغة الضمنية (التصحيح). أن طريقة التنبؤ والتصحيح الأكثر استخداماً تتضمن صيغة آدم- باشفورث المباشرة:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}] \tag{6.108}$$

كتنبؤ و صيغة آدم- مولتن الضمنية:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}] \tag{6.109}$$

كتصحيح. يتضح من المعادلتين (6.108) و (6.109) أنه من أجل تطبيق هذه الطريقة يجب أن يكون لدينا القيم التقريبية الأربع w_0، w_1، w_2 و w_3. وبما أن قيمة w_0 تكون معطاة في نص المسألة وأن الخطأين المحليين المقطوعين للصيغتين (6.108) و(6.109) هما:

$$L_T = \frac{251}{720} h^5 y^{(5)}(\eta_i) \tag{6.114}$$

و

$$L_T = -\frac{19}{720} h^5 y^{(5)}(\varsigma_i) \tag{6.115}$$

على الترتيب، حيث إن $\eta_i \in (t_{i-3}, t_i)$ و $\varsigma_i \in (t_{i-2}, t_{i+1})$، مما يدل على أن الرتبة التقاربية للطريقة تكون رابعة، فإنه يجب حساب w_i، $i = 1,2,3$ باستخدام طريقة مباشرة ذات رتبة تقاربية رابعة. عادة يتم استخدام طريقة رنج- كوتا ذات الرتبة الرابعة (6.78). إذا كانت قيم w_0، w_1، w_2 و w_3 متوفرة، فإنه يتم حساب قيم

w_{i+1}، من أجل $i = 3,4,\dots$ باستخدام طريقة التنبؤ والتصحيح المعرفة في المعادلتين (6.108) و (6.109) كما يلي: أولاً تستخدم صيغة آدم- باشفورث لحساب التقريب:

$$w_{i+1}^{(0)} = w_i + \frac{h}{24}[55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}] \qquad (6.110)$$

ثم تستخدم صيغة آدم- مولتن لتحسين هذا التقريب:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[9f_{i+1}^{(0)} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}] \qquad (6.111)$$

حيث إن $f_{i+1}^{(0)} = f(t_{i+1}, w_{i+1}^{(0)})$.

مثال (٦,١٠)

نستعرض استخدام طريقة التنبؤ والتصحيح الموضحة سابقاً لحل مسالة القيم الابتدائية:

$$y' = y + e^t$$
$$y(0) = 1$$

على الفترة $[0,1]$ و ذلك بوضع $h = 0.1$. كما سبق هذا يعني أن $t_i = 0.1i$ من أجل $i = 0,1,2,\dots,10$. بداية $w_0 = 1$ و من المثال (٦,٧) نحصل القيم التقريبية الثلاثة w_i، $i = 1,2,3$. راجع الجدول رقم (٦,٧). الآن بما أن $f(t,y) = y + e^t$ فإن معادلتي التنبؤ والتصحيح (6.110) و (6.111)، على الترتيب، تصبحان بالشكل:

$$\begin{aligned} w_{i+1}^{(0)} = w_i + \frac{h}{24}[&55(w_i + e^{0.1i}) - 59(w_{i-1} + e^{0.1(i-1)}) + 37(w_{i-2} + e^{0.1(i-2)}) \\ &- 9(w_{i-3} + e^{0.1(i-3)})] \end{aligned} \qquad (6.112)$$

و

$$\begin{aligned} w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[&9(w_{i+1}^{(0)} + e^{0.1(i+1)}) + 19(w_i + e^{0.1i}) - 5(w_{i-1} + e^{0.1(i-1)}) \\ &+ w_{i-2} + e^{0.1(i-2)}] \end{aligned} \qquad (6.113)$$

من أجل $i = 3,4,\dots,9$. لنوضح كيفية الحصول على أول تقريب، w_4، بواسطة هاتين المعادلتين حيث إنه عندما $i = 3$ يكون لدينا:

$$w_4^{(0)} = w_3 + \frac{0.1}{24}[55(w_3 + e^{0.3}) - 59(w_2 + e^{0.2}) + 37(w_1 + e^{0.1}) - 9(w_0 + 1)]$$
$$= 2.088528$$

و

$$w_4 = w_3 + \frac{0.1}{24}[9(w_4^{(0)} + e^{0.4}) + 19(w_3 + e^{0.3}) - 5(w_2 + e^{0.2}) + w_1 + e^{0.1}]$$
$$= 2.088555$$

النتائج العددية لهذا المثال موجودة في الجدول رقم (٦,٨). يتضح من هذه النتائج أن الخطأ $|w_i - y_i|$ يتزايد مع تزايد قيمة t_i وهذا يتوافق مع باقي الطرائق العددية التي سبق دراستها في البنود السابقة.

