الفصل السابع

حل أنظمة المعادلات غير الخطية

Solving Systems of Nonlinear Equations

هنا سندرس بعض الطرائق العددية لحل أنظمة المعادلات غير الخطية. لقد درسنا في الفصل الثاني الطرائق العددية لإيجاد قيم تقريبية لحل المعادلة غير الخطية ذات المتغير الواحد $f(x)=0$. سوف نعمم هنا طريقتي تكرار النقطة الثابتة و نيوتن لإيجاد حلولاً عددية لأنظمة المعادلات غير الخطية، ثم نناقش بعض الطرائق الأخرى.

في هذا الفصل سنهتم بإيجاد الحل العددي للنظام غير الخطي:

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2,\dots,x_N)&=0\\ f_2(x_1,x_2,\dots,x_N)&=0\\ &\vdots\\ f_N(x_1,x_2,\dots,x_N)&=0 \end{aligned} \tag{7.1}$$

بالنسبة للمجاهيل x_i ، من أجل $i=1,2,\dots,N$. إذا كانت القيم r_i ، $i=1,2,\dots,N$ موجودة بحيث إن:

$$\begin{aligned} f_1(r_1,r_2,\dots,r_N)&=0\\ f_2(r_1,r_2,\dots,r_N)&=0\\ &\vdots\\ f(r_1,r_2,\dots,r_N)&=0 \end{aligned} \tag{7.2}$$

فإن هذه القيم تشكل حلاً للنظام غير الخطي (7.1).

يمكن كتابة النظام غير الخطي (7.1) بالشكل المتجهي:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{7.3}$$

حيث إن:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_N(\mathbf{x})]^T$$

و $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_N]^T$. بناء عليه فإن الحل يمكن كتابته بالشكل: $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \ldots, r_N]^T$.

ملاحظة:

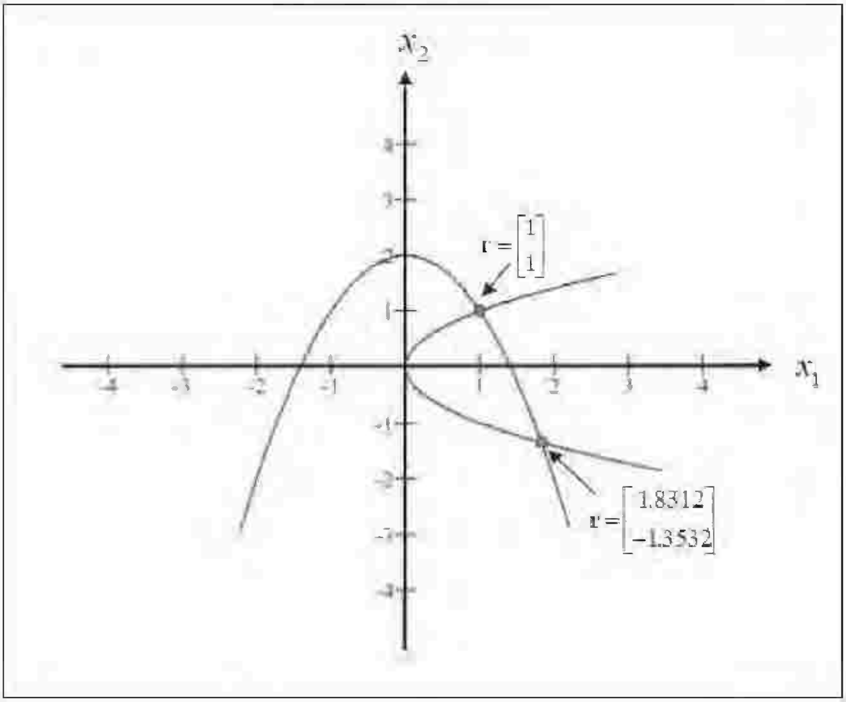
في هذا الفصل سوف نعرّف الدالة $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ على المجموعة D في الفضاء $\Re^N$. وسوف نفترض دائماً أن للنظام غير الخطي (7.3) حل وحيد $\mathbf{r}$ في المجموعة D.

مثال (٧,١)

المتجه $\mathbf{r} = [1,1]^T$ هو حل للنظام غير الخطي:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2^2 \quad &= 0 \\ x_1^2 + x_2 - 2 &= 0 \end{aligned} \tag{7.4}$$

وذلك لأن $1 - 1^2 = 1 - 1 = 0$ و $1^2 + 1 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$. أيضاً يتضح من الشكل رقم (٧,١) أن منحنيا المعادلتين يتقاطعان عند النقطتين $[1,1]^T$ و $[1.8312,-1.3532]^T$ وبالتالي يكون المتجه $\mathbf{r} = [1.8312,-1.3532]^T$ حلاً آخر للنظام (7.4).



الشكل رقم (٧,١). حلول النظام غير الخطي (7.4).

قبل البدء في دراسة الحلول العددية للنظام غير الخطي (7.1)، من المناسب أن نستعرض بعض النتائج المتعلقة بالاتصال والنهاية للدوال في الفضاء $\Re^N$.

تعريف (٧,١)

يُقال إن الدالة $\mathbf{F}: D \subset \Re^N \to \Re^N$ متصلة عند $\mathbf{x}_0 \in D$، إذا كان لأي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ يحقق الخاصية:

$$\| \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) \| < \varepsilon \tag{7.5}$$

لكل $\mathbf{x} \in D$ و $\| \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \| < \delta$.

تجدر الإشارة هنا إلى أن وجود النهاية عند نقطة ما تكون مستقلة عن المعيار المتجهي المستخدم.

تعريف (٧,٢)

لتكن $\mathbf{F}$ دالة من المجموعة $D \subset \Re^N$ إلى $\Re^N$ والمعرفة في المعادلة (7.3). نعرّف النهاية:

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{L} \tag{7.6}$$

حيث إن $\mathbf{L} = [L_1, L_2, \ldots, L_N]$، إذا و فقط إذا كان $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x}) = L_i$ من أجل $i = 1,2,\ldots,N$.

تعريف (٧,٣)

يُقال إن الدالة $\mathbf{F}$ المعرفة من المجموعة $D \subset \Re^N$ إلى $\Re^N$ متصلة عند $\mathbf{x}_0 \in D$ إذا كانت النهاية $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{F}(\mathbf{x})$ موجودة وأن $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$. تكون الدالة $\mathbf{F}$ متصلة على المجموعة D إذا كانت $\mathbf{F}$ متصلة عند كل نقطة في المجموعة D.

(٧,١) طريقة تكرار النقطة الثابتة

Fixed-Point Iteration Method

نعلم أننا في الفصل الثاني قد طوّرنا طريقة تكرار النقطة الثابتة لحل المعادلة غير الخطية $f(x) = 0$ بكتابتها بالشكل المساوي $x = g(x)$ بحيث يكون لدينا $\alpha = g(\alpha)$ إذا كان $f(\alpha) = 0$. هنا سوف نعمم هذه الطريقة لحل النظام غير الخطي (7.3) بكتابته بالشكل المساوي:

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}(\mathbf{x}) \tag{7.7}$$

حيث إن $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = [g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \ldots, g_N(\mathbf{x})]^T$، وبالتالي فإن أي حل $\mathbf{r}$ للمعادلة غير الخطية (7.7) يكون حلاً للمعادلة الأصلية (7.3) . نذكر هنا أنه إذا كان $\mathbf{r}$ حلاً للمعادلة (7.7) فإن المتجه $\mathbf{r}$ يسمى نقطة ثابتة للدالة المتجهية $\mathbf{G}(\mathbf{x})$.

