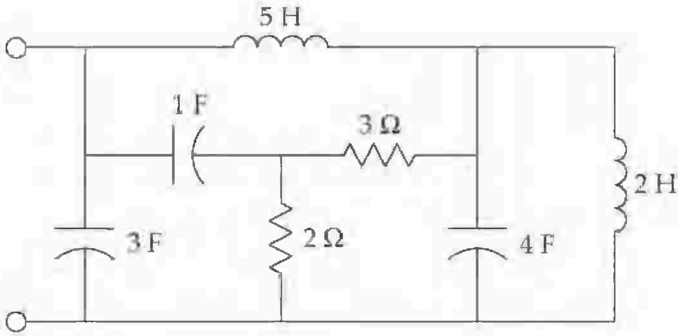
الفصل العاشر

طريقة عامة لحل الدارات المتضمنة مقاومات ومكثفات وملفات

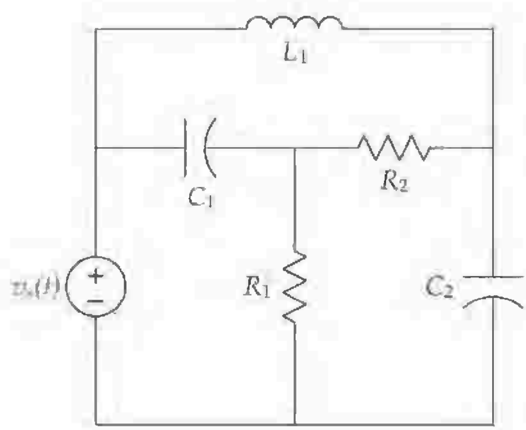
A General Approach to Solving Circuits Involving Resistors, Capacitors and Inductors

لا يمكن في بعض الأحيان تبسيط دارة تتكون من ملفات، ومقاومات ومكثفات من خلال جمع العناصر المتشابهة مع بعضها البعض في تركيبات على التسلسل وعلى التفرع. افترض مثلاً الدارة المبينة في الشكل رقم (١٠.١). في هذه الحالة، فإن عدم وجود تركيبات على التفرع أو على التسلسل للملفات، أو المقاومات، أو المكثفات يمنعنا من تبسيط الدارة لتسهيل الحل، كما هو الحال في المثال رقم (١٠.١). نطبق في هذا القسم طريقة جهد العقدة وطريقة تيار الشبكة لكتابة المعادلات التي تتضمن تكاملات واشتقاقات باستخدام علاقات العنصر بالنسبة للملفات، والمقاومات، والمكثفات. يمكننا من هذه المعادلات حل التيارات والجهود المجهولة ذات الاهتمام.



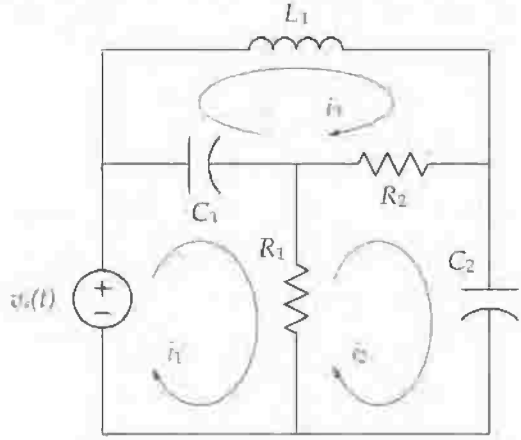
الشكل رقم (١٠.١). دارة لا يمكن تبسيطها.

مثال (١٠.١): اكتب معادلات العقدة للدارة التالية عندما $t \geq 0$ إذا كانت الشروط الابتدائية تساوي الصفر.



الحل: مع العقدة المرجعية في الجزء السفلي من الدارة، لدينا عقدتان أساسيتان، كما هو موضح في الدارة التالية التي تم إعادة رسمها. تذكّر أن العقدة التي تتضمن مصدر الجهد جهدها معروف، وأننا لا نكتب معادلة عقدة لها. عند كتابة معادلات جهد العقدة، فإن التيار المار خلال مكثف هو $i_c = C\Delta\dot{v}$، حيث $\Delta\dot{v}$ هو مشتق الجهد على

طرفي المكثف، والتيار المار خلال الملف هو $i_L = \frac{1}{L}\int_0^t \Delta v d\lambda + i_L(0)$، حيث Δv هو الجهد على طرفي الملف. وبما أن الشروط الابتدائية تساوي صفراً، فإن الحد $i_L(0) = 0$.



إن جمع التيارات الخارجة من العقدة رقم ١ يعطي:

$$C_1\left(\dot{v}_1 - \dot{v}_s\right) + \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = 0$$

الذي يمكن تبسيطه إلى:

$$C_1 \dot{v}_1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v_1 - \frac{1}{R_2} v_2 = C_1 \dot{v}_s$$

إن جمع التيارات الخارجة من العقدة رقم ٢ يعطي:

$$\frac{v_2 - v_1}{R_2} + C_2 \dot{v}_2 + \frac{1}{L}\int_0^t \left(v_2 - v_s\right) d\lambda = 0$$

نتخلص عادة من التكاملات في معادلات العقدة عن طريق التفاضل. عند تطبيق ذلك على الصيغة السابقة، فإن هذا يعطي:

$$\frac{1}{R_2}\dot{v}_2 - \frac{1}{R_2}\dot{v}_1 + C_2 \ddot{v}_2 + \frac{1}{L_1} v_2 - \frac{1}{L_1} v_s = 0$$

وبعد إعادة ترتيب ينتج :

$$\ddot{v}_2-\frac{1}{C_2R_2}\dot{v}_2+\frac{1}{C_2L_1}v_2-\frac{1}{C_2R_2}\dot{v}_1=\frac{1}{C_2L_1}v_s$$

عند تطبيق طريقة جهد العقدة، فإننا نولّد معادلة واحد لكل عقدة أساسية. ولكتابة معادلة تفاضلية واحدة تتضمن جهد عقدة واحدة فقط والمداخل، فإننا نستخدم معادلات العقد الأخرى ونستبدلها في معادلة العقدة لجهد العقدة المطلوب. ويتضمن هذا في بعض الأحيان اشتقاقاً واستبدالاً. تتضمن الحالة الأسهل معادلة عقدة تحتوي على جهد عقدة غير مرغوب فيه بدون مشتقاته. إن الطريقة الأخرى لإنشاء معادلة تفاضلية واحدة هي استخدام العامل D.

خذ في الاعتبار معادلات العقدة للمثال رقم (١٠.١)، وافترض أننا مهتمون في الحصول على معادلة تفاضلية واحدة تتضمن جهد العقدة V_1 ومشتقاته، والدخل. ولسهولة التحليل، دعنا نفترض أن قيم عناصر الدارة هي $R_1=R_2=1\ \Omega$، و $C_1=C_2$ و$=1$ F، $L_1=1$ H، مما يعطينا :

$$\dot{v}_1+2v_1-v_2=\dot{v}_s$$

و

$$\ddot{v}_2+\dot{v}_2+v_2-\dot{v}_1=v_s$$

باستخدام المعادلة الأولى، فإننا نحل بالنسبة إلى v_2، ونحسب $\dot{v}_2$ ، و $\ddot{v}_2$ ومن ثم نعوّض في المعادلة الثانية على النحو التالي :

$$v_2=\dot{v}_1+2v_1-\dot{v}_s$$
$$\dot{v}_2=\ddot{v}_1+2\dot{v}_1-\ddot{v}_s$$
$$\ddot{v}_2=\dddot{v}_1+2\ddot{v}_1-\dddot{v}_s$$

بعد التعويض في معادلة العقدة الثانية، يكون لدينا :

$$\dddot{v}_1 + 2\ddot{v}_1 - \dddot{v}_s + \ddot{v}_1 + 2\dot{v}_1 - \ddot{v}_s + \dot{v}_1 + 2v_1 - \dot{v}_s - \dot{v}_1 = v_s$$

وبعد التبسيط ينتج :

$$\dddot{v}_1 + 3\ddot{v}_1 + 2\dot{v}_1 + 2v_1 = \dddot{v}_s + \ddot{v}_s + \dot{v}_s - v_s$$

إن العامل D يوفر لنا أيضاً وسيلة لكتابة المعادلتين التفاضليتين كمعادلة تفاضلية واحدة لا تضم سوى v_1 و v_s. بالنسبة للعامل D، فإنه تتم كتابة معادلتي العقدة كما يلي :

$$\begin{aligned} (D+2)\,v_1 - v_2 &= D\,v_s \\ \left(D^2 + D + 1\right) v_2 - D\,v_1 &= v_s \end{aligned}$$

إن حل المعادلة الأولى من أجل v_2 يعطي $v_2 = (D+2) - D\,v_s$ وبعد استبدال v_2 في المعادلة الثانية ينتج :

$$\left(D^2 + D + 1\right)(D+2)v_1 - D\left(D^2 + D + 1\right) v_s - D\,v_1 = v_s$$

وبعد التبسيط ينتج :

$$\left(D^3 + 3D^2 + 2D + 2\right) v_1 = \left(D^3 + D^2 + D + 1\right) v_s$$

وبالعودة إلى الكتابة التفاضلية، تكون النتيجة :

$$\dddot{v}_1 + 3\ddot{v}_1 + 2\dot{v}_1 + 2v_1 = \dddot{v}_s + \ddot{v}_s + \dot{v}_s - v_s$$

وهي نفس الصيغة التي حسبناها من قبل.