الجدول رقم (٦,٨). النتائج العددية للمثال (٦,١٠).

i	t_i	w_i	y_i	$\|w_i - y_i\|$
0	0.0	1.000000	1.000000	0.000000
1	0.1	1.215688	1.215688	0.000000
2	0.2	1.465683	1.465683	0.000000
3	0.3	1.754816	1.754816	0.000001
4	0.4	2.088555	2.088555	0.000000
5	0.5	2.473084	2.473082	0.000002
6	0.6	2.915393	2.915390	0.000003
7	0.7	3.423385	3.423380	0.000005
8	0.8	4.005981	4.005974	0.000007
9	0.9	4.673270	4.673259	0.000011
10	1.0	5.436578	5.436564	0.000014

(٦,٨) تمارين

Exercises

١- استخدم طريقة أويلر لحل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = y + e^t$$
$$y(1) = 2e$$

في الفترة $1 \le t \le 1.5$ وذلك بوضع $h = 0.1$. احسب الخطأ $|y_i - w_i|$ من أجل $i = 1,2,\cdots,5$، ثم قارن حجم هذه الأخطاء عند كل i مع تلك المماثلة لها والموجودة في الجدول رقم (٦,١). ماذا تلاحظ؟

٢- اعتبر مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = -\frac{1}{t} y + 2$$
$$y(1) = 2$$

استخدم طريقة أويلر لحساب قيماً تقريبية لـ $y(1.6)$ وذلك عندما $h = 0.1$، $h = 0.2$ $h = 0.3$، بالتتالي. ثم احسب الخطأ المضبوط المتعلق بالتقريب الذي تحصل لـ $y(1.6)$ في كل حالة، علماً بأن الحل المضبوط لهذه المسألة هو $y(t) = \frac{1}{t} + t$. قارن النتائج العددية. ماذا تلاحظ؟

٣- استخدم طريقة نقطة الوسط لحل المسألة الموجودة في المثال (٦,٢) وذلك باستخدام طريقة تايلور ذات الرتبة الثانية لحساب w_1. احسب القيم التقريبية الثلاث w_2، w_3 و w_4 فقط، ثم قارن حجم الأخطاء المتعلقة بهذه القيم مع تلك الموجودة في الجدول رقم (٦,٢). ماذا تلاحظ؟ ماذا تستطيع أن تستنتج من النتائج العددية لهذا التمرين والمثال (٦,٢).

٤- استخدم طريقة نقطة الوسط لحل المسألة الموجودة في التمرين ٢ ولنفس قيم h وذلك:

أ) بحساب w_1 باستخدام طريقة أويلر.

ب) بحساب w_1 باستخدام الحل المضبوط.

قارن النتائج العددية للحالتين. ماذا تلاحظ؟.

٥- استخدم طريقة تايلور ذات الرتبة الثانية لحل مسألة القيمة الابتدائية الموجودة في التمرين ٢ ولنفس قيم h. قارن النتائج التي تحصل عليها هنا مع تلك التي تحصل عليها في التمرين ٤. أي النتائج أفضل ؟.

٦- استخدم طريقتي تايلور ذات الرتبة الثالثة والرابعة لحل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = -\frac{1}{t}y + 2$$
$$y(0.4) = 2.9$$

وذلك بوضع $h = 0.2$. احسب قيماً تقريبية لـ $y(1)$.

٧- استخدم طريقتي رنج-كوتا المعرفتين بالمعادلتين (6.64) و (6.66) لحل مسألة القيمة الابتدائية الموجودة في المثال (٦,٥) ثم قارن النتائج الموجودة في الجدول رقم (٦,٥).

