الفصل التاسع

تركيبات الحثية (التحريض) والسعة
Inductance and Capacitance Combinations

كما هو الحال مع المقاومات، فمن الممكن تخفيض دارات الملفات والمكثفات المعقدة إلى دارات مكافئة أبسط من خلال جمع المجموعات على التسلسل (التوالي) وعلى التفرع (التوازي) للعناصر المتشابهة. افترض مثلاً الدارة التالية التي تتكون من N ملف على التسلسل. ونظراً لأن نفس التيار يتدفق من خلال كل ملف، فإن هبوط الجهد على طرفي كل ملف هو $v_i = L_i \dfrac{di}{dt}$. إن تطبيق قانون كيرشوف للجهد (KVL) على هذه الدارة يعطي:

$$\begin{aligned} v_s &= v_1 + v_2 + v_3 \\ &= L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \cdots + L_N \frac{di}{dt} \\ &= \left(L_1 + L_2 + \cdots + L_N\right) \frac{di}{dt} \\ &= L_{EQ} \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

وعليه يمكن استبدال الملفات الموصولة على التسلسل (التوالي) بملف مكافئ، حيث

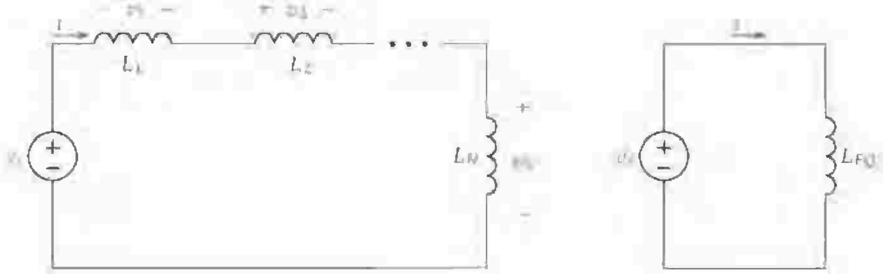
$$L_{EQ} = L_1 + L_2 + \cdots + L_N \qquad (9.1)$$

بعد ذلك خذ في الاعتبار N ملف موصول على التفرع (التوازي) كما هو مبين في الشكل رقم (٩.١). ونظراً لأن هناك نفس الجهد على طرفي كل ملف، فإن التيار المار خلال كل ملف هو $i_i = \frac{1}{L_i}\int_{t_0}^{t} v_0\, dt + i_i(t_0)$ إن تطبيق قانون كيرشوف للتيار (KCL) على العقدة العلوية من هذه الدارة يعطي:

$$i_s = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{L_i}\int_{t_0}^{t} v_0\ dt + i_i(t_0)\right]$$

$$= \left[\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_N}\right]\int_{t_0}^{t} v_0\ dt + \sum_{i=1}^{N} i_i(t_0)$$

$$= \frac{1}{L_{EQ}}\int_{t_0}^{t} v_0\ dt + i_s(t_0)$$



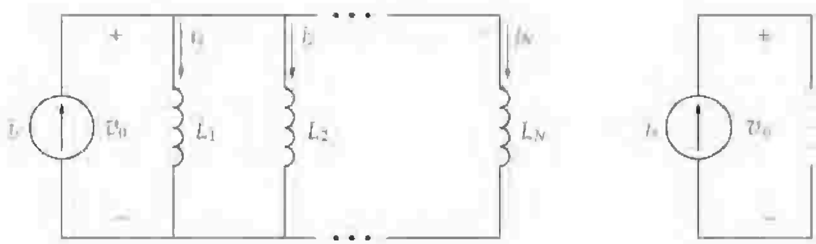
الشكل رقم (٩.١). (يسار) N ملف على التسلسل. (يمين) الدارة المكافئة للملفات على التسلسل.

وعليه، يمكن استبدال الملفات الموصولة على التفرع بملف مكافئ، حيث

$$L_{EQ} = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_N}} \qquad (٩.٢)$$

وعندما يكون هناك ملفان على التفرع، تنخفض المعادلة رقم (٩.٢) إلى:

$$L_{EQ} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \tag{٩.٣}$$

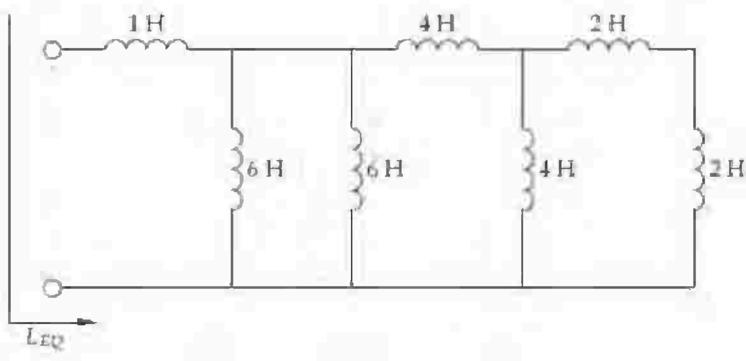


الشكل رقم (٩.٢). (يسار) N ملف على التفرع. (يمين) الدارة المكافئة للملفات على التفرع.