بشكل عام، فإن درجة المعادلة التفاضلية، المتعلقة بمتغير خرج واحد وعدة مداخل، مساوية لعدد العناصر التي تقوم بتخزين الطاقة في الدارة (المكثفات والملفات). في بعض الدارات، تكون درجة المعادلة التفاضلية أقل عدداً من المكثفات والملفات في الدارة. يحدث هذا عندما تكون جهود المكثفات وتيارات الملفات ليست مستقلة، هذا يعني، أن هناك علاقة جبرية بين المكثفات وعلى وجه التحديد الجهود

والمداخل، أو تيارات الملفات والمداخل. يحدث هذا عندما يتم توصيل المكثفات مباشرة إلى مصدر جهد أو عندما يتم توصيل الملفات مباشرة إلى مصدر تيار كما هو مبين في الشكل.رقم (A.١٠.٢ و B). ففي الشكل.رقم (A.١٠.٢) هناك مكثفان موصولان مباشرة بمصدر جهد. إن تطبيق قانون كيرشوف للجهد (KVL) حول الحلقة الخارجية يعطي:

$$-v(t)+v_1(t)+v_2(t)=0$$

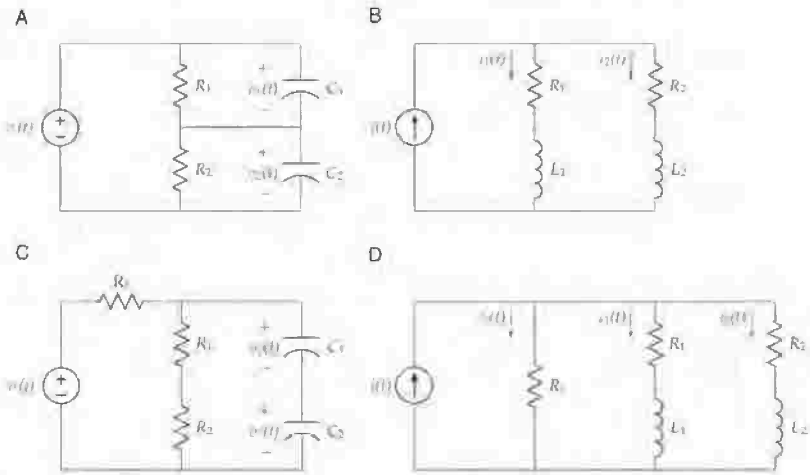
أو

$$v(t)=v_1(t)+v_2(t)$$

حيث $v_1(t)$ و $v_2(t)$ هما الجهدان على طرفي المكثفين. وينبغي أن يكون واضحاً أن $v_1(t)$ و $v_2(t)$ في المعادلة السابقة ليسا مستقلين، وهذا يعني أن هناك علاقة جبرية بين الاثنين، وإذا كان $v_1(t)$ معروفاً، فإن $v_2(t)=v(t)-v_1(t)$. يحدث الوضع نفسه عندما يكون هناك ملفان موصولان مباشرة إلى مصدر تيار كما في الشكل.رقم (B.١٠.٢). إن تطبيق قانون كيرشوف للتيار (KCL) على العقدة العلوية يعطي:

$$i(t)=i_1(t)+i_2(t)$$

كما كان من قبل، فإن التيارين $i_1(t)$ و $i_2(t)$ ليسا مستقلين: هناك علاقة جبرية بين التيارين. إن الدارات ذات الخصائص الموجودة في الشكل.رقم (A.١٠.٢ و B) نادرة في الحالات الواقعية. على سبيل المثال، يتم وصف الدارتين في الشكل.رقم (A.١٠.٢ و B) بشكل أفضل من خلال تلك الموجودة في الشكل.رقم (C.١٠.٢ و D) لأن مصادر الجهد والتيار مُمثَّلة بشكل مناسب أكثر من خلال المقاومة داخل المصدر المثالي، R_s (تسمى المقاومة الداخلية- إنها مقاومة صغيرة لمصدر الجهد ومقاومة كبيرة لمصدر التيار). ومن خلال تضمين المقاومة الداخلية R_s في الدارة، فإنه لن يكون لدينا أي علاقات جبرية بين الجهود والتيارات.



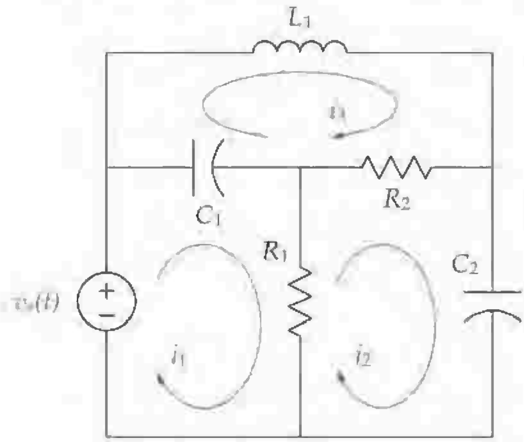
الشكل رقم (١٠.٢). (A) و (B) دارات تم وصفها بمعادلات تفاضلية من الدرجة الأولى ولديها علاقات جبرية بين الجهود والتيارات. (C) و (D) دارات تم وصفها بمعادلات تفاضلية من الدرجة الثانية، بدون وجود علاقات جبرية بين الجهود والتيارات.

لاحظ أن الدارة المُعطاة في المثال رقم (١٠.١) تحتوي على ثلاثة عناصر تخزين للطاقة (مكثفين وملف واحد)، والمعادلة التفاضلية الناتجة هي من الدرجة الثالثة، كما هو متوقع.

مثال (١٠.٢): اكتب معادلات تيار الشبكة للدارة في المثال رقم (١٠.١) عندما $t \geq 0$ إذا كانت الشروط الابتدائية تساوي الصفر.

الحل: هناك ثلاث شبكات في هذه الدارة كما هو موضح في الشكل التالي. لكتابة معادلات تيار الشبكة، تذكّر أن الجهد على طرفي المكثف هو $v_C = \frac{1}{C}\int_0 \Delta i \, d\lambda + v_C\left(0^+\right)$. حيث Δi هو التيار الناتج (مجموع تيارات الشبكة) خلال

المكثف، والجهد على طرفي ملف $v_L = L\dfrac{d\Delta i}{dt}$ حيث $\dfrac{d\Delta i}{dt}$ هو مشتق التيار الناتج خلال الملف. وبما أن الشروط الابتدائية تساوي صفراً، فإن $v_C(0^+) = 0$.



إن جمع هبوطات الجهد حول الشبكة رقم ١ يعطي:

$$-v_s + \frac{1}{C_1}\int_0^t (i_1 - i_3)\, d\lambda + R_1(i_1 - i_2) = 0$$

بالتفاضل وإعادة ترتيب المعادلة السابقة يعطي:

$$R_1\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1}i_1 - R_1\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_1}i_3 = \frac{dv_s}{dt}$$

إن جمع هبوطات الجهد حول الشبكة رقم ٢ يعطي:

$$R_1(i_2 - i_1) + R_2(i_2 - i_3) + \frac{1}{C_2}\int_0^t i_2\, d\lambda = 0$$

بالتفاضل وإعادة ترتيب المعادلة السابقة يعطي:

$$(R_1 + R_2)\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2}i_2 - R_1\frac{di_1}{dt} - R_2\frac{di_3}{dt} = 0$$

وأخيراً فإن جمع هبوطات الجهد حول الشبكة رقم ٣ يعطي :

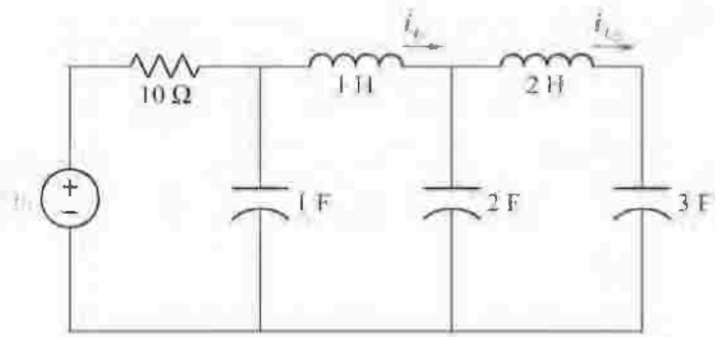
$$L_1 \frac{di_3}{dt} + R_2\left(i_3 - i_2\right) + \frac{1}{C_1}\int_0^t (i_3 - i_1)\, d\lambda = 0$$

بالتفاضل وإعادة ترتيب المعادلة السابقة يعطي :

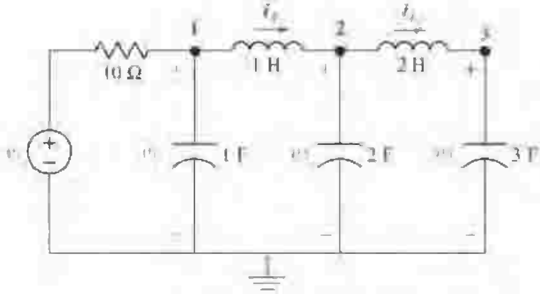
$$L_1 \frac{d^2 i_3}{dt^2} + R_2 \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C_1} i_3 - R_2 \frac{di_2}{dt} - \frac{1}{C_1} i_1 = 0$$

تضمن المثالان السابقان دارة ذات شروط ابتدائية مساوية للصفر. عندما تتضمن الدارات شروطاً ابتدائية لا تساوي الصفر، فإن طريقتنا تبقى نفسها كما كانت من قبل إلا أن يتم تضمين التيارات الابتدائية للملفات عند كتابة جهد العقدة ويتم تضمين الجهود الأولية للمكثفات عند كتابة معادلات تيار الشبكة.