٨- استخدم طريقة رنج-كوتا ذات الرتبة الثانية والمعرفة بالمعادلة (6.62) لحل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = -y + t(t+2)$$
$$y(0) = 1$$

وذلك بوضع $h = 0.2$. احسب قيماً تقريبية لـ $y(0.4)$. احسب الأخطاء $|y_i - w_i|$ من اجل $i = 1,2$ حيث إن $y(t) = t^2 + e^{-t}$.

٩- استخدم طريقة رنج-كوتا ذات الرتبة الثالثة والمعرفة بالمعادلة (6.77) لحل مسألة القيمة الابتدائية التي تم حلها في المثال (٦,٦). احسب القيم التقريبية

الثلاث w_1 ، w_2 و w_3 فقط ، ثم قارن حجم الأخطاء المتعلقة بهذه القيم مع تلك الموجودة في الجدول رقم (٦,٦). ماذا تلاحظ؟

١٠- أوجد حدي الخطأ المحلي المقطوع لطريقتي رنج-كوتا المعرفتين في المعادلتين (6.76) و (6.77).

١١- استخدم طريقة رنج-كوتا ذات الرتبة الثالثة والمعرفة بالمعادلة (6.76) لحل مسألة القيمة الابتدائية الموجودة في التمرين ٨.

١٢- استخدم طريقة رنج-كوتا ذات الرتبة الرابعة لحل مسألة القيمة الابتدائية الموجودة في التمرين ٨. قارن النتائج التي تحصل عليها هنا مع تلك التي تحصل عليها في التمرينين ٨ و ١١.

١٣- اكتب خوارزمية لتنفيذ طريقة رنج-كوتا ذات الرتبة التقاربية الرابعة (6.78).

١٤- استخدم طريقة شبه المنحرف لحل مسألة القيمة الابتدائية الموجودة في التمرين ٨. قارن النتائج التي تحصل عليها هنا مع تلك التي تحصل عليها في التمرين ٨.

١٥- استخدم طريقة سمبسون لحل مسألة القيمة الابتدائية الموجودة في التمرين ٨. قارن النتائج التي تحصل عليها هنا مع تلك التي تحصل عليها عندما تم استخدام طريقة رنج-كوتا ذات الرتبة الرابعة في التمرين ١٢.

١٦- استخدم اسلوب متسلسلة تيلور لاستنتاج طريقة شبه المنحرف، ثم أوجد حد الخطأ المقطوع المرافق لها.

١٧- لتكن $p(t)$ كثيرة الحدود الوحيدة ذات الدرجة الثانية والتي تمر بالنقاط (t_i, f_i)، (t_{i+1}, f_{i+1}) و (t_{i+2}, f_{i+2}). استخدم أسلوب التكامل لاستنتاج طريقة سمبسون ثم أوجد حد الخطأ المقطوع المرافق لها.

١٨- لتكن $p(t)$ كثيرة الحدود الوحيدة ذات الدرجة الثانية والتي تمر بالنقاط (t_i, f_i)، (t_{i+1}, f_{i+1}) و (t_{i+2}, f_{i+2}). استخدم أسلوب التكامل لاستنتاج طريقة آدم-مولوتن

$$w_{i+2} = w_{i+1} + \frac{h}{12}[5f_{i+2} + 8f_{i+1} - f_i]$$

ثم أوجد الخطأ المقطوع المرافق.

١٩- استخدم طريقة آدم-مولوتن الموجودة في التمرين السابق لحل مسألة القيمة الابتدائية الموجودة في التمرين ٨. ثم قارن النتائج العددية التي تحصل عليها مع تلك التي تحصل عليها عندم تم استخدام طريقة رنج-كوتا ذات الرتبة الثالثة في التمرين ١١.

٢٠- استنتج صيغة مباشرة ذات الثلاث خطوات تكون رتبتها أعلى ما يمكن بحيث تحتوي على وسيط حر وليكن λ. ثم أوجد الخطأ المحلي المقطوع المرافق لها.

تلميح: ضع $\alpha_0 = \lambda$.

٢١- استنتج صيغة ضمنية ذات خطوتين تكون رتبتها أعلى ما يمكن بحيث تحتوي على وسيط حر وليكن λ. ثم أوجد الخطأ المحلي المقطوع المرافق لها.

تلميح: ضع $\alpha_0 = \lambda$.