لإيجاد قيماً تقريبية للحل $\mathbf{r}$، فإننا نختار التقريب الابتدائي $\mathbf{x}^{(0)} \in \Re^N$ ثم يتم حساب متتالية المتجهات $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_0^\infty$ باستخدام الصيغة التكرارية:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k-1)}) \tag{7.8}$$

من أجل $k \geq 1$، والتي نأمل أنها تتقارب إلى الحل المطلوب $\mathbf{r}$ عندما تؤول k إلى مالانهاية. إذا كان $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{r}$ والدالة $\mathbf{G}$ متصلة فإنه يكون لدينا:

$$\mathbf{r} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k-1)}) = \mathbf{G}(\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k-1)}) = \mathbf{G}(\mathbf{r}) \tag{7.9}$$

أي أن $\mathbf{r}$ نقطة ثابتة للدالة $\mathbf{G}$. تستعرض الخوارزمية (٧,١) استخدام هذه الطريقة.

مثال (٧,٢)

ليكن لدينا الصيغة التكرارية $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k-1)})$، $k \geq 1$ حيث إن $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = [g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x})]^T$، $g_1(x_1, x_2) = \sqrt[4]{2x_2 - x_1}$ و $g_2(x_1, x_2) = 1 - \ln \dfrac{x_1 + 1}{2}$.

سنبدأ من التقريب الابتدائي $\mathbf{x}^{(0)} = [0.5, 0.5]^T$ لحساب عناصر المتتالية $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_0^\infty$ باستخدام الصيغة التكرارية:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}^{(k-1)}) \\ g_2(\mathbf{x}^{(k-1)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt[4]{2x_2^{(k-1)} - x_1^{(k-1)}} \\ 1 - \ln \dfrac{x_1^{(k-1)} + 1}{2} \end{bmatrix}, \qquad k \geq 1 \tag{7.10}$$

هنا سوف نستعرض هذه الطريقة لحساب التكرارين الأول والثاني فقط حيث يكون لدينا:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt[4]{2(0.5) - (0.5)} \\ 1 - \ln \dfrac{0.5 + 1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.840846 \\ 1.287682 \end{bmatrix}$$

و

$$\mathbf{x}^{(2)}=\begin{bmatrix}x_1^{(2)}\\x_2^{(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt[4]{2(1.287682)-0.840846}\\1-\ln\dfrac{0.840846+1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.147611\\1.082922\end{bmatrix}$$

يمكن للقارئ متابعة الحسابات. ماذا تلاحظ؟.

ملاحظة:

عملياً يمكن إيقاف حساب عناصر المتتالية $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_0^\infty$ إذا تحقق أحد الشروط التالية:

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})\|\le\varepsilon \tag{7.11}$$

$$\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^{(k-1)}\|\le\varepsilon \tag{7.12}$$

أو

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^{(k-1)}\|}{\|\mathbf{x}^{(k)}\|}\le\varepsilon \tag{7.13}$$

حيث إن $\mathbf{x}^{(k-1)}$ و $\mathbf{x}^{(k)}$ هما الحلان التقريبيان عند التكراريين $k-1$ و k، على الترتيب، و $\varepsilon=5\times10^{-t}$ حيث إن $t\ge1$ تمثل دقة الحل العددي المطلوب حسابه.

خوارزمية (٧,١): طريقة تكرار النقطة الثابتة

تستخدم هذه الخوارزمية طريقة تكرار النقطة الثابتة لحل نظاماً من المعادلات غير الخطية $\mathbf{F}(\mathbf{x})=\mathbf{0}$. هنا $\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}$ الحل الابتدائي و $\mathbf{r}$ الحل العددي المحسوب، eps تمثل دقة الحل العددي و M هو العدد الأقصى للتكرارات.

الخطوة ١ : أدخل قيم N، $\mathbf{x}$، eps و M.

الخطوة ٢ : ضع $k=0$

الخطوة ٣ : طالما $k\le M$ اعمل الخطوات ٤ – ٧

الخطوة ٤ : احسب $\mathbf{r} = \mathbf{G}(\mathbf{x})$

الخطوة ٥ : إذا كان $\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\| \leq eps$ ، اطبع الحل العددي $\mathbf{r}$ ؛ قف.

الخطوة ٦ : ضع $\mathbf{x} = \mathbf{r}$

الخطوة ٧ : ضع $k = k + 1$

الخطوة ٨ : اطبع " لم يتم الحصول على الحل العددي المطلوب بعد M تكرار".

ملاحظة:

نشير هنا إلى أنه يمكن استبدال شرط الوقوف الموجود في الخطوة ٥ من الخوارزمية (٧,١) بأحد الشرطين الآخرين الموجودين في المعادلتين (7.12) و (7.13).

كما هو الحال بالنسبة للمعادلة غير الخطية في الفضاء $\Re$، فإنه يوجد العديد من الاختيارات لكتابة المعادلة الأصلية (7.3) بالشكل المساوي (7.7). النظرية (٧,١) تتضمن الشروط اللازم توفرها لضمان تقارب متتالية المتجهات $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_0^\infty$ والمعرفة بالصيغة التكرارية (7.8) إلى النقطة الثابتة $\mathbf{r}$. ولكن قبل الشروع في دراسة النظرية لنعرّف مصفوفة جاكوبي للدالة المتجهية $\mathbf{G}(\mathbf{x})$.

تعريف (٧,٣)

لتكن $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = [g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \ldots, g_N(\mathbf{x})]^T$ و $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_N]^T$ ، ولنفترض أن التفاضلات الجزئية $\dfrac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ من أجل $i, j = 1,2,\ldots,N$ معرّفة. فإن مصفوفة جاكوبي للدالة $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ عند $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_N]^T$ معرّفة كما يلي:

$$\mathbf{J}_G(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_N} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_N} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial g_N}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_N}{\partial x_2} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{\partial g_N}{\partial x_N} \end{bmatrix} \tag{7.14}$$

نظرية (٧,١)

ليكن لدينا المجموعة $D = \{[x_1, x_2, \ldots, x_N]^T \mid a_i \le x_i \le b_i, \;\; i = 1,2,\ldots,N\}$ حيث إن a_i و b_i من أجل $i = 1,2,\ldots,N$ ثوابت حقيقية، ولتكن الدالة $\mathbf{G}$ متصلة من $D \subset \Re^N$ إلى $\Re^N$. إضافة إلى ذلك، لتكن التفاضلات الأولى للدوال $g_i(\mathbf{x})$، $i = 1,2,\ldots,N$ متصلة و أن $\mathbf{G}(D) \subset D$ و $\max_{\mathbf{x} \in D} \| \mathbf{J}_G(\mathbf{x}) \|_\infty = \lambda < 1$، حيث إن $\mathbf{J}_G(\mathbf{x})$ مصفوفة جاكوبي للدالة $\mathbf{G}$، فإن:

١- يوجد للدالة $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ نقطة ثابتة وحيدة $\mathbf{r}$ في D.

٢- من أجل أي اختيار ابتدائي $\mathbf{x}^{(0)} \in D$ تتقارب متتالية المتجهات $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_0^\infty$ والمعرفة بالصيغة التكرارية (7.8) إلى النقطة الثابتة $\mathbf{r}$.