مثال (١٠.٣) : اكتب معادلات العقدة للدارة التالية عندما $t \geq 0$ مفترضاً أن الشروط الابتدائية هي $i_{L1}(0) = 8\ A$ و $i_{L2}(0) = -4\ A$.



الحل: مع العقدة المرجعية في الجزء السفلي من الدارة، لدينا ثلاث عقد أساسية كما هو موضح في الدارة التي تم إعادة رسمها كما يلي.



إن جمع التيارات الخارجة من العقدة رقم ١ يعطي :

$$\frac{(v_1-v_2)}{10}+\dot{v}_1+\int_0^t (v_1-v_2)\,d\lambda+8=0$$

حيث $i_{L1}(0)=8\ A$

كما أن جمع التيارات الخارجة من العقدة رقم ٢ يعطي :

$$\int_0^t (v_2-v_1)\,d\lambda-8+2\dot{v}_2+\frac{1}{2}\int_0^t (v_2-v_3)\,d\lambda-4=0$$

حيث $i_{L2}(0)=-4\ A$. لاحظ أن إشارة التيار الابتدائي للملف سالبة لأن الاتجاه من اليمين إلى اليسار ويتم تحديد التيار على مخطط الدارة في الاتجاه المعاكس لمعادلة العقدة رقم ٢.

إن جمع التيارات الخارجة من العقدة رقم ٣ يعطي :

$$\frac{1}{2}\int_0^t (v_3-v_2)\,d\lambda+4+3\dot{v}_3=0$$

لم نقم في هذا المثال بتبسيط معادلات العقدة من خلال التفاضل للتخلص من التكامل، الذي قد يتخلص من التيارات الابتدائية للملف في معادلات العقدة. إذا كنا نريد كتابة معادلة تفاضلية واحدة تتضمن جهد عقدة واحدة فقط ومداخل، فإن

معادلة تفاضلية من الدرجة الخامسة قد تنتج لأن هناك خمسة عناصر تخزين للطاقة في الدارة. ولحل المعادلة التفاضلية، سنكون في حاجة إلى خمسة شروط ابتدائية، الجهد الابتدائي للعقدة المتغير الذي تم اختياره، وكذلك المشتقات من الأولى حتى الرابعة عندما يكون الزمن مساوياً للصفر.

(١٠.١) شروط الانقطاع والشروط الابتدائية في دارة
DISCONTINUITIES AND INITIAL CONDITIONS IN A CIRCUIT

تحدث الانقطاعات في الجهد والتيار عندما يتم تطبيق دخل مثل خطوة الوحدة أو عندما يتم فتح مفتاح في دارة. كما رأينا، عند حل معادلة تفاضلية من الدرجة n فإنه يجب على المرء أن يعرف n من الشروط الابتدائية، وهي عادة متغير الخرج ومشتقاته البالغة $(n - 1)$ عند الزمن الذي يتم فيه تطبيق الدخل أو فتح المفتاح. كما سنرى، إذا كانت المداخل إلى الدارة معروفة في جميع الأوقات، فإننا نستطيع الحل بالنسبة للشروط الابتدائية مباشرة استناداً إلى اعتبارات الطاقة وليس اعتماداً على ما يتم تقديمه معها في نص المسألة. إن جميع مسائلنا تقريباً تتضمن دخل مُطبَّق عند الزمن صفر، وعليه فإن مناقشتنا هنا تتركز على الزمن صفر، ولكن يمكن توسيعها بسهولة إلى أي زمن يتم تطبيق دخل عنده.

لا يمكن للطاقة أن تتغير بشكل لحظي بالنسبة للعناصر التي تقوم بتخزين الطاقة. وعليه، لا توجد انقطاعات مسموح بها في التيار المار خلال ملف أو الجهد على طرفي مكثف في أي وقت- وبشكل خاص، تبقى قيمة المتغير نفسها عند $t = 0^-$ و $t = 0^+$. في المسألة السابقة عندما كنا نأخذ في الاعتبار الشروط الابتدائية للملفات والمكثفات، فإن هذا يعني ضمناً، $i_{L1}(0^-) = i_{L1}(0^+)$ و $i_{L2}(0^-) = i_{L2}(0^+)$، و $v_1(0^-) = v_1(0^+)$، و $v_2(0^-) = v_2(0^+)$ و $v_3(0^-) = v_3(0^+)$. وباستثناء المتغيرات المرتبطة بالتيار المار خلال

ملف والجهد على طرفي مكثف، فإن المتغيرات الأخرى يمكن أن يكون لديها انقطاعات، خصوصاً عند الزمن الذي يتم فيه تطبيق خطوة الواحدة، أو عندما يتم فتح مفتاح، ولكن هذه المتغيرات يجب أن تتبع قانون كيرشوف للجهد (KVL) وقانون كيرشوف للتيار (KCL).

في حين أنه قد لا تبدو واضحة في البداية، فإنه يتم السماح بالانقطاع في مشتق التيار المار خلال ملف والجهد على طرفي مكثف عند $t=0^-$ و $t=0^+$ لأن:

$$\frac{di_L(0+)}{dt}=\frac{v_L(0+)}{L}$$

و

$$\frac{dv_c(0+)}{dt}=\frac{i_c(0+)}{L}$$

كما يُسمح للانقطاعات في $v_L(0+)$ و $i_C(0+)$. تذكَّر أنه يتم تقييم المشتقات في الصيغة السابقة عند الصفر بعد الاشتقاق، وهذا يعني:

$$\frac{di_L(0+)}{dt}=\left.\frac{di_L(t)}{dt}\right|_{t=o^+}$$

و

$$\frac{dv_c(0+)}{dt}=\left.\frac{dv_c(t)}{dt}\right|_{t=o^+}$$

في العمليات الحسابية لتحديد مشتقات المتغيرات غير المرتبطة بالتيار المار خلال ملف والجهد على طرفي مكثف، فقد تكون هناك حاجة إلى مشتق دخل خطوة الواحدة. وهنا، فإننا نفترض أن مشتق دخل خطوة الواحدة يساوي صفراً عند $t=0^+$.

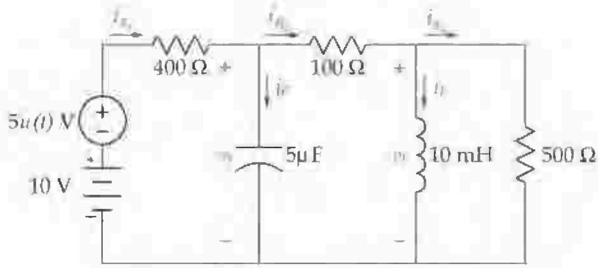
يتم تحديد الشروط الأولية للمتغيرات غير المرتبطة بالتيار المار خلال ملف والجهد على طرفي مكثف في أوقات الانقطاع فقط من الشروط الابتدائية للمتغيرات

المرتبطة بالتيار المار خلال ملف والجهد على طرفي مكثف، وأية مصادر قابلة للتطبيق. ويقوم هذا التحليل على مرحلتين تشملان قانون كيرشوف للتيار (KCL) وقانون كيرشوف للجهد (KVL) أو باستخدام طريقة جهد العقدة أو طريقة تيار الشبكة.

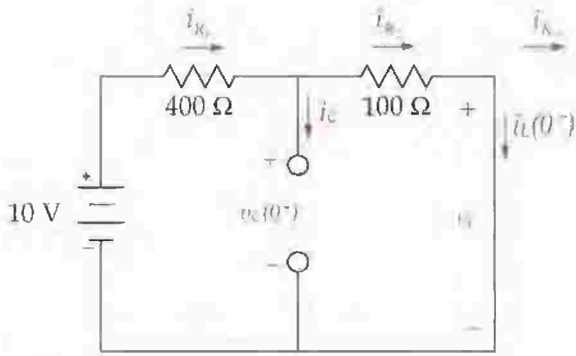
١- أولاً، نحلّل الدارة عند $t = 0^-$. تذكّر أنه عندما تكون الدارة في حالة مستقرة، فإن الملف يعمل كدارة مقصورة والمكثف يعمل كدارة مفتوحة. وعليه ففي الحالة المستقرة عند $t = 0^-$، فإننا نستبدل كافة الملفات بدارات مقصورة والمكثفات بدارات مفتوحة في الدارة. بعد ذلك نحل بالنسبة للتيارات والجهود المناسبة في الدارة لإيجاد التيارات المارة خلال الملفات (في الواقع القِصَر الذي يربط المصادر والمقاومات) والجهود على طرفي المكثفات (في الواقع الدارات المفتوحة بين المصادر والمقاومات).