٢٢- أثبت أن صيغة متعددة الخطوات:

$$w_{i+2} = w_{i+1} + \frac{h}{12}[5f_{i+2} + 8f_{i+1} - f_i]$$

مستقرة صفرياً.

٢٣- أثبت أن صيغة متعددة الخطوات:

$$w_{i+2} + 4w_{i+1} - 5w_i = \frac{h}{2}[8f_{i+1} + 4f_i]$$

غير مستقرة صفرياً.

٢٤- أثبت أن صيغة متعددة الخطوات:

$$w_{i+2} + w_{i+1} - 2w_i = \frac{h}{2}[5f_{i+1} + f_i]$$

متوافقة ولكنها غير مستقرة صفرياً.

٢٥- أثبت أن صيغة متعددة الخطوات التالية:

$$w_{i+3} - w_{i+2} = \frac{h}{24}[9f_{i+3} + 19f_{i+2} - 5f_{i+1} + f_i]$$

متقاربة.

٢٦- استخدم طريقة التنبؤ والتصحيح وذلك بجعل طريقة أويلر للتنبؤ وطريقة شبه المنحرف للتصحيح لحساب قيمة تقريبية لـ $y(0.4)$ حيث إن $y(x)$ هو الحل المضبوط لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = -y + t(t+2)$$
$$y(0) = 1$$

وذلك بوضع $h = 0.2$. احسب الخطأ المضبوط عند كل خطوة حيث إن $y(t) = t^2 + e^{-t}$.

٢٧- حل المسألة الموجودة في المثال السابق باستخدام أسلوب التنبؤ والتصحيح وذلك بجعل طريقة آدم- باشفورث للتنبؤ و آدم-مولتن للتصحيح. احسب الخطأ عند كل خطوة.

تمارين الحاسب

ح١ – استخدم طريقة نقطة الوسط (و طريقة تايلور ذات الرتبة الثانية لحساب w_1) لحل مسألة القيمة الابتدائية الموجودة في المثال (٦,٢). احسب $|y_i - w_i|$ من أجل $i = 1,2,\ldots,10$ ثم قارن النتائج العددية التي تحصل عليها مع تلك الموجودة في الجدول رقم (٦,٢).

ح٢ – استخدم طريقة تايلور ذات الرتبة الرابعة لحل مسألة القيمة الابتدائية الموجودة في التمرين ٨ وذلك بوضع $h = 0.1$. احسب الخطأ $|y_i - w_i|$ من أجل $i = 1,2,\ldots,10$.

ح٣– استخدم طريقة سمبسون لحل مسألة القيمة الابتدائية الموجودة في التمرين ٨ وذلك بوضع $h = 0.1$ وحساب w_1 باستخدام طريقة تايلور ذات الرتبة الرابعة. احسب الخطأ $|y_i - w_i|$ من أجل $i = 1,2,\ldots,10$. قارن النتائج العددية مع تلك التي تحصل عليها في التمرين ح٢. أعد حل المسألة بوضع $w_1 = y(t_1)$ ثم قارن النتائج العددية. ماذا تلاحظ ؟.

ح٤ – استخدم طريقتي رنج-كوتا ذات الرتبة الثانية و المعرفتين في المعادلتين (6.64) و (6.66) لحل مسألة القيمة الابتدائية الموجودة في المثال (٦,٥). احسب الخطأ $|y_i - w_i|$ من أجل $i = 1,2,\ldots,10$، ثم قارن النتائج التي العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك الموجودة في الجدول رقم (٦,٥).

ح٥ – استخدم طريقة رنج-كوتا ذات الرتبة الرابعة لحل مسألة القيمة الابتدائية الموجودة في التمرين ٨. احسب الخطأ $|y_i - w_i|$ من أجل $i = 1,2,\ldots,10$، ثم قارن النتائج التي العددية التي تحصل عليها مع تلك التي تحصل عليها في التمرينين ح٢ و ح٣.

ح٦ – استخدم طريقة التنبؤ والتصحيح المعرفة بالمعادلتين (6.108) و (6.109) لحل مسألة القيمة الابتدائية الموجودة في التمرين ٨. يمكن حساب w_i ، $i = 1,2,3$ باستخدام طريقة تايلور أو رنج–كوتا ذات الرتبة التقاربية الرابعة.