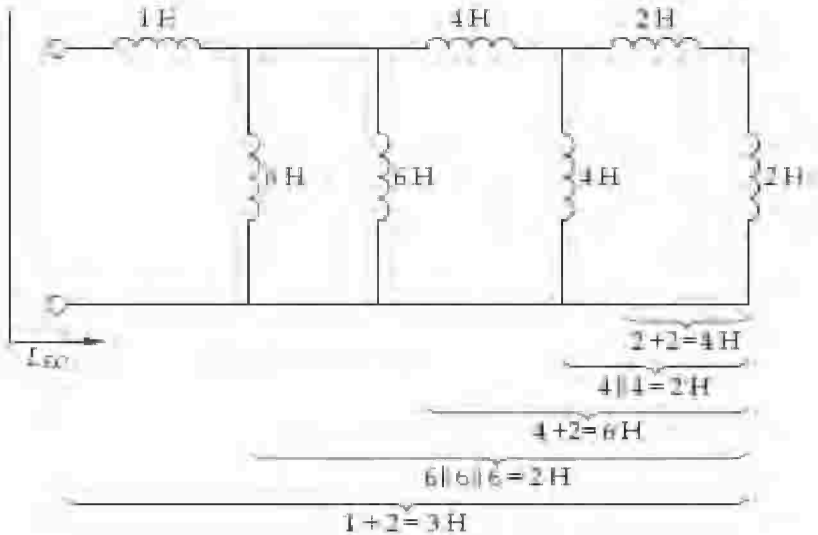
إن المعادلتين رقم (٩.١) ورقم (٩.٢) مشابهتان للنتائج التي وجدناها للمقاومات على التسلسل، وعلى التفرع، والعملية المُستخدمة لتبسيط دار المقاومات هي نفسها المُستخدمة للملفات على التسلسل وعلى التفرع.

مثال (٩.١):

المطلوب إيجاد L_{EQ} للدارة التالية.



الحل: يتم إيجاد الحثية المكافئة عن طريق تشكيل تركيبات على التسلسل وعلى التفرع من اليمين إلى اليسار حتى تنخفض إلى حثية واحدة كما هو مبين في الشكل التالي:



وبناء على ذلك فإن:

$$L_{EQ}=1+(6\|6\|(4+(4\|(2+2))))$$

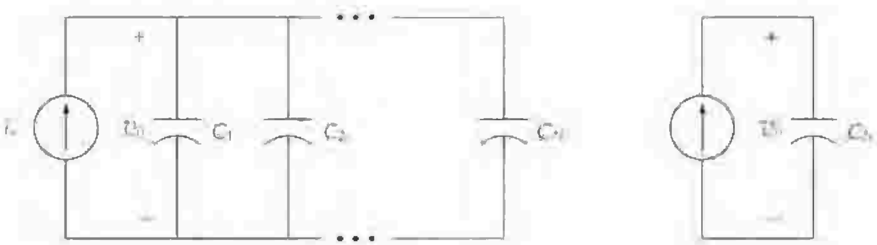
$$=1+\left(6\|6\|\left(4+\left(\frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}\right)\right)\right)$$

$$=1+\left(\frac{1}{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}\right)=1+2=3\,H$$

بعد ذلك، افترض N مكثف موصول على التفرع، كما هو مبين في الشكل رقم (٩.٣). ونظراً لأن هناك نفس الجهد على طرفي كل مكثف، فإن التيار المار خلال كل

مكثف هو $i_i = C_i \dfrac{dv_0}{dt}$. إن تطبيق قانون كيرشوف للتيار (KCL)على العقدة العلوي من هذه الدارة يعطي:

$$\begin{aligned} i_s &= C_1 \frac{dv_0}{dt} + C_2 \frac{dv_0}{dt} + \cdots + C_N \frac{dv_0}{dt} \\ &= C_{EQ} \frac{dv_0}{dt} \end{aligned}$$



الشكل رقم (٩.٣). (يسار) N مكثف على التفرع. (يمين) الدارة المكافئة للمكثفات على التفرع.