٢- ثانياً، نحلّل الدارات عند $t = 0^+$. وبما أن تيار الملف لا يمكن أن يتغير بشكل مستمر من $t = 0^-$ إلى $t = 0^+$، فإننا نستبدل الملفات بمصادر تيار قيمها هي قيم التيارات عند $t = 0^-$. وعلاوة على ذلك، بما أن جهد المكثف لا يتغير بشكل مستمر من $t = 0^-$ إلى $t = 0^+$، فإننا نستبدل المكثفات بمصادر جهد قيمها هي قيم الجهود عند $t = 0^-$. نحل هذه الدارة بالنسبة إلى جميع الشروط الابتدائية المطلوبة اللازمة لحل المعادلة التفاضلية.

مثال (١٠.٤): المطلوب إيجاد $v_c(0^-)$ و $v_L(0^-)$ و $i_L(0^-)$ و $i_{R_1}(0^-)$ و $i_{R_2}(0^-)$ و $i_{R_3}(0^-)$ و $v_c(0^+)$ و $v_L(0^+)$ و $i_L(0^+)$ و $i_{R_1}(0^+)$ و $i_{R_2}(0^+)$ و $i_{R_3}(0^+)$ والمشتق لكل تيار وجهد عنصر غير فعال عند $t = 0^+$ للدارة التالية.



الحل: عندما $t = 0^-$ يتم استبدال المكثف بدارة مفتوحة والملف بدارة مقصورة كما هو موضح في الدارة التالية:



لاحظ أن $v_c(0^-)=0V$ لأن الملف دارة مقصورة. ولاحظ أيضاً أن المقاومة ٥٠٠ أوم لا تظهر في الدارة لأنها مقصورة من قبل الملف، وهكذا فإن $i_{R_3}(0^-)=0A$. باستخدام قاعدة مُقسِّم الجهد، يكون لدينا:

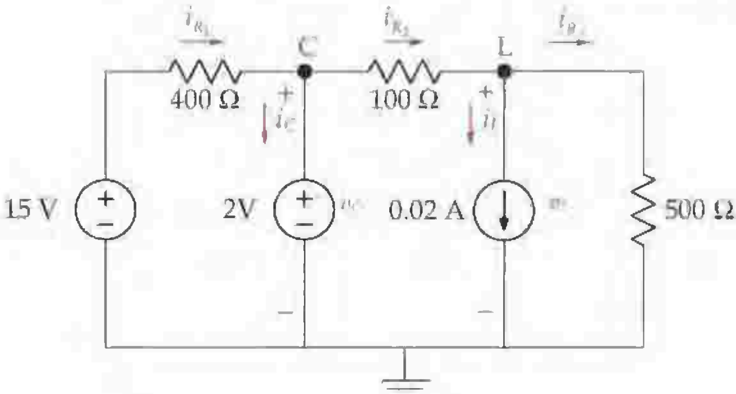
$$v_c(0^-) = 10 \times \frac{100}{400+100} = 2\,V$$

ومن خلال قانون أوم

$$i_L(0^-) = \frac{10}{100+400} = 0.02\,A$$

ويترتب على ذلك أن $i_{R_1}(0^-) = i_{R_2}(0^-) = i_L(0^-) = 0.02\ A$. وبما أن الجهد على طرفي المكثف والتيار المار خلال الملف لا يُسمح لهما بالتغير ن $t = 0^-$ إلى $t = 0^+$ يكون لدينا $v_c(0^+) = v_c(0^-) = 2\ V$ و $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0.02\ A$.

يتم رسم الدارة عندما $t = 0^+$ عن طريق استبدال الملفات في الدارة الأصلية بمصادر تيار قيمها تساوي قيم تيارات الملفات عند $t = 0^-$ والمكثفات بمصادر جهد قيمها تساوي قيم جهود المكثفات عند $t = 0^-$ كما هو موضح في الشكل التالي مع العقدتين C و L والمرجع. لاحظ أيضاً أن الدخل الآن $10 + 5\,u(t) = 15$ V.



لإيجاد $v_L(0^+)$ ، نجمع التيارات الخارجة من العقدة L، وهذا يعطي :

$$\frac{(v_L - 2)}{100} + 0.02 + \frac{v_L}{500} = 0$$

الـــــــــــذي يعطـــــــــــي $v_L(0^+) = 0\ V$. الآن $i_{R_3}(0^+) = \frac{v_L(0^+)}{500} = 0\ A$ و $i_{R_2}(0^+) = 0.02 + i_{R_3}(0^+) = 0.02\ A$ و $i_{R_1}(0^+) = \frac{15-2}{400} = 0.0325\ A$.

لإيجاد $i_c(0^+)$ نكتب قانون كيرشوف للتيار (KCL) للعقدة C مما يعطي :

$$-i_{R_1}(0^+) + i_c(0^+) + i_{R_2}(0^+) = 0$$

أو

$$i_c(0^+) = i_{R_1}(0^+) - i_{R_2}(0^+) = 0.0325 - 0.02 = 0.125\ A$$

لإيجاد $\dot{v}_c(0^+)$ لاحظ أن $i_c(0^+) = c\,\dot{v}_c(0^+)$ أو

$$\dot{v}_c(0^+) = \frac{i_c(0^+)}{c} = \frac{0.0125}{5\times10^{-6}} = 2.5\times10^3\ V/s$$

وبالمثل،

$$\frac{di_L(0+)}{dt} = \frac{v_L(0+)}{L} = 0\ A/s$$

بعد ذلك لدينا $i_{R_1} = \frac{15 - v_c}{400}$ و

$$\frac{di_{R_1}(0+)}{dt} = -\frac{1}{400}\frac{dv_c(0+)}{dt} = -\frac{2.5\times10^3}{400} = -6.25\ A/s$$

ولإيجاد $\frac{di_{R_3}}{dt}$ نبدأ بقانون كيرشوف للتيار (KCL) $i_{R_3} = i_{R_2} - i_L = i_{R_4} - i_c - i_L$ و،

$$\frac{di_{R_3}}{dt} = \frac{di_{R_4}}{dt} - \frac{di_c}{dt} - \frac{di_L}{dt}$$

ومن أجل الحد $\frac{di_c}{dt}$ لدينا

$$i_c = i_{R_4} - i_{R_2}$$

و

$$\frac{di_c}{dt} = \frac{di_{R_4}}{dt} - \frac{di_{R_2}}{dt}$$

باستخدام قانون أوم، فإنه يتم إعطاء الحد $\frac{di_{R_2}}{dt}$ من خلال ما يلي:

$$i_{R_2} = \frac{v_c - v_L}{100}$$

و

$$\frac{di_{R_2}}{dt} = \frac{1}{100}\frac{dv_c}{dt} - \frac{1}{100}\frac{dv_L}{dt}$$

ومن خلال $v_L = 500 i_{R_2}$ و $\frac{dv_L}{dt} = 500\frac{di_{R_2}}{dt}$ يكون لدينا

$$\frac{di_{R_2}}{dt} = \frac{1}{100}\frac{dv_c}{dt} - \frac{500}{100}\frac{di_{R_2}}{dt}$$

إن استبدال $\frac{di_{R_2}}{dt}$ في معادلة $\frac{di_c}{dt}$ يعطي

$$\frac{di_c}{dt} = \frac{di_{R_1}}{dt} - \frac{di_{R2}}{dt} = \frac{di_{R_1}}{dt} - \frac{1}{100}\frac{dv_c}{dt} + \frac{500}{100}\frac{di_{R3}}{dt}$$

بالعودة إلى المعادلة $\frac{di_{R_3}}{dt}$ لدينا

$$\frac{di_{R_3}}{dt} = \frac{di_{R_1}}{dt} - \frac{di_C}{dt} - \frac{di_L}{dt} = \frac{di_{R1}}{dt} - \frac{1}{100}\frac{dv_c}{dt} - \frac{500}{100}\frac{di_{R3}}{dt} - \frac{di_L}{dt}$$

بجمع الحدود $\frac{di_{R_3}}{dt}$ ، وإلغاء الحدود $\frac{di_{R1}}{dt}$ ، تنخفض المعادلة السابقة إلى :

$$\frac{di_{R_3}}{dt} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{100}\frac{dv_c}{dt} - \frac{di_L}{dt}\right)$$