٣- تـُحقق المتتالية $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_0^\infty$ المتباينة التالية:

$$\| \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{r} \|_\infty \le \frac{\lambda^k}{1-\lambda} \| \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)} \|_\infty \tag{7.15}$$

كنتيجة مباشرة للنظرية (٧,١) نحصل على:

نظرية (٧,٢)

لتكن $\mathbf{r}$ نقطة ثابتة لـلدالة $\mathbf{G(x)}$ ولنفترض أن تفاضلات الدوال $g_i(\mathbf{x})$، من أجل $i = 1,2,\ldots,N$ متصلة في جوار النقطة $\mathbf{r}$، وأن:

$$\| \mathbf{J}_G(\mathbf{r}) \| < 1 \tag{7.16}$$

فإن الصيغة التكرارية (7.8) تكون متقاربة لأي اختيار ابتدائي $\mathbf{x}^{(0)}$ بقرب كاف من $\mathbf{r}$.

المثال التالي يستعرض كيفية الاستعانة بالنظرية (٧,١) لكتابة صيغة تكرارية تكون مضمونة التقارب.

مثال (٧,٣)

لنعتبر النظام غير الخطي:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= x_1 - 2x_2^2 + 1 = 0 \\ f_2(\mathbf{x}) &= x_1^4 - x_2 = 0 \end{aligned} \tag{7.17}$$

والمعرّف على المجموعة $D = \{[x_1, x_2]^T \mid 0.25 \le x_1 \le 1.2,\ 0.5 \le x_2 \le 1.5\}$.

لنقترح الصيغتين التكراريتين المعرفتين بالتالي:

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{x}) &= 2x_2^2 - 1 \\ g_2(\mathbf{x}) &= x_1^4 \end{aligned} \tag{7.18}$$

و

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{x}) &= x_2^{1/4} \\ g_2(\mathbf{x}) &= \sqrt{\frac{x_1 + 1}{2}} \end{aligned} \tag{7.19}$$

نريد أن نتحقق فيما إذا كانت الصيغة التكرارية $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k-1)})$، حيث إن $\mathbf{G(x)} = [g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x})]^T$ لكل من الحالتين (7.18) و (7.19) تكوّن متتالية متجهات $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_0^\infty$ تكون مضمونة التقارب إلى حل هذا النظام.

بداية بالنسبة للاختيار (7.18) نلاحظ أن الدالة $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ وتفاضلاتها الجزئية الأولى متصلة على المجموعة D، ولكن عندما $x_2 = 1.5$ يكون لدينا $g_1(\mathbf{x}) = 3.5 \notin [0.25,1.2]$ وهذا يعني أن الدالة $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ لا تحقق شرط النظرية (٧,١) $\mathbf{G}(D) \subset D$. إذن لا يمكن ضمان تقارب الصيغة التكرارية المعرفة بالمعادلة (7.18). من ناحية أخرى، بالنسبة للاختيار الثاني والمعرّف بالمعادلة (7.19) نلاحظ أنه من أجل كل $x_2 \in [0.5,1.5]$ يكون لدينا $x_1 \in [0.840896,1.1067] \subset [0.25,1.2]$ وذلك لأن $x_1 = x_2^{1/4}$، وأنه لكل $x_1 \in [0.25,1.2]$ نحصل على $x_2 \in [\sqrt{1.25/2}, \sqrt{1.2/2}] \subset [0.5,1.5]$ وذلك لأن $x_2 = \sqrt{(1+x_1)/2}$. وهذا يعني أن $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \in D$ لكل $\mathbf{x} \in D$، أي أن $\mathbf{G}(D) \subset D$. إضافة إلى ذلك، فإن مصفوفة جاكوبي للدالة $\mathbf{G}$ تكون بالشكل:

$$\mathbf{J}_G(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{4x_2^{3/4}} \\ \dfrac{1}{4\sqrt{(1+x_1)/2}} & 0 \end{bmatrix}$$

ومنه يمكن ملاحظة أن:

$$\max_{x_2 \in [0.5,1.5]} \left| \frac{1}{4x_2^{3/4}} \right| \approx 0.42045 \quad \text{و} \quad \max_{x_1 \in [0.25,1]} \left| \frac{1}{4\sqrt{(1+x_1)/2}} \right| \approx 0.31623 \text{،}$$

وبالتالي فإنه يكون لدينا:

$$\max_{\mathbf{x} \in D} \| \mathbf{J}_G(\mathbf{x}) \|_\infty = 0.42045 < 1$$

لاحظ أن $\lambda = 0.42045$. بناء على ذلك فإن شروط نظرية (٧,١) تكون متحققة، إذن تتقارب الصيغة التكرارية إلى الحل $\mathbf{r} = [1,1]^T$ لأي اختيار ابتدائي $\mathbf{x}^{(0)} \in D$.

الآن ابتداء من التقريب الابتدائي $\mathbf{x}^{(0)} = [1.3,1.5]^T$ (والذي ينتمي للمجموعة D) تم استخدام الصيغة التكرارية المعرّفة بالمعادلة (7.17) لحساب حلولاً

تقريبية للنظام غير الخطي (7.16) حيث حصلنا على النتائج العددية المدرجة في الجدول رقم (٧,١). نشير هنا إلى أننا استخدمنا شرط الوقوف (7.11) وذلك بوضع $\varepsilon = 5\times10^{-4}$ لإيقاف العمليات الحسابية.

الجدول رقم (٧,١). النتائج العددية للمثال (٧,٣).

k	x_1	x_2	$\lvert f_1 \rvert$	$\lvert f_2 \rvert$
0	1.300000	1.500000	2.200000	1.356100
1	1.106682	1.072381	0.193318	0.427619
2	1.017624	1.026324	0.089058	0.046057
3	1.006517	1.004396	0.011107	0.021928
4	1.001097	1.001628	0.005419	0.002768
5	1.000407	1.000274	0.000691	0.001352
6	1.000069	1.000102	0.000338	0.000173

من ناحية أخرى، يمكن استخدام المتباينة (7.15) لحساب حداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب $\mathbf{x}^{(6)}$ حيث حصلنا على:

$$\begin{aligned}\| \mathbf{x}^{(6)} - \mathbf{r} \|_\infty &\le \frac{\lambda^6}{1-\lambda} \| \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)} \|_\infty \\ &\le \frac{(0.42045)^6}{1-0.42045}(0.427619) = 0.004076\end{aligned}$$

نشير هنا إلى أن الحل المضبوط هو $\mathbf{r} = [1,1]^t$ وبالتالي فإن الخطأ المضبوط المتعلق بالتقريب $\mathbf{x}^{(6)}$ هو $\| \mathbf{x}^{(6)} - \mathbf{r} \|_\infty \approx 0.000102$ وهو أقل من الحد الأعلى للخطأ الذي تم حسابه كما هو متوقع.