وهكذا، يمكن استبدال المكثفات الموصولة على التفرع بسعة مكافئة، حيث

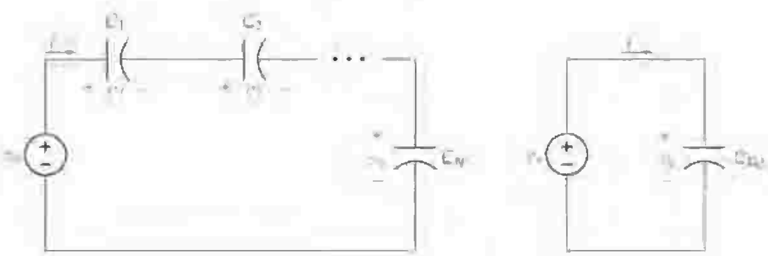
$$C_{EQ} = C_1 + C_2 + \cdots + C_N \qquad (٩.٤)$$

بعد ذلك، افترض N مكثفات موصولة على التسلسل كما هو مبين في الشكل رقم (٩.٤). ونظراً لأن نفس التيار يتدفق خلال كل مكثف، فإن الجهد على طرفي كل مكثف هو $v_i = \dfrac{1}{C_i} \int_{t_0} i\,dt + v_i(t_0)$. إن تطبيق قانون كيرشوف للجهد (KVL) حول هذه الدراة يعطي:

$$v_s = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{C_i}\int_{t_0}^{t} i\,dt + v_i(t_0)\right]$$
$$= \left[\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_N}\right]\int_{t_0}^{t} i\,dt + \sum_{i=1}^{N} v_i(t_0)$$
$$= \frac{1}{C_{EQ}}\int_{t_0}^{t} i\,dt + v_s(t_0)$$

وهكذا، يمكن استبدال المكثفات الموصولة على التسلسل بسعة مكافئة، حيث

$$C_{EQ} = \frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_N}} \qquad (٩.٥)$$



الشكل رقم (٩.٤). (يسار) N مكثف على التسلسل. (يمين) الدارة المكافئة للمكثفات على التسلسل.

وعندما يكون هناك مكثفان على التسلسل، تنخفض المعادلة رقم (٩.٥) إلى:

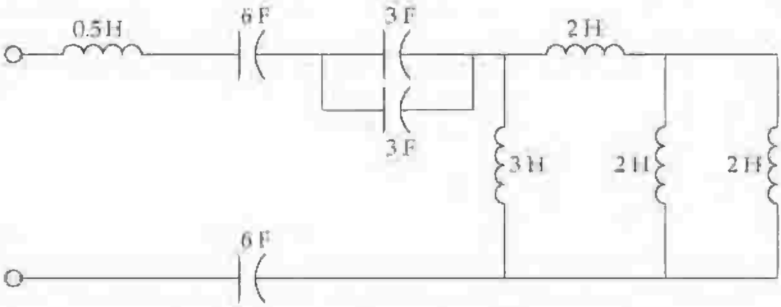
$$C_{EQ} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \qquad (٩.٦)$$

إن المعادلتين رقم (٩.٥) ورقم (٩.٦) مشابهتان للنتائج التي وجدناها للمقاومات على التفرع وعلى التسلسل، على التوالي. وهذا يعني أننا نتعامل مع

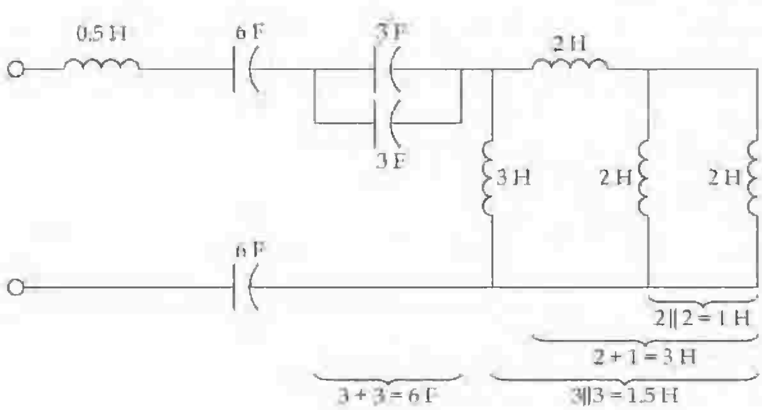
المكثفات على التفرع باستخدام تقنيات المقاومات على التسلسل، ومع المكثفات على التسلسل مثل المقاومات على التفرع.