وعند $i_c(0^+)$ يكون لدينا

$$\frac{di_{R_3}(0^+)}{dt} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{100}\frac{dv_c(0^+)}{dt} - \frac{di_L(0^+)}{dt}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{2.5\times 10^3}{100} - 0\right) = 4.167\ A/s$$

من قبل ، لدينا من أجل $\frac{di_{R_2}}{dt}$

$$\frac{di_{R_2}(0^+)}{dt}=\frac{1}{100}\frac{dv_c(0^+)}{dt}-\frac{500}{100}\frac{di_{R_3}(0^+)}{dt}=\frac{2.5\times10^3}{100}-5\times4.167=4.167\ {A}/{s}$$

ومن أجل $\frac{di_C}{dt}$

$$\frac{di_c(0^+)}{dt}=\frac{di_{R_4}(0^+)}{dt}-\frac{di_{R_2}(0^+)}{dt}=-6.25-4.1665=-10.417\ {A}/{s}$$

وأخيراً، فإن مشتقات الجهود على طرفي المقاومات هي:

$$\frac{dv_{R_1}}{dt}=400\frac{di_{R_1}}{dt}=400\times(-6.25)=-2500\ {V}/{s}$$
$$\frac{dv_{R_2}}{dt}=100\frac{di_{R_2}}{dt}=100\times4.167=416.7\ {V}/{s}$$

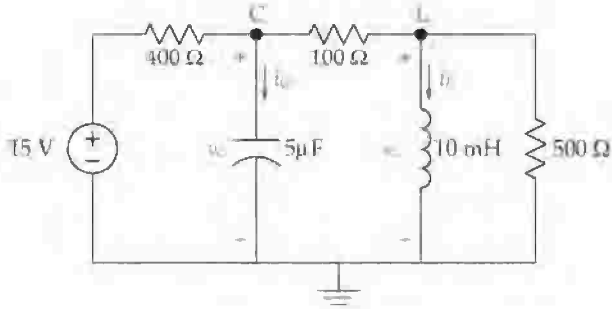
و

$$\frac{dv_{R_3}}{dt}=500\frac{di_{R_3}}{dt}=500\times4.167=2083.5\ {V}/{s}$$

مثال (١٠.٥): المطلوب إيجاد v_C للدارة في المثال رقم (١٠.٤).

الحل: نستخدم طريقة جهد العقدة لحل هذه المسألة لأن v_C هو أحد المتغيرات المُستخدمة في الحل. ينتج عن استخدام طريقة جهد العقدة أيضاً معادلتان بدلاً من ثلاث معادلات عند استخدام طريقة تيار الشبكة. لقد تم حساب الشروط الابتدائية اللازمة لحل المعادلة التفاضلية لهذه الدائرة في المثال رقم (١٠.٤). تذكّر أننا قمنا في المثال رقم (١٠.٤) بحساب العديد من الشروط الابتدائية أكثر من المطلوبة في هذا المثال؛ وهنا، نحن بحاجة فقط إلى $v_c(0^+)$ و $\dot{v}_c(0^+)$.

عندما $t \geq 0$ يتم إعادة رسم الدارة من أجل التحليل على الشكل التالي:



إن جمع التيارات الخارجة من العقدة C يعطي :

$$\frac{\upsilon_C - 15}{400} + 5\times10^{-6}\dot{\upsilon}_C + \frac{\upsilon_C - \upsilon_L}{100} = 0$$

الذي يمكن تبسيطه إلى

$$\dot{\upsilon}_C + 2500\upsilon_C - 2000\upsilon_L = 7500$$

إن جمع التيارات الخارجة من العقدة L يعطي :

$$\frac{\upsilon_L - \upsilon_C}{100} + \frac{1}{10\times10^{-3}}\int_0^t \upsilon_L d\lambda + i_L(0^+) + \frac{\upsilon_L}{500} = 0$$

الذي يمكن، بعد الضرب بـ ٥٠٠ والتفاضل، تبسيطه إلى

$$6\dot{\upsilon}_L + 50\times10^3\upsilon_L - 5\dot{\upsilon}_C = 0$$

باستخدام طريقة العامل D، تتم كتابة المعادلتين التفاضليتين لدينا كما يلي :

$$D\nu_C + 2500\nu_C - 2000\nu_L = 7500 \quad or \quad (D+2500)\nu_C - 2000D\nu_L = 7500$$

$$6D\nu_L + 50\times10^3\nu_L - 5D\nu_C = 0 \quad or (6D + 50\times10^3)\nu_L - 5D\nu_C$$

بعد ذلك نحل بالنسبة إلى v_L من المعادلة الأولى،

$$\nu_L = (0.5x10^{-3}D + 1.25)\nu_C - 3.75$$

ومن ثم استبدال v_L في المعادلة الثانية، مما يعطي

$$(6D+50\times10^3)v_L-5Dv_C=(6D+50\times10^3)((0.5\times10^{-3}D+1.25)v_C-3.750)-5Dv_C=0$$

إن تخفيض هذه الصيغة يعطي

$$D^2v_C+10.417\times10^3Dv_C+20.83\times10^6v_C=62.5\times10^6$$

بالعودة إلى المجال الزمني ينتج

$$\ddot{v}_C+10.417\times10^3\dot{v}_C+20.83\times10^6v_C=62.5\times10^6$$

إن المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية السابقة هي

$$s^2+10.417\times10^3s+20.833\times10^6=0$$

ومع الجذور 7.718×10^3- و 2.7×10^3- و الحل الطبيعي ينتج

$$v_{C_n}(t)=K_1e^{-7.718\times10^3t}+K_2e^{-2.7\times10^3t}V$$

بعد ذلك، نحل بالنسبة للاستجابة القسرية، مفترضين أن $v_{Cf}(t)=K_3$. بعد الاستبدال في المعادلة التفاضلية، فإن هذا يعطي

$$20.833\times10^6K_3=62.5\times10^6$$

أو $K_3=3$. وهكذا، يكون حلنا الآن

$$v_C(t)=v_{C_n}(t)+v_{C_f}(t)=K_1e^{-7.718\times10^3t}+K_2e^{-2.7\times10^3t}+3V$$

نستخدم الشروط الابتدائية للحل بالنسبة إلى K_1 و K_2. أولاً

$$v_C(0)=2=K_1+K_2+3$$

بعد ذلك

$$\dot{v}_C(t)=-7.718\times10^3K_1e^{-7.718\times10^3t}-2.7\times10^3K_2e^{-2.7\times10^3t}$$

وعند $t = 0$،

$$v_C(0) = 2.5\times10^3 = -7.718\times10^3 K_1 - 2.7\times10^3 K_2$$

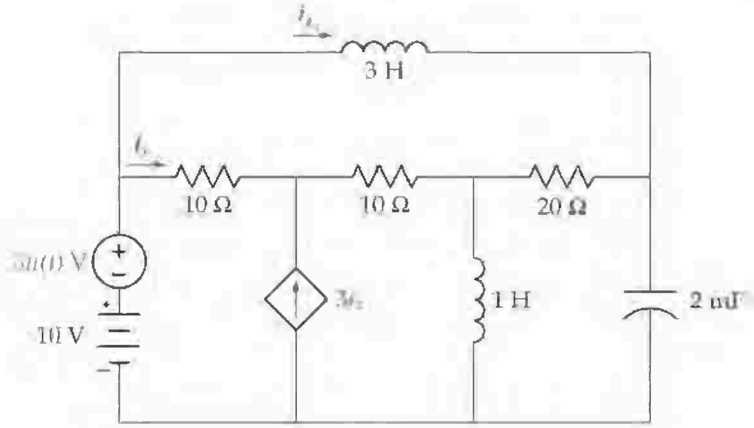
يعطي الحل $K_1 = 0.04$ و $K_2 = -1.04$. إن استبدال هذه القيم في الحل يعطي

$$v_C(t) = 0.04e^{-7.718\times10^3 t} - 1.04e^{-2.7\times10^3 t} + 3V$$

عندما $t \geq 0$

تبقى طريقتنا نفسها للدارات ذات المصادر المُتحكَم بها. نحن نحلل الدارة عندما $t = 0^-$ و $t = 0^+$ لوضع شروط ابتدائية تعمل مع المصدر المُتحكم به. إذا كان الجهد أو التيار المستخدم في المصدر المُتحكم به هو صفراً، فإننا نستبدله بدارة مفتوحة إذا كان مصدر تيار ودارة مقصورة إذا كان مصدر جهد. إذا كان لدارة مصدر جهد أو تيار مستقل يتم إدخاله عند القيمة صفر عن طريق تابع خطوة الواحدة، فإننا عندما $t = 0^-$ نستبدل المصدر المستقل بدارة مقصورة إذا كان هذا المصدر مصدر جهد وبدارة مفتوحة إذا كان مصدر تيار.

مثال (١٠.٦): المطلوب إيجاد i_{L1} للدارة التالية عندما $t \geq 0$ باستخدام طريقة تيار الشبكة.