(٧,٢) طريقة نيوتن
The Newton's Method

نحن نعلم أن الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن لحل المعادلة غير الخطية ذات المتغير الواحد $f(x)=0$ يمكن كتابتها بالشكل $x_{n+1}=g(x_n)$، من أجل $n\geq 0$ حيث إن $g(x)=x-f(x)/f'(x)$. يمكن استنتاج طريقة نيوتن لحل نظام المعادلات غير الخطية (7.3) باعتبارها طريقة تكرارية كما يلي:

نلاحظ أولاً أن المعادلة (7.3) يمكن كتابتها بالشكل:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x})=\mathbf{x}+\mathbf{A}\mathbf{F}(\mathbf{x}) \tag{7.20}$$

حيث إن $\mathbf{A}$ مصفوفة غير شاذة مناسبة من النوع $N\times N$. الصيغة التكرارية المرافقة لهذه المعادلة يمكن كتابتها بالشكل:

$$\mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k)})=\mathbf{x}^{(k)}+\mathbf{A}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \tag{7.21}$$

من أجل $k\geq 0$. الآن من المعادلة (7.20) نستطيع إثبات أن:

$$\mathbf{J}_G(\mathbf{x})=\mathbf{I}+\mathbf{A}\mathbf{J}_F(\mathbf{x}) \tag{7.22}$$

حيث إن $\mathbf{I}$ مصفوفة الوحدة من النوع $N\times N$، $\mathbf{J}_G(\mathbf{x})$ كما هي معرفة سابقاً و $\mathbf{J}_F(\mathbf{x})$ مصفوفة جاكوبي للدالة $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ومعرفّة بالتالي:

$$\mathbf{J}_F(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{bmatrix} \tag{7.23}$$

من النظرية (٧,٢) نلاحظ أنه من أجل التقارب يجب أن يكون لدينا $\| \mathbf{J}_G(\mathbf{x}) \|_\infty \leq 1$، وهذا يؤدي إلى أن $\mathbf{A} \approx -[\mathbf{J}_F(\mathbf{r})]^{-1}$. ولكن بما أن الحل $\mathbf{r}$ عادة لا يكون معلوم فإنه من المناسب وضع $\mathbf{A} = -[\mathbf{J}_F(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1}$ في المعادلة (7.20) لنحصل على الصيغة التكرارية:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - [\mathbf{J}_F(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \tag{7.24}$$

من أجل $k \geq 0$، وهي الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن لحل النظام غير الخطي (7.1). ابتداء من التقريب الابتدائي $\mathbf{x}^{(0)}$ فإنه يتم استخدام الصيغة التكرارية (7.24) لحساب عناصر المتتالية $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_0^\infty$ والتي نأمل أن تتقارب إلى الحل $\mathbf{r}$.

نشير هنا إلى أنه يوجد هناك عدة أساليب لاستنتاج طريقة نيوتن، أحدها استخدام نظرية تايلور ذات الأبعاد المتعددة وهو شبيه بالأسلوب الذي استخدمناه لاستنتاج طريقة نيوتن لحل المعادلات غير الخطية ذات المتغير الواحد.

في الواقع، تعتبر طريقة نيوتن حالة خاصة من طريقة تكرار النقطة الثابتة حيث إنه يمكن كتابة صيغتها التكرارية بالشكل (7.8) حيث إن:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - [\mathbf{J}_F(\mathbf{x})]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \tag{7.25}$$

تتضمن النظرية (٧,٣) أنه بالنسبة للخيار المعرّف في المعادلة (7.25) يكون معدل تقارب الصيغة التكرارية (7.8) تربيعي.

نظرية (٧,٣)

لتكن $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = [g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \ldots, g_N(\mathbf{x})]^T$ دالة من $\Re^N$ إلى $\Re^N$، وأن $\mathbf{r}$ نقطة ثابتة لهذه الدالة. ولنعرّف المنطقة:

$$R_\delta = \{\mathbf{x} \mid \| \mathbf{x} - \mathbf{r} \| < \delta\}$$

إذا وُجد العددين $\delta > 0$ و $M \geq 0$ بحيث إن:

أ) التفاضلات الجزئية $\frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ من أجل $i, j = 1,2,\ldots,N$ تكون متصلة لكل $\mathbf{x} \in R_\delta$.

ب) $|\frac{\partial^2 g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_k}| \leq M$ من أجل $i, j, k = 1,2,\ldots,N$ و $\mathbf{x} \in R_\delta$.

جـ) $\frac{\partial g_i(\mathbf{r})}{\partial x_j} = 0$ من أجل $i, j = 1,2,\ldots,N$.

فإنه يوجد $\hat{\delta} \leq \delta$ بحيث إن متتالية المتجهات المكوّنة باستخدام الصيغة التكرارية المعرّفة بالعلاقتين (7.8) و (7.25) تتقارب تربيعياً إلى النقطة الثابتة $\mathbf{r}$ لأي اختيار ابتدائي $\mathbf{x}^{(0)} \in R_\delta$. إضافة إلى ذلك، يكون لدينا:

$$\| \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{r} \|_\infty \leq \frac{1}{2} N^2 M \| \mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{r} \|_\infty^2 \qquad (7.26)$$

من أجل $k \geq 1$.

يتضح من النظرية (٧,٣) أنه إذا كانت الدالة $\mathbf{G(x)}$ تمثل طريقة نيوتن، فإنه يمكن تحقق فرضيات النظرية في منطقة مناسبة R_δ. بناء عليه، فإن ذلك يعني أن معدل التقارب لطريقة نيوتن لحل أنظمة المعادلات الخطية يكون تربيعياً.

نلاحظ من الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن أنه يجب حساب معكوس المصفوفة $\mathbf{J}_F(\mathbf{x}^{(k)})$ عند كل تكرار k، وفي ذلك جهد حسابي كبير جداً. ولكن عملياً لا يتم حساب هذا المعكوس عند كل تكرار، حيث إنه بوضع $\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$ تصبح الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن بالشكل:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_F(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{y}^{(k)} &= -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{y}^{(k)} \end{aligned} \qquad (7.27)$$

من أجل $k \geq 0$. بناء عليه، فإنه بدلاً من حساب معكوس المصفوفة عند كل تكرار يتم حل نظاماً خطياً لحساب المتجه $\mathbf{y}^{(k)}$. المثال التالي يستعرض كيفية استخدام طريقة نيوتن كما هي معرفة بصيغتها التكرارية، انظر الخوارزمية (٧,٢).

مثال (٧,٤)

نريد استخدام طريقة نيوتن لحل النظام غير الخطي:

$$x_1 - 2x_2^2 + 1 = 0$$
$$x_1^4 - x_2 = 0$$

وذلك بوضع $\mathbf{x}^{(0)} = [1.3,1.5]^T$. بداية بوضع $f_1(\mathbf{x}) = x_1 - 2x_2^2 + 1$ و $f_2(\mathbf{x}) = x_1^4 - x_2$ تكون مصفوفة جاكوبي $\mathbf{J}_F(\mathbf{x})$ بالشكل:

$$\mathbf{J}_F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & -4x_2 \\ 4x_1^3 & -1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن لهذه المسألة تأخذ الشكل:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4x_2^{(k)} \\ 4(x_2^{(k)})^3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(k)} \\ y_2^{(k)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x_1^{(k)} - 2(x_2^{(k)})^2 + 1 \\ (x_1^{(k)})^4 - x_2^{(k)} \end{bmatrix}, \qquad k \geq 0$$

وبوضع $k = 0$ و $\mathbf{x}^{(0)} = [1.3,1.5]^T$ يكون لدينا:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4(1.5) \\ 4(1.3)^3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1.3 - 2(1.5)^2 + 1 \\ (1.3)^4 - 1.5 \end{bmatrix}$$

ومنه نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 8.788 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -2.2 \\ 1.3561 \end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة الحذف الجاوسي حصلنا على $\mathbf{y}^{(0)} = [-0.199826,-0.399971]^T$

وبالتالي يكون لدينا:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{y}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.100174 \\ 1.100029 \end{bmatrix}$$

وهكذا يمكن تكرار ذلك حيث حصلنا على النتائج العددية الموضحة في الجدول رقم (٧,٢). نذكر هنا أننا أوقفنا الحسابات عندما تحقق الشرط $\| \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \| \le 5\times10^{-6}$.