مثال (٩.٢):

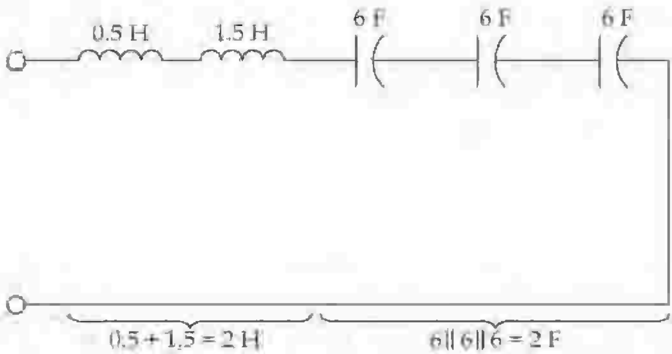
المطلوب تخفيض الدارة التالية إلى مكثف وملف وحيدين.



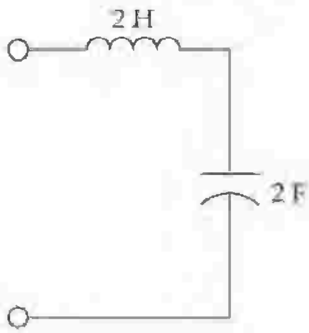
الحل: يتم إيجاد الحثية المكافئة عن طريق تشكيل تركيبات على التفرع وعلى التسلسل، من اليمين إلى اليسار، من الملفات والمكثفات حتى يقلّل التحليل الدارة إلى حثية وحيدة وسعة وحيدة. خذ في الاعتبار الملفات أولاً كما هو موضح في الشكل التالي على اليمين، والذي ينتج عنه ١.٥ هنري. ولاحظ أيضاً أن المكثفين اللذين على التفرع يساويان ٦ فاراد:



بعد ذلك نزيح الحثية المكافئة ١.٥ هنري إلى اليسار بعد المكثفات كما هو موضح في الشكل التالي. إن الملفين اللذين على التسلسل يساويان ٢ هنري، والمكثفات الثلاثة على التسلسل (تُعامل مثل المقاومات على التفرع) تساوي $\dfrac{1}{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}} = 2\,F$



والدارة النهائية المُخفَّضة مبينة في الشكل التالي.

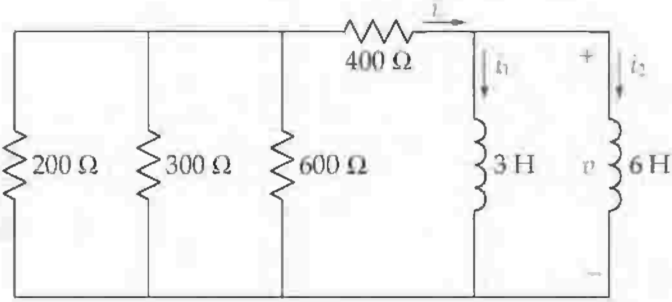


يوضح المثال التالي كيفية تبسيط دارة ومن ثم تطبيق طريقة تيار الشبكة لحل التيارات المجهولة.

مثال (٩.٣):

(أ) أوجد $i(t)$، و $i_1(t)$، و $i_2(t)$، و $v(t)$ للدارة التالية عندما $t \geq 0$ مع الأخذ في الاعتبار $i_1(0^-) = 5$ أمبير و $i(0^-) = 15$ أمبير. (ب) أوجد الطاقة الأولية المُخزَّنة في الملفات.

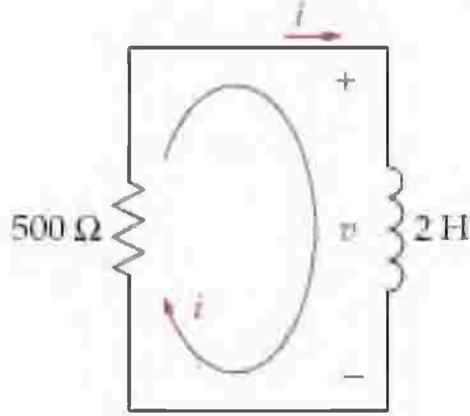
(ج) أوجد الطاقة المتبددة في المقاومات بين $t = 0$ و $t = \infty$. (د) أوجد الطاقة المحجوزة في الملفات عند $t = \infty$.