الحل: لحل هذه المسألة سوف نستخدم طريقة تيار الشبكة مع تيارات محددة في الدارة التالية. تشمل الخطوات ما يلي:

١- تخلص من جميع التيارات باستثناء i_4 الذي هو I_{L1}، الذي يعطي معادلة تفاضلية من الدرجة الثالثة.

٢- حِل بالنسبة للشروط الابتدائية.

٣- حِل المعادلة التفاضلية.

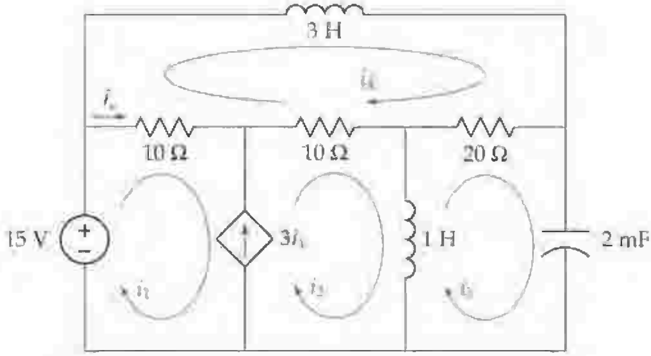
وينبغي أن يكون واضحاً أن المعادلة التفاضلية من الدرجة الثالثة ينبغي لها وصف هذا النظام، لأن هناك ثلاثة عناصر تخزين للطاقة.

معادلات الشبكة

لكتابة معادلات تيارات الشبكة، تذكّر أن الجهد على طرفي المكثف هو $v_C = \frac{1}{C}\int_0^t \Delta i\, d\lambda + v_C(0^+)$، حيث Δi هو التيار الناتج (مجموع تيارات الشبكة) خلال الملف، والجهد على طرفي الملف $v_L = L\frac{d\Delta i}{dt}$ حيث $\frac{d\Delta i}{dt}$ هو مشتق التيار الناتج خلال الملف. ونظراً لوجود مصدر تيار تابع (مُتحكم به) في الدارة، فإننا نشكل شبكة ضخمة من الشبكات ١ و ٢. لاحظ أن تيار الشبكة $i_4 = i_{L1}$.

إن جمع الجهود حول العقدة الضخمة ١+٢ يعطي:

$$-15 + 10(i_1 - i_4) + 10(i_2 - i_4) + \frac{d(i_2 - i_3)}{dt} = 0$$



وإعادة ترتيب المعادلة السابقة يعطي

$$10i_1 + \frac{di_2}{dt} + 10i_2 - \frac{di_3}{dt} - 20i_4 = 15$$

وجمع هبوطات الجهد حول الشبكة رقم ٣ يعطي

$$\frac{d(i_2 - i_3)}{dt} + 20(i_3 - i_4) + \frac{1}{2\times10^{-3}}\int_0^t i_3\, d\lambda + v_C(0^+) = 0$$

تفاضل وإعادة ترتيب المعادلة السابقة ينخفض إلى

$$-\frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{d^2 i_3}{dt^2} + 20\frac{di_3}{dt} + 500i_3 - 20\frac{di_4}{dt} = 0$$

إن جمع هبوطات الجهد حول الشبكة رقم ٤ يعطي

$$3\frac{di_4}{dt} + 20(i_4 - i_3) + 10(i_4 - i_2) + 10(i_4 - i_1) = 0$$

وبعد إعادة الترتيب، نجد

$$-10i_1 - 10i_2 - 20i_3 + 3\frac{di_4}{dt} + 40i_4 = 0$$

إن تطبيق قانون كيرشوف للتيار (KCL) على مصدر التيار التابع يعطي

$$3i_x = i_2 - i_1$$

وبما أن $i_x = 3(i_1 - i_4)$ ، يكون لدينا

$$4i_1 - i_2 - 3i_4 = 0$$

لدينا الآن أربعة معادلات وأربعة مجاهيل. يتم استخدام معادلة مصدر التيار التابع، معادلة جبرية، للتخلص من i_1 من معادلات الشبكة الثلاث، لأن $i_1 = \frac{1}{4}(i_2 + 3i_4)$. إن استبدال i_1 في معادلة الشبكة الضخمة ١+٢ وجمع الحدود المتشابهة يعطي

$$\frac{di_2}{dt} + \frac{50}{4} i_2 - \frac{di_3}{dt} - \frac{50}{4} i_4 = 15$$

إن معادلة الشبكة ٣ ليس لديها i_1 ، ولكن يتم كتابتها هنا للراحة.

$$-\frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{d^2 i_3}{dt^2} + 20\frac{di_3}{dt} + 500 i_3 - 20\frac{di_4}{dt} = 0$$

بعد استبدال i_1 وجمع الحدود المتشابهة في معادلة الشبكة ٤ ، يكون لدينا

$$-\frac{50}{4} i_2 - 20 i_3 + 3\frac{di_4}{dt} + \frac{130}{4} i_4 = 0$$

يتم استخدام معادلة الشبكة ٤ للتخلص من i_3 من المعادلتين الأُخريين. إن الحل بالنسبة إلى i_3 وأخذ مشتقاته يعطي

$$i_3 = \frac{1}{20}\left(-\frac{50}{4} i_2 + 3\frac{di_4}{dt} + \frac{130}{4} i_4\right)$$

$$\frac{di_3}{dt} = \frac{1}{20}\left(-\frac{50}{4}\frac{di_2}{dt} + 3\frac{d^2 i_4}{dt^2} + \frac{130}{4}\frac{di_4}{dt}\right)$$

$$\frac{d^2 i_3}{dt^2} = \frac{1}{20}\left(-\frac{50}{4}\frac{d^2 i_2}{dt^2} + 3\frac{d^3 i_4}{dt^3} + \frac{130}{4}\frac{d^2 i_4}{dt^2}\right)$$

إن استبدال الحد $\frac{di_3}{dt}$ في معادلة الشبكة الضخمة ١+٢ ، والتبسيط يعطي

$$\frac{13}{8}\frac{di_2}{dt} + \frac{50}{4} i_2 - \frac{3}{20}\frac{d^2 i_4}{dt^2} - \frac{13}{8}\frac{di_4}{dt} - \frac{50}{4} i_4 = 15$$

إن استبدال i_3 ، و $\frac{di_3}{dt}$ و $\frac{d^2 i_3}{dt^2}$ في معادلة الشبكة ٣ بعد جمع الحدود المتشابهة يعطي

$$-\frac{13}{8}\frac{d^2 i_2}{dt^2}-\frac{50}{4}\frac{di_2}{dt}-312.5i_2+\frac{3}{20}\frac{d^3 i_4}{dt^3}+\frac{37}{8}\frac{d^2 i_4}{dt^2}+\frac{350}{4}\frac{di_4}{dt}+812.5i_4=0$$

وللتخلص من i_2 ، فإننا نستخدم طريقة العامل D على المعادلتين التفاضليتين لدينا يعطي

$$\left(\frac{13}{8}D+\frac{50}{4}\right)i_2+\left(-\frac{3}{20}D^2-\frac{13}{8}D-\frac{50}{4}\right)i_4=15$$

$$\left(-\frac{13}{8}D^2-\frac{50}{4}D-312.5\right)i_2+\left(\frac{3}{20}D^3+\frac{37}{8}D^2+\frac{350}{4}D+812.5\right)i_4=0$$

وللحل بالنسبة إلى i_4 ، فإننا نضرب مسبقاً المعادلة الأولى بـ $-\frac{13}{8}D^2-\frac{50}{4}D-312.5$ ونضرب المعادلة الثانية مسبقاً بـ $\frac{13}{8}D+\frac{50}{4}$ ، ومن ثم طرح المعادلة الأولى من المعادلة الثانية. وهذا يعطي

$$\left(7.875D^3+112.5D^2+1750D+6250\right)i_4=-\left(-\frac{13}{8}D^2-\frac{50}{4}D-312.5\right)\times 15$$

وبالعودة إلى المجال الزمني يعطي

$$4.875\frac{d^3 i_4}{dt^3}+112.5\frac{d^2 i_4}{dt^2}+1750\frac{di_4}{dt}+6250i_4=4687.5$$

لاحظ أن الحدود المُشتقة على الجانب الأيمن من معادلة العامل D تساوي صفراً ؛ لأن مشتق الثابت هو صفر. إن قسمة المعادلة التفاضلية السابقة على ٤.٨٧٥ لوضعها في شكل أكثر ملاءمة ينتج عنه

$$\frac{d^3 i_4}{dt^3}+23.1\frac{d^2 i_4}{dt^2}+359\frac{di_4}{dt}+6250i_4=1282.1$$

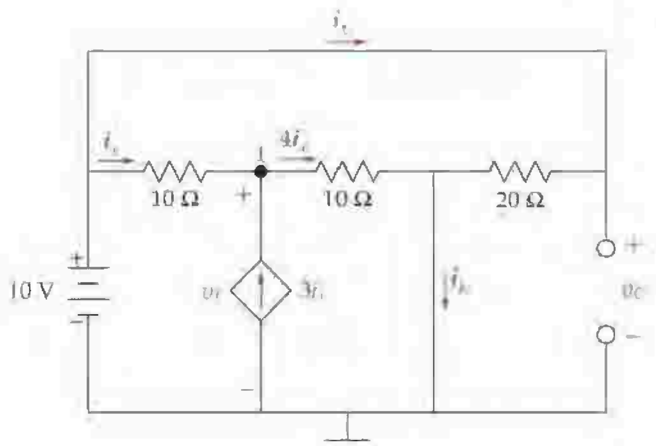
الشروط الابتدائية

تتضمن الخطوة التالية في الحل إيجاد الشروط الابتدائية للدارة والضرورية لحل المعادلة التفاضلية، $i_{L1}(0^+)$، و $\frac{di_{L1}(0^+)}{dt}$ و $\frac{d^2i_{L1}(0^+)}{dt^2}$. كما كان من قبل، فإن هذا يشمل:

١- تحليل الدارة عند $t = 0^-$ مع استبدال الملفات بدارات مقصورة والمكثفات بدارات مفتوحة

٢- تحليل الدار عند $t = 0^+$ مع استبدال الملفات بمصادر تيار قيمها تساوي قيم تيارات الملفات عند $t = 0^-$ والمكثف بمصدر جهد قيمته تساوي قيمة جهد المكثف عند $t = 0^-$.

وعندما $t = 0^-$، للتوصل إلى حل جهد العقدة يتم إعادة رسم الدارة كما هو موضح في مخطط الدارة التالي.



إن جمع التيارات الخارجة من العقدة ١ يعطي

$$\frac{v_1 - 10}{10} - 3\left(\frac{10 - v_1}{10}\right) + \frac{v_1}{10} = 0$$

حيث إن حل هذه المعادلة يعطي $v_1(0^-)=8V$. يعطي قانون أوم $i_{L1}(0^-)=\frac{10}{20}=0.5\ A$ و $i_x(0^-)=\frac{10-v_1(0^-)}{10}=\frac{10-8}{10}=0.2\,A$. وبما أن المكثف موصول على طرفي البطارية ، $v_C(0^-)=10V$. يعطي قانون كيرشوف للتيار (KCL) التيار المار خلال الملف الآخر كما يلي $i_{L2}(0^-)=4i_x(0^-)+i_{L1}(0^-)=0.8+0.5=1.3\,A$

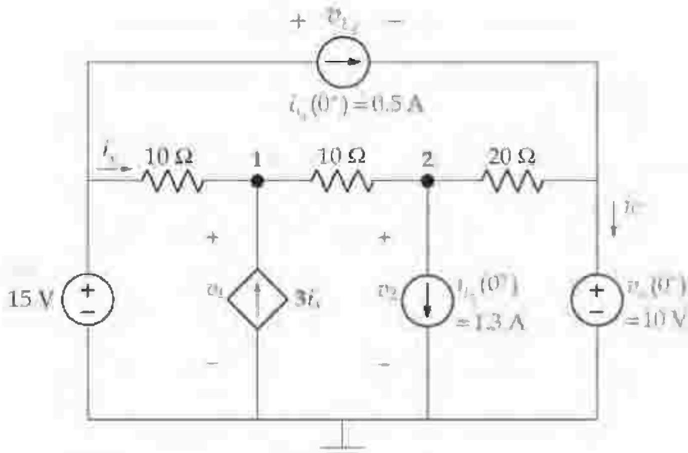
وعندما $t=0^+$ ، للتوصل إلى حل جهد العقدة، يتم إعادة رسم الدارة كما هو موضح في مخطط الدارة التالية.

لإيجاد الشروط الابتدائية من أجل الدارة عند $t=0^+$ ، فإننا نحل أولاً بالنسبة لجهود العقدة $v_1(0^+)$ و $v_2(0^+)$ ومن ثم نحل من أجل $\frac{di_{L1}(0^+)}{dt}$ و $\frac{d^2i_{L1}(0^+)}{dt^2}$. إن جمع التيارات الخارجة من العقدة ١ يعطي:

$$\frac{v_1-15}{10}-3\left(\frac{15-v_1}{10}\right)+\frac{v_1-v_2}{10}=0$$

إن تبسيط المعادلة يعطي

$$5v_1-v_2=60$$



وجمع التيارات الخارجة من العقدة ٢ يعطي:

$$\frac{\upsilon_2-\upsilon_2}{10}+1.3+\frac{\upsilon_2-10}{20}=0$$

بتبسيط المعادلة، يكون لدينا

$$-2v_1+3v_2=-16$$

إن حل معادلتي العقدة المتزامنتين يعطي

$$v_1(0^+)=12.6154 \quad and \quad v_2(0^+)=3.0769$$

تـــــــــــــــذكّر أن $v_C(0^+)=v_C(0^-)=10V$ ، و $i_{L1}(0^+)=i_{L1}(0^-)=0.5\,A$ ، و $i_{L2}(0^+)=i_{L2}(0^-)=1.3\,A$ من التحليل عند $t=0^-$.

تتضـــمن مهامنـــا التاليـــة إيجـــاد $\frac{di_{L1}(0^+)}{dt}$ و $\frac{d^2 i_{L1}(0^+)}{dt^2}$ باســـتخدام العلاقـــات $v_L=L_1\frac{di_{L1}}{dt}$ و $i_C=C\frac{dv_C}{dt}$. وعليه

$$\frac{di_{L_1}(0^+)}{dt}=\frac{1}{3}\upsilon_{L_1}(0^+)$$

واستخدام قانون كيرشوف للجهد (KVL) لإيجاد $v_{L1}(0^+)$ يعطي

$$-15+\upsilon_{L_1}(0^+)+\upsilon_C(0^+)=0$$

أو

$$\upsilon_{L_1}(0^+)=15-\upsilon_C(0^+)=15-10=5V$$

و

$$\frac{di_{L_1}(0^+)}{dt}=\frac{1}{3}\upsilon_{L_1}(0^+)=\frac{5}{3}\frac{A}{s}$$

ولـدينا أيضـاً $\frac{d^2 i_{L1}(0^+)}{dt^2}=\frac{1}{3}\frac{dv_{L1}(0^+)}{dt}$ ، ومـن قـانون كيرشـوف للجهـد (KVL) قبـل $v_{L1}=15-v_C$ وبعـــــد الاشـــــتقاق $\frac{dv_{L1}}{dt}=0-\frac{dv_C}{dt}=-\frac{dv_C}{dt}$. وعليـــــه الآن. $\frac{d^2 i_{L1}(0^+)}{dt^2}=\frac{1}{3}\frac{dv_{L1}(0^+)}{dt}=-\frac{1}{3}\frac{dv_C(0^+)}{dt}$

$$i_C(0^+)=\frac{\upsilon_2(0^+)-10}{20}+i_{L_1}(0^+)=\frac{3.0796-10}{20}+0.5=0.154A$$

و

$$\frac{d\upsilon_C(0^+)}{dt}=\frac{1}{C}i_C(0^+)=\frac{1000}{2}\times 0.154=77\,V/s$$

وعليه

$$\frac{d^2 i_{L_1}(0^+)}{dt^2}=\frac{1}{3}\frac{d\upsilon_C(0^+)}{dt}=-25.6667\,A^2/s$$

حل المعادلات التفاضلية

إن المعادلة التفاضلية التي تصف الدارة هي

$$\frac{d^3 i_4}{dt^3}+23.1\frac{d^2 i_4}{dt^2}+359\frac{di_4}{dt}+6250 i_4=1282.1$$

كما تم سابقاً، يتم تحديد الحل الطبيعي أولاً من خلال إيجاد جذور المعادلة المميزة،

$$s^3+23.1\,s^2+359\,s+6250$$

حيث $s_1=-20.4749$ ، و $s_{2,3}=-1.3125\pm j17.4221$. تؤدي الجذور إلى ظهور استجابة طبيعية

$$i_{4_n}(t)=K_1 e^{-20.4749t}+e^{-1.3125t}(K_2\cos(17.4221t)+K_3\sin(17.4221t))$$

بعد ذلك نحل من أجل الاستجابة القسرية بالنسبة للدخل من خلال الافتراض أن

$$i_{4_f}(t)=K_4$$

والذي عند استبداله في المعادلة التفاضلية الأصلية، ينتج

$$6250\,K_4 = 1281.1$$

وباعتبار $K_4 = 0.2050$. فإن الحل الإجمالي يساوي الاستجابة الطبيعية والقسرية، مكتوباً كما يلي:

$$i_4(t) = i_{4_n}(t) + i_{4_f}(t)$$

$$= K_1 e^{-20.4749t} + e^{-1.3125t}(K_2 \cos(17.4221t) + K_3 \sin(17.4221t)) + 0.2050$$