الجدول رقم (٧,٢). النتائج العددية للمثال (٧,٤).

k	x_1	x_2	$\|f_1\|$	$\|f_2\|$
0	1.300000	1.500000	2.200000	1.356100
1	1.100174	1.100029	0.319954	0.399971
2	1.014336	1.007806	0.017010	0.050783
3	1.000328	1.000112	0.000120	0.001201
4	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000

خوارزمية (٧,٢): طريقة نيوتن

تستخدم هذه الخوارزمية طريقة نيوتن لحل نظاماً من المعادلات غير الخطية $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. هنا $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)}$ الحل الابتدائي و $\mathbf{r}$ الحل العددي المحسوب، eps تمثل دقة الحل العددي و M هو العدد الأقصى للتكرارات.

الخطوة ١ : أدخل قيم N، $\mathbf{x}$، eps و M.

الخطوة ٢ : ضع $k = 0$

الخطوة ٣ : طالما $k \le M$ اعمل الخطوات ٤ – ٧

الخطوة ٤ : احسب المتجه $\mathbf{F}(\mathbf{x})$

الخطوة ٥ : احسب المصفوفة $\mathbf{J}(\mathbf{x})$

الخطوة ٦ : استخدم الخوارزمية (٣,١) لحل النظام الخطي $\mathbf{J(x)y = -F(x)}$.

الخطوة ٧ : ضع $\mathbf{r = x + y}$

الخطوة ٨ : إذا كان $\| \mathbf{F(r)} \| \le eps$ ، اطبع الحل العددي $\mathbf{r}$ ؛ قف.

الخطوة ٩ : ضع $\mathbf{x = r}$

الخطوة ١٠: ضع $k = k + 1$

الخطوة ١١: اطبع " لم يتم الحصول على الحل العددي المطلوب بعد M تكرار".

(٧,٣) طرائق شبه نيوتن
Quasi Newton Methods

تعد طريقة نيوتن من أشهر الطرائق العددية المستخدمة لحل أنظمة المعادلات غير الخطية. وبالرغم من شهرتها إلا أنها تعاني من بعض السلبيات والتي قد يكون من أبرزها حساب مصفوفة جاكوبي عند كل تكرار. وهذا يعني أنه يجب إيجاد قيم تفاضلات جزئية عددها N^2 عند كل تكرار k. إضافة إلى ما سبق، فإن حساب الطرف الأيمن للنظام الخطي $\mathbf{J}_F(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{y}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$ يتطلب إيجاد قيم دوال عددها N ، كما أننا نحتاج إلى عمليات حسابية عددها $O(N^3)$ لحل هذا النظام و يعتبر هذا مكلف (حسابياً) حتى لو كانت قيمة N ليست كبيرة والدوال f_i ليست معقدة التركيب.

يوجد العديد من التعديلات التي تم إجراءها على طريقة نيوتن ولكن عادة ما يؤدي ذلك إلى تقارب بطيء مقارنة بمعدل تقارب طريقة نيوتن. أي أن معدل تقارب الصيغ المعدّلة أقل من تربيعي. نستعرض فيما يلي طريقتين من طرائق شبه نيوتن ونترك أخرتين للمناقشة في التمارين.

١ – طريقة نيوتن بالفرق المنتهي (Finite Difference Newton Method)

نعلم أنه هناك حالات لا تكون فيها التفاضلات الجزئية للدوال f_i بالنسبة للمتغيرات x_j ، $i, j = 1,2,\ldots,N$ عند التكرار k لطريقة نيوتن متوفرة أو يصعب حسابها ، في مثل هذه الحالات يمكن استخدام التقريب:

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_j} \approx \frac{1}{h}[f_i(\mathbf{x}^{(k)} + h\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{x}^{(k)})] \tag{7.28}$$

حيث إن $\mathbf{e}_j$ متجه ذو البعد N تكون جميع عناصره أصفاراً ما عدا العنصر j فإنه يكون مساوياً للواحد و h عدد موجب صغير. وبالتالي فإنه عند التكرار k لطريقة نيوتن يتم استبدال مصفوفة جاكوبيان $\mathbf{J}_F(\mathbf{x}^{(k)})$ بالمصفوفة $\mathbf{A}_F(\mathbf{x}^{(k)}) = (a_{ij})$ ، حيث إن:

$$a_{ij} = \frac{1}{h}[f_i(\mathbf{x}^{(k)} + h\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{x}^{(k)})]$$

من أجل $i, j = 1,2,\ldots,N$. وتصبح الصيغة التكرارية في هذه الحالة بالشكل:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - [\mathbf{A}_F(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \tag{7.29}$$

وبما أن هذه الصيغة تتطلب حساب معكوس مصفوفة عند كل تكرار فإننا نكتبها بالشكل المساوي:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_F(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{y}^{(k)} &= -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{y}^{(k)} \end{aligned} \tag{7.30}$$

من أجل $k \geq 0$. والتي تتطلب فقط حل نظاماً خطياً عند كل تكرار. المعادلة (7.30) هي الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن بالفرق المنتهي. نشير هنا إلى أنه يمكن إثبات أن معدل التقارب لهذه الطريقة يكون خطياً، خطياً مطوراً أو تربيعياً. يمكن للقارئ المهتم أن يراجع كتاب Dennis and Schnabel صفحة ٩٥.

مثال (٧,٥)

هنا نريد استخدام الصيغة التكرارية (7.30) لحل النظام غير الخطي:

$$x_1 - x_2^2 + 1 = 0$$
$$x_1^3 - x_2 = 0$$

وذلك بوضع $h = 0.01$ و $\mathbf{x}^{(0)} = [1.5, 1.5]^T$. سوف نحسب حلا عددياً بدقة 5×10^{-6}.

بداية بما أن $f_1(x_1, x_2) = x_1 - x_2^2 + 1$ ، $f_2(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2$ ، $\mathbf{e}_1 = [1,0]^T$ و $\mathbf{e}_2 = [0,1]^T$ فإنه عندما $k = 0$ يكون لدينا:

$$\mathbf{A}_F(\mathbf{x}^{(0)})\mathbf{y}^{(0)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$$

حيث إن:

$$a_{11} = \frac{1}{0.01}[f_1(\mathbf{x}^{(0)} + 0.01\mathbf{e}_1) - f_1(\mathbf{x}^{(0)})] = \frac{1}{0.01}[(1.51 - (1.5)^2 + 1 - 1.5 + (1.5)^2 - 1] = 1$$

$$a_{12} = \frac{1}{0.01}[f_1(\mathbf{x}^{(0)} + 0.01\mathbf{e}_2) - f_1(\mathbf{x}^{(0)})] = \frac{1}{0.01}[1.5 - (1.51)^2 + 1 - 1.5 + (1.5)^2 - 1] = -3.01$$

$$a_{21} = \frac{1}{0.01}[f_2(\mathbf{x}^{(0)} + 0.01\mathbf{e}_1) - f_2(\mathbf{x}^{(0)})] = \frac{1}{0.01}[(1.51)^3 - 1.5 - (1.5)^3 + 1.5] = 6.7951$$

$$a_{22} = \frac{1}{0.01}[f_2(\mathbf{x}^{(0)} + 0.01\mathbf{e}_2) - f_2(\mathbf{x}^{(0)})] = \frac{1}{0.01}[(1.5)^3 - 1.51 - (1.5)^3 + 1.5] = -1$$

و

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0.250000 \\ 1.875000 \end{bmatrix} \quad ، \quad \mathbf{A}_F(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1 & -3.01 \\ 6.7951 & -1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي يكون لدينا النظام الخطي:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3.01 \\ 6.7951 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0.250000 \\ 1.875000 \end{bmatrix}$$

والذي بحله نحصل على $\mathbf{y}^{(0)} = [-0.277267, -0.009059]^T$ وعلى التقريب الأول:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{y}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.222733 \\ 1.490941 \end{bmatrix}$$

بالمثل عندما $k = 1$ يكون لدينا:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} -0.000177 \\ 0.337136 \end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{A}_F(\mathbf{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 1 & -2.991882 \\ 4.522 & -1 \end{bmatrix}$$

وبحل النظام الخطي $\mathbf{A}_F(\mathbf{x}^{(1)})\mathbf{y}^{(1)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})$ حصلنا على $\mathbf{y}^{(1)} = [-0.080517, -0.026909]^T$. ومنه نحسب التقريب الثاني:

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{y}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.142215 \\ 1.463972 \end{bmatrix}$$

وهكذا يمكن تكرار ذلك حيث حصلنا على النتائج العددية الموضحة في الجدول رقم (٧,٣). نذكر هنا أننا أوقفنا الحسابات عندما تحقق الشرط $\| \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \| \leq 5\times10^{-6}$.