الحل: (أ) لسهولة الحل، بسِّط الدارة أولاً من خلال جمع المقاومات الثلاثة كما يلي:

$$R_{EQ} = 400 + \frac{1}{\frac{1}{200} + \frac{1}{300} + \frac{1}{600}} = 500\,\Omega$$

والملفين على النحو التالي $L_{EQ} = \frac{3\times 6}{3+6} = 2\,H$ كما هو موضح في الدارة التالية:



إننا نستخدم طريقة تيار الشبكة لإيجاد $v(t)$ على النحو التالي. تذكّر أن هبوط الجهد على طرفي ملف هو $v_L = L\frac{di}{dt}$ ، وهكذا لدينا :

$$500i + 2\frac{di}{dt} = 0$$

أو

$$\frac{di}{dt} + 250i = 0$$

إن المعادلة التفاضلية السابقة لديها معادلة مميزة

$$s + 250 = 0$$

ومن خلال الجذر $s = -250$ والحل نجد

$$i(t) = K_1 e^{-250t}\ A$$

لاحظ أن الاستجابة القسرية تساوي صفراً، لأنه لا يوجد دخل. ولأن الطاقة المخزّنة في ملف لا يمكن تغييرها بشكل لحظي، فإن

$$i_1(0^-) = i_1(0^+) = 5\ A,\ i_2(0^-) = i_2(0^+) = 15\ A$$

و

$$i(0^-) = i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^-) = 20\ A$$

لتحديد K_1 نستخدم $i(0) = 20 = K_1$. وعليه يكون حلنا $i(t) = 20e^{-250t}u(t)\ A$. ولإيجاد $i_1(t)$ ، و $i_2(t)$ فإننا نجد $v(t) = L_{EQ}\frac{di}{dt}$ ومن ثم نستخدم $i_i = \frac{1}{L_i}\int_0 v\,dt + i_i(0)$. عندما $t \geq 0$ نجد

$$v(t) = 2\frac{di}{dt} = -10000e^{-250t}\ u(t)\ V$$

و

$$i_1(t)=\frac{1}{3}\int_0^t(-10000e^{-250\lambda})\,d\lambda+5=\frac{40}{3}e^{-250\lambda}\bigg|_{\lambda=0}^{t}+5=\frac{40}{3}e^{-250t}-\frac{40}{3}+5$$
$$=\frac{40}{3}e^{-250t}-\frac{25}{3}\,A$$
$$i_2(t)=\frac{1}{6}\int_0^t(-10000e^{-250\lambda})\,d\lambda+15=\frac{40}{6}e^{-250\lambda}\bigg|_{\lambda=0}^{t}+15=\frac{20}{3}e^{-250t}-\frac{20}{3}+\frac{45}{3}$$
$$=\frac{20}{3}e^{-250t}-\frac{25}{3}\,A$$

بالطبع $i_1(t)=i_1(t)+i_2(t)=20e^{-250t}\,u(t)\,A$

(ب) من المعادلة.رقم (٧.٧)، فإن مجموع الطاقة الأولية المُخزَّنة في الملفات يساوي:

$$w_L(0)=\frac{1}{2}L_1i_1^2+\frac{1}{2}L_2i_2^2=\frac{1}{2}x3x5^2+\frac{1}{2}x6x15^2=712.5\,J$$

(ج) إن الطاقة المتبددة في المقاومات تساوي:

$$w_{R_{EQ}}=\int_0^\infty R_{EQ}i^2(t)\,dt=\int_0^\infty 500x(20e^{-250t})^2\,dt$$
$$=\int_0^\infty 500\times400e^{-500t}\,dt\;=-400e^{-500t}\bigg|_0^\infty=400\,J$$

(د) إن الطاقة المحجوزة في الملفات عند $t=\infty$ تساوي:

$$w_1(\infty)=\frac{1}{2}L_1i_1^2(\infty)=\frac{1}{2}\,x\,3\,x\left(-\frac{25}{3}\right)^2=104.1667\,J$$
$$w_2(\infty)=\frac{1}{2}L_2i_2^2(\infty)=\frac{1}{2}\times6\times\left(\frac{25}{3}\right)^2=208.333\,J$$

لاحظ أن الطاقة المحجوزة في الملفين تساوي الطاقة الأولى الإجمالية المخزَّنة ناقص الطاقة المتبددة في المقاومات. ولاحظ أيضاً أنه في الوقت الذي يتم فيه حجز الطاقة في الملفين عند $t = \infty$، فإن الطاقة المُخزَّنة في الملف المكافئ، L_{EQ}، تساوي صفراً. لاحظ أن الطاقة الأولية المُخزَّنة في الملف المكافئ هي $\frac{1}{2}\times 2\times(20)^2 = 400\ J$ ، وأن الطاقة المتبددة في المقاومات تساوي الطاقة المُخزَّنة في الملف المكافئ عند $t = 0$.