ويتم استخدام الشروط الابتدائية لتحديد الثوابت K_1، و K_2 و K_3. ومن الحل من أجل $i_4(t)$، يكون لدينا

$$i_4(0) = \frac{1}{2} = K_1 + K_2 + 0.2050$$

ولاستخدام الشرط الابتدائي التالي، نجد مشتق الحل، مما يعطي

$$\frac{di_4}{dt} = -20.41749 K_1 e^{-20.4749t} - 1.3125 e^{-1.3125t}(K_2 \cos(17.4221t) + K_3 \sin(17.4221t))$$
$$+ e^{-1.3125t}(-17.4221 K_2 \cos(17.4221t) + 17.4221 K_3 \sin(17.4221t))$$

نقوم بتقييم هذه الصيغة عند $t = 0$، مما يعطي

$$\frac{di_4(0)}{dt} = \frac{5}{3} = -20.41749 K_1 - 1.3125 K_2 + 17.4221 K_3$$

وأخيراً، فإننا نأخذ المشتق الثاني للحل مما يعطي

$$\frac{d^2i_4}{dt^2} = 419.2215K_1e^{-20.4749t} + 1.7227e^{-1.3125t}(K_2\cos(17.4221t) + K_3\sin(17.4221t))$$
$$-1.3125e^{-1.3125t}(-17.4221K_2\cos(17.4221t) + 17.4221K_3\sin(17.4221t))$$
$$-1.3125e^{-1.3125t}(-17.4221K_2\cos(17.4221t) + 17.4221K_3\sin(17.4221t))$$
$$+e^{-1.3125t}(-303.5296K_2\cos(17.4221t) + 303.5296K_3\sin(17.4221t))$$

نقوم بتقييم هذه الصيغة عند $t = 0$، مما يعطي

$$\frac{d^2i_4(0)}{dt^2} = -25.6667 = 419.2215K_1 + 1.7227K_2 - 2.6250\times 17.4221K_3 - 303.5296K_2$$
$$= 419.2215K_1 - 301.807K_2 - 45.733K_3$$

يتم وضع معادلات الشروط الابتدائية الثلاثة في شكل مصفوفة للتوصل إلى حل مباشر حيث $AK = F$ أو

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -20.4749 & -1.315 & 17.4221 \\ 419.2214 & -301.807 & -45.733 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.295 \\ \frac{5}{3} \\ -25.6667 \end{bmatrix}$$

باستخدام MATLAB، يكون لدينا

```
>> A = [1  1  0;  -20.4749  -1.3125  17.4221;  419.2215  -301.807  -45.733];
>> F = [0.295;  5/3;  -25.6667];
>> K = A\F
   K =
   0.1025
   0.1925
   0.2306
```

والحل الكامل هو

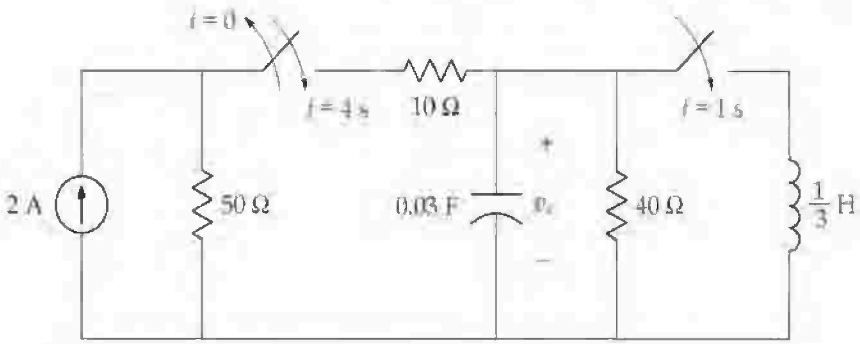
$$i_{L_1}(t) = i_4(t) = 0.1025e^{-20.4749t} + e^{-1.3125t}(0.1925\cos(17.4221t)$$
$$+ 0.2306\sin(17.4221t)) + 0.2050$$

عندما $t \geq 0$.

(١٠.٢) الدارات ذات المفاتيح
CIRCUITS WITH SWITCHES

لإنهاء هذا الجزء، نأخذ في الاعتبار الدارات ذات المفاتيح المتعددة. في الواقع، في كل مرة يتم فيها فتح مفتاح، فإننا نحل الدارة باستخدام تقنيات هذا الجزء وهذا يعني، عند كل زمن تبديل، t_i، علينا أن نحدد الجهود والتيارات اللازمة عند t_i^- و t_i^+ وحل مسألة الدارة، والانتقال إلى زمن التبديل التالي، وتحديد الجهود والتيارات اللازمة عند t_{i+1}^- و t_{i+1}^+ وحل مسألة الدارة، وهكذا. ولسهولة حل الدارة بعد زمن التبديل الأول عند $t=0$، فإننا نستبدل المتغير t بـ $t-t_1$ حيث t_1 هو زمن تبديل ويستخدم تابع خطوة الوحدة، ونكرر هذا الاستبدال عند كل زمن التبديل. ويتم تحليل كل فترة زمنية على حدة، مع الترحيل فقط من الفترة الزمنية الأولى إلى التالية للجهود على طرفي المكثفات والتيارات المارة خلال الملفات عند زمن التبديل. يوضح المثال التالي هذه الطريقة.

مثال (١٠.٧): المطلوب إيجاد v_C للدارة التالية عندما $t \geq 0$.

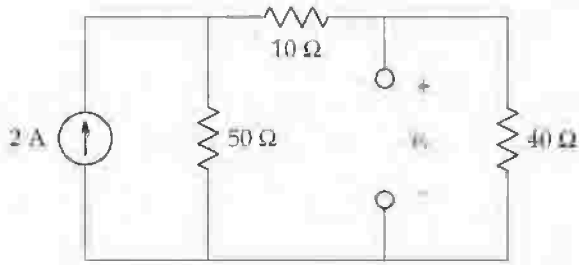


الحل: هناك مفتاحان يعملان في هذه الدارة، مع أزمنة تبديل عند $t=0$ و $t=1$ و $t=4$ ثانية. وعليه فإننا نقوم بتجزئة الحل إلى ثلاث فترات زمنية هي، $0 \leq t < 1$ و $1 \leq t < 4$

و $t \geq 4$ ثانية، ولتحقيق ذلك فإننا بحاجة إلى معرفة الشروط الابتدائية فقط قبل وبعد كل زمن تبديل، ويجب أيضاً إيجاد الحل لوضع الاستقرار عندما $t < 0$

عندما $t < 0$

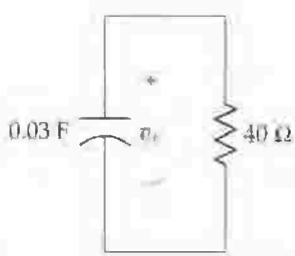
عند الحالة المستقرة، يتم استبدال المكثف بدارة مفتوحة كما هو موضح في الشكل التالي.



باستخدام قاعدة مُقسِّم التيار وقانون أوم، يكون لدينا $v_C(0^-) = 40\ V$. لاحظ أن الجهد لا يمكن أن يتغير بشكل فوري على طرفي المكثف، وعليه $v_C(0^+) = 40\ V$.

عندما $0 \leq t < 1$

خلال هذه الفترة الزمنية، فإن المفتاح على الجهة اليسرى يفتح، تاركاً لنا الدارة التالية لتحليلها.



لاحظ أنه يتم التخلص من المقاومة ١٠ أوم لأنه لا يتدفق أي تيار خلالها لأنها دائرة مفتوحة. باستخدام قانون كيرشوف للتيار (KCL) يكون لدينا

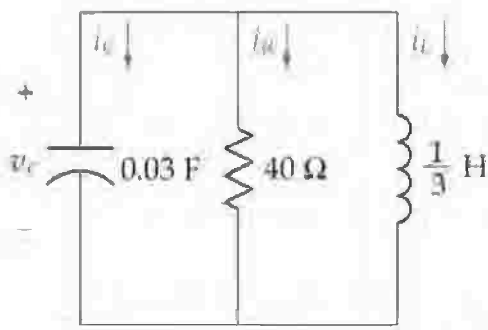
$$0.03\dot{v}_C + \frac{v_C}{40} = 0$$

إن للمعادلة التفاضلية جذراً يساوي $-\frac{1}{1.2}$ وحل في هذه الفترة الزمنية هو

$$v_C = v_C(0^+)e^{-\frac{t}{1.2}}u(t) = 40e^{-\frac{t}{1.2}}u(t)\ V$$

عندما $1 \le t < 4$

عندما $t=1$ ، فإن المفتاح في الجهة اليمنى يغلق، ويدخل ملف إلى الدارة كما هو موضح في الشكل التالي.



إن تطبيق قانون كيرشوف للتيار (KCL) يعطي

$$0.03\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{40} + 5\int_0^t v_C d\lambda + i_L(1^+) = 0$$

بقسمة المعادلة السابقة على ٠.٠٣ والتفاضل يعطي

$$\ddot{v}_C + \frac{1}{1.2}\dot{v}_C + \frac{5}{0.03}v_C = 0$$

مع جذور عقدية (مركبة) محددة بواسطة MATLAB وهي $-0.42 \pm 12.9j$. يتكون الحل من الحل الطبيعي فقط، لأن الاستجابة القسرية تساوي صفراً، وتُعطى من