الجدول رقم (٧,٣). النتائج العددية للمثال (٧,٥).

k	x_1	x_2	$\lvert f_1 \rvert$	$\lvert f_2 \rvert$
0	1.500000	1.500000	0.250000	1.875000
1	1.222733	1.490941	0.000177	0.337136
2	1.142215	1.463972	0.000997	0.026227
3	1.134852	1.461126	0.000037	0.000438
4	1.134721	1.461054	0.000043	0.000005
5	1.134724	1.461069	0.000000	0.000000

نذكر هنا أن الحل المضبوط لهذه المسألة هو $\mathbf{r} = [1.13472414, 1.46106952]^T$ (صحيح إلى تسعة أرقام عشرية معنوية) ومن الجدول رقم (٧,٣) يتضح أن متتالية المتجهات المحسوبة $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_0^\infty$ تتقارب إلى الحل.

٢- طريقة برويدن (Broyden's Method)

تعتبر طريقة برويدن من أشهر طرائق شبه نيوتن لحل نظام المعادلات غير الخطية (7.3)، وهي شبيهه لطريقة القاطع في حالة المعادلة غير الخطية ذات المتغير الواحد. يمكن عرض أسلوب برويدن كما يلي:

لنفترض أننا بدأنا من التقريب الابتدائي $\mathbf{x}^{(0)}$ وأننا حصلنا على الحل التقريبي $\mathbf{x}^{(1)}$ للنظام غير الخطي (7.31) باستخدام طريقة نيوتن. لنضع:

$$\mathbf{J}_F(\mathbf{x}^{(1)})(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) \qquad (7.31)$$

عند هذه المرحلة، بدلاً من حساب مصفوفة جاكوبي $\mathbf{J}_F(\mathbf{x}^{(1)})$ فإن طريقة برويدن توجد المصفوفة $\mathbf{A}_1$ والتي تحقق المعادلة:

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) \qquad (7.32)$$

نشير هنا إلى أن المعادلة (7.32) لا تُعرّف مصفوفة وحيدة $\mathbf{A}_1$. ولكن بوضع $\mathbf{A}_1\mathbf{u} = \mathbf{A}_0\mathbf{u}$ من أجل كل متجه $\mathbf{u}$ يحقق العلاقة $(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)})^T\mathbf{u} = 0$، حيث إن $\mathbf{A}_0 = \mathbf{J}_F(\mathbf{x}^{(0)})$ فإنه يمكن إثبات أن:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_0 + \frac{\mathbf{w}_1 - \mathbf{A}_0\mathbf{s}_1}{\|\mathbf{s}_1\|_2^2}\mathbf{s}_1^T \qquad (7.33)$$

حيث إن $\mathbf{s}_1 = \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}$ و $\mathbf{w}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$. وبمعرفة $\mathbf{A}_1$ يمكن إيجاد المتجه $\mathbf{s}_2$ وذلك بحل النظام الخطي $\mathbf{A}_1\mathbf{s}_2 = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})$ و من ثم يتم حساب التقريب الثاني $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{s}_2$.

بشكل عام، يمكن كتابة:

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_{k-1} + \frac{\mathbf{w}_k - \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{s}_k}{\|\mathbf{s}_k\|_2^2}\mathbf{s}_k^T \tag{7.34}$$

من أجل $k \geq 1$، حيث إن $\mathbf{s}_k = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}$ و $\mathbf{w}_k = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k-1)})$.

وبالتالي فإنه يمكن حساب التكرار التالي $\mathbf{x}^{(k+1)}$ باستخدام الصيغة التكرارية:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k\mathbf{s}_{k+1} &= -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}_{k+1} \end{aligned} \tag{7.35}$$

من الملاحظ أن هذه الصيغة تتطلب حساب $\mathbf{A}_k^{-1}$ عند كل تكرار. وبالتالي ليس لها أفضلية على طريقة نيوتن. للتغلب على مشكلة وجود معكوس المصفوفة نستعرض المناقشة التالية والتي تستند على ما يُعرف باسم صيغة شيرمان-موريسون:

لتكن $\mathbf{A}$ مصفوفة غير شاذة والمتجهين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ يحققان الشرط $\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} \neq -1$ فإن $(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)$ مصفوفة غير شاذة وأن:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}} \tag{7.36}$$

يمكن إثبات أن الطرف الأيمن للمعادلة (7.36) هو عبارة عن معكوس المصفوفة $(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)$. لإثبات ذلك لنجعل:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}$$

والذي يمثل الطرف الأيمن للمعادلة (7.36). إذن يكون لدينا:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)\mathbf{B} &= (\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)[\mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}] \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}} \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{u}(1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u})\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}} \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \end{aligned}$$

وبنفس الأسلوب يمكن إثبات أن $\mathbf{B}(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) = \mathbf{I}$.

الآن بالنسبة لطريقة برويدن، إذا وضعنا $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{w}_k - \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{s}_k}{\| \mathbf{s}_k \|_2^2}$ و $\mathbf{v} = \mathbf{s}_k$ في المعادلة (7.34) فإنه يكون لدينا $\mathbf{A}_k = \mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$. ومن ثم يمكن إثبات أن:

$$\mathbf{A}_k^{-1} = \mathbf{A}_{k-1}^{-1} + \frac{(\mathbf{s}_k - \mathbf{A}_{k-1}^{-1}\mathbf{w}_k)\mathbf{s}_k^T\mathbf{A}_{k-1}^{-1}}{\mathbf{s}_k^T\mathbf{A}_{k-1}^{-1}\mathbf{w}_k} \tag{7.37}$$

من أجل $k \geq 1$. انظر الخوارزمية (٧,٣).

خوارزمية (٧,٣): طريقة برويدن

تستخدم هذه الخوارزمية طريقة برويدن لحل نظاماً من المعادلات غير الخطية $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. هنا الحل الابتدائي $\mathbf{x}$ و $\mathbf{r}$ الحل العددي المحسوب، eps تمثل دقة الحل العددي و M هو العدد الأقصى للتكرارات.

الخطوة ١ : أدخل قيم N ، $\mathbf{x}$ ، eps و M .

الخطوة ٢ : ضع $k = 0$

الخطوة ٣ : احسب $\mathbf{F}(\mathbf{x})$

الخطوة ٤ : احسب المصفوفة $\mathbf{J}(\mathbf{x})$

الخطوة ٥ : ضع $\mathbf{A}_0 = \mathbf{J}(\mathbf{x})$

الخطوة ٦ : احسب المعكوس $\mathbf{A}_0^{-1}$

الخطوة ٧ : احسب $\mathbf{s} = -\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x})$

الخطوة ٨ : احسب $\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$

الخطوة ٩ : طالما $k \leq M$ اعمل الخطوات ١٠ – ١٧

الخطوة ١٠ : احسب

$$\mathbf{A}_1^{-1} = \mathbf{A}_0^{-1} + \frac{(\mathbf{s} - \mathbf{A}_0^{-1}(\mathbf{F}(\mathbf{r}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}))\mathbf{s}^T\mathbf{A}_0}{\mathbf{s}^T\mathbf{A}_0^{-1}(\mathbf{F}(\mathbf{r}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}))}$$

الخطوة ١١: احسب $\mathbf{s} = -\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{r})$

الخطوة ١٢: ضع $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{r})$

الخطوة١٣: احسب $\mathbf{r} = \mathbf{r} + \mathbf{s}$

الخطوة١٤: احسب $\mathbf{F}(\mathbf{r})$

الخطوة ١٥: إذا كان $\|\mathbf{F}(\mathbf{r})\| \le eps$، أطبع الحل العددي $\mathbf{r}$؛ قف.

الخطوة ١٦: ضع $\mathbf{A}_0^{-1} = \mathbf{A}_1^{-1}$

الخطوة ١٧: ضع $k = k + 1$

الخطوة ١٨: اطبع " لم يتم الحصول على الحل العددي المطلوب بعد M تكرار".

نشير هنا إلى أن الخطوة ١٣ والتي تتضمن شرط إيقاف الحسابات يمكن استبدال شرط الوقوف $\|\mathbf{F}(\mathbf{r})\| \le eps$ بأحد الشرطين $\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\| \le eps$ أو $\dfrac{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|}{\|\mathbf{r}\|} \le eps$.

مثال (٧,٦)

هنا سوف نستخدم طريقة برويدن لحل النظام غير الخطي:

$$x_1 - x_2^2 + 1 = 0$$
$$x_1^3 - x_2 = 0$$

وذلك ابتداء من التقريب $\mathbf{x}^{(0)} = [1.5, 1.5]^T$.

بداية من المثال (٧,٥) نعلم أن:

$$\mathbf{J}_F(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6.75 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0.250000 \\ 1.875000 \end{bmatrix}$$

وبوضع $\mathbf{A}_0 = \mathbf{J}_F(\mathbf{x}^{(0)})$ فإنه يكون لدينا:

$$\mathbf{A}_0^{-1} = \begin{bmatrix} -0.051948 & 0.155844 \\ -0.350649 & 0.051948 \end{bmatrix}$$

بناء عليه يمكن حساب:

$$\mathbf{s}_1 = -\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) = -\begin{bmatrix} 0.279221 \\ 0.009740 \end{bmatrix}$$

ومنه نحصل على:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 1.220779 \\ 1.490260 \end{bmatrix}$$

وبما أن $\mathbf{s}_1^T \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{w}_1 = 0.063572$ فإنه يمكن استخدام العلاقة (7.37) عندما $k = 1$ للحصول على:

$$\mathbf{A}_1^{-1} = \begin{bmatrix} -0.066406 & 0.191360 \\ -0.355478 & 0.063808 \end{bmatrix}$$

(لاحظ أن $\mathbf{w}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$). وبالتالي يكون لدينا

$$\mathbf{s}_2 = -\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) = -\begin{bmatrix} 0.062977 \\ 0.021031 \end{bmatrix}$$

ومنه نحصل على:

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} 1.157802 \\ 1.469229 \end{bmatrix}$$

وهكذا، حصلنا على النتائج العددية الموجودة في الجدول رقم (٧,٤). نود الإشارة هنا إلى أننا أوقفنا الحسابات عندما تحقق الشرط $\| \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \| \le 5\times10^{-6}$.

كما هو الحال بالنسبة للمثال (٧,٥) فإنه يتضح من النتائج العددية الموجودة في الجدول رقم (٧,٤) أن الطريقة تحسب متتالية متجهات تتقارب إلى الحل المضبوط. وبمقارنة النتائج العددية الموجودة في الجدولين رقمي (٧,٣) و(٧,٤) نلاحظ أن الخطأ المضبوط عند التكرار الخامس هو $\| \mathbf{x}^{(5)} - \mathbf{r} \|_\infty \approx O(10^{-7})$ لكلا الطريقتين.

يمكن للقارئ مقارنة نتائج المثالين (٧,٥) و (٧,٦) مع تلك التي يحصل عليها بحل التمرينين ٤ و ح٢ و ذلك باستخدام طريقة نيوتن.

الجدول رقم (٧,٤). النتائج العددية للمثال (٧,٦).

k	x_1	x_2	$\|f_1\|$	$\|f_2\|$
0	1.500000	1.500000	0.250000	1.875000
1	1.220780	1.490261	0.000095	0.329070
2	1.157802	1.469229	0.000830	0.082370
3	1.136492	1.461752	0.000227	0.006154
4	1.134755	1.461083	0.000008	0.000105
5	1.134724	1.461069	0.000000	0.000001

(٧,٤) تمارين

Exercises

١ - اعتبر استخدام طريقة تكرار النقطة الثابتة لحل النظام غير الخطي:

$$x_1 - x_2^2 + 1 = 0$$
$$x_1^3 - x_2 = 0$$

والمعرف على المجموعة $D = \{[x_1, x_2]^T \mid 1 \le x_1 \le 2,\ 1 \le x_2 \le 2\}$.

وذلك باستخدام الصيغتين التكراريتين:

أ)
$$g_1(\mathbf{x}) = x_2^2 - 1$$
$$g_2(\mathbf{x}) = x_1^3$$

ب)
$$g_1(\mathbf{x}) = x_2^{1/3}$$
$$g_2(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1 + 1}$$

أي الصيغتين أفضل. ولماذا؟ ثم استخدم الصيغة الأفضل لحساب التقريب الثاني وذلك ابتداء من التقريب الابتدائي $\mathbf{x}^{(0)} = [1.5,1.5]^T$. احسب الخطأ المضبوط $\|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{r}\|_\infty$ حيث إن $\mathbf{r} = [1.13472414,1.46106952]^T$ هو الحل المضبوط صحيح حتى تسعة أرقام عشرية معنوية ، ثم احسب حداً أعلى للخطأ المتعلق للحل العددي الذي تحصل عليه.

٢- ليكن لدينا النظام غير الخطي:

$$
\begin{aligned}
2x_1 - e^{x_2} &= -1 \\
2x_1^2 + e^{-x_2} &= 4
\end{aligned}
$$

المعرف على المجموعة $D = \{(x_1, x_2) \mid 1 \le x_1 \le 2,\ 1 \le x_2 \le 2\}$.

أ) أوجد صيغة تكرارية مناسبة لحل هذا النظام.

ب) ابتداء من التقريب الابتدائي $\mathbf{x}^{(0)} = [1.5,1.5]^T$، استخدم الصيغة التكرارية التي أوجدتها في الفقرة (أ) لحساب التكرار الثاني.

جـ) احسب حداً أعلى لخطأ المتعلق بالتقريب الذي تحصل عليه في الفقرة (ب).

د) احسب عدد التكرارات اللازمة، K، للحصول على حل تقريبي بدقة 5×10^{-5}.

٣- استخدم طريقة تكرار النقطة الثابتة لحل النظام غير الخطي:

$$
\begin{aligned}
5x_1 - \sin x_2 + e^{-x_3} - 1 &= 0 \\
x_1^2 - 16x_2^2 + \cos x_3 + 1 &= 0 \\
e^{-x_1 x_2} - 15x_3 \qquad &= 0
\end{aligned}
$$

والمعرف على المجموعة $D = \{[x_1, x_2, x_3]^T \mid -1 \le x_i \le 1,\ i = 1,2,3\}$.

أ) أوجد صيغة تكرارية مناسبة.

ب) استخدم الصيغة التكرارية التـي أوجـدتها في الفقـرة (أ) لحـساب التكـرار الثاني وذلك بوضع $\mathbf{x}^{(0)} = [0,0,0]^T$.

جـ) احسب حداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب $\mathbf{x}^{(4)}$.

٤- استخدم طريقة نيوتن لحل النظام غير الخطي:

$$x_1 - x_2^2 + 1 = 0$$
$$x_1^3 - x_2 = 0$$

وذلك بوضع $\mathbf{x}^{(0)} = [1.5,1.5]^T$ لحساب التقريب الثاني، احـسب الخطـأ المـضبوط. قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التـي حـصلت عليهـا أثنـاء حـل التمرين ١ . ماذا تلاحظ ؟.

٥- استخدم طريقة نيوتن لحساب التقريب الثاني لحل النظام غير الخطـي الموجـود في التمرين ٣ وذلك ابتداء من التقريب الابتدائي $\mathbf{x}^{(0)} = [0,0,0]^T$.

٦- استخدم طريقة نيوتن بالفرق المنتهي لحساب التقريب الثاني للنظام غير الخطي الموجود في المثال (٧,٤) و ذلك ابتداء من التقريب الابتدائي الموجود في المثال. قارن النتائج التي تحصل عليها هنا مع تلك الموجودة في المثال (٧,٤).

٧- استخدم طريقة نيوتن بالفرق المنتهي لحساب التقريب الثاني للنظام غير الخطي الموجود في المثال (٧,٥) و ذلك بتقريب التفاضلات الجزئية باستخدام الصيغة العددية المركزية (5.13) والموجودة في الفصل الخامس. قارن النتائج التي تحصل عليها هنا مع تلك الموجودة في المثال (٧,٥).

٨- استخدم طريقة برويدن لحل النظام غير الخطي:

$$x_1 - 2x_2^2 + 1 = 0$$
$$x_1^4 - x_2 = 0$$

وذلك ابتداء من $\mathbf{x}^{(0)} = [1.3,1.5]^T$. احسب التقريب الثاني، ثم قارن النتائج التي تحصل عليها مع تلك الموجودة في المثال (٧,٤).

٩- لعل أبسط تعديل لطريقة نيوتن هو عدم حساب مصفوفة جاكوبي عند كل تكرار وإنما حسابها عند تكرارات محدودة، يمكن وصف هذا الأسلوب كما يلي: لنفترض أنه تم حساب مصفوفة جاكوبي عند كل تكرار k، فإنه يمكن كتابة الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن بالشكل:

$$\mathbf{J}_F(\mathbf{x}^{(lk)})\mathbf{y}^{(lk+j)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(lk+j)})$$
$$\mathbf{x}^{(lk+j+1)} = \mathbf{x}^{(lk+j)} + \mathbf{y}^{(lk+j)}$$

من أجل $j = 0,1,2,\ldots,k-1$ و $l = 0,1,2,\ldots$. استخدم هذه الطريقة لحل المسألة: الموجودة في المثال (٧,٥) وذلك بحساب مصفوفة جاكوبي عند كل ثلاثة تكرارات، ثم قارن النتائج العددية التي تحصل عليها مع تلك الموجودة في المثال.

١٠- إحدى المشاكل التي تواجهنا عند استخدام طريقة نيوتن هي اختيار التقريب الابتدائي $\mathbf{x}^{(0)}$؛ حيث إن الطريقة تتطلب أن يكون هذا المتجه قريب (نسبياً) إلى الحل المضبوط $\mathbf{r}$ من أجل ضمان التقارب. الطريقة المعدّلة لطريقة نيوتن والتي تعالج هذه المشكلة يمكن طرحها كالتالي:

اعتبر طريقة نيوتن بالشكل التالي:

$$\mathbf{J}_F(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{y}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$
$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \theta\mathbf{y}^{(k)}$$

حيث إن $\theta > 0$ عدد ما. لاحظ أنه عندما تكون $\theta = 1$ فإن هذه الصيغة تصبح طريقة نيوتن وأن هذه القيمة لـ θ قد لا تكون الأفضل. بالمقابل، يمكن اختيار θ التي تُصغّر المعيار:

$$\| \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)} + \theta\mathbf{y}^{(k)}) \|_2^2 = \sum_{i=1}^{N} [f_i(\mathbf{x}^{(k)} + \theta\mathbf{y}^{(k)})]^2$$

استخدم هذه الطريقة لحل المسألة الموجودة في المثال (٧,٥). ثم قارن النتائج العددية التي تحصل عليها مع تلك الموجودة في المثال.

[**تلميح:** لحساب قيمة θ سيكون لديك عند كل تكرار كثيرة حدود بالمتغير θ، ولتكن $P(\theta)$، بالتالي يمكن حساب القيمة المطلوبة لـ θ بحل المعادلة غير الخطية $P'(\theta) = 0$ باستخدام طريقة نيوتن. لمزيد من المعلومات حول هذه الطريقة راجع كتاب Dennis and Schnabel]

تمارين الحاسب

ح١- استخدم طريقة تكرار النقطة الثابتة لحل النظام غير الخطي:

$$2x_1 - e^{x_2} = -1$$
$$2x_1^2 + e^{-x_2} = 4$$

احسب حلاً عددياً بدقة 5×10^{-5} وذلك ابتداء من $\mathbf{x}^{(0)} = [1.5,1.5]^T$.

تلميح: يمكنك استخدام الصيغة التكرارية المناسبة التي أوجدتها في التمرين ٢.

ح٢ – استخدم طريقة نيوتن لحساب حلاً عددياً بدقة 5×10^{-6} للنظام غير الخطي الموجود في التمرين ٤.

ح٣ – استخدم طريقة نيوتن بالفرق المنتهي لحساب حلاً عددياً بدقة 5×10^{-5} للنظام غير الخطي الموجود في المثال (٧,٤). قارن النتائج التي تحصل عليها مع تلك التي حصلنا عليها في المثال (٧,٤).

ح٤ – استخدم طريقة برويدن لحساب حلاً عددياً بدقة 5×10^{-5} للنظام غير الخطي الموجود في المثال (٧,٤). قارن النتائج التي تحصل عليها مع تلك التي حصلنا عليها في المثال (٧,٤).

ح٥ – استخدم طريقة تكرار النقطة الثابتة لحل النظام غير الخطي:

$$5x_1 - \sin x_2 + e^{-x_3} - 1 = 0$$
$$x_1^2 - 16x_2^2 + \cos x_3 + 1 = 0$$
$$e^{-x_1x_2} - 15x_3 = 0$$

احسب حلاً عددياً بدقة 5×10^{-5} وذلك ابتداء من $\mathbf{x}^{(0)} = [0,0,0]^T$.

تلميح: يمكنك الاستفادة من الصيغة التكرارية المناسبة التي أوجدتها في التمرين ٣.

ح٦ – استخدم طريقة نيوتن لحساب حلاً عددياً بدقة 5×10^{-5} للنظام غير الخطي:

$$2x_1 - x_2 + \frac{1}{128}(x_1 + 1.125)^3 = 0$$
$$-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} + \frac{1}{128}(x_i + 1 + \frac{1}{8}i)^3 = 0, \quad i = 2,3\ldots,6$$
$$-x_6 + 2x_7 + \frac{1}{128}(x_7 + 1.875)^3 = 0$$

وذلك بوضع $\mathbf{x}^{(0)} = [-0.1,-0.1,-0.1,-0.1,-0.1,-0.1,-0.1]^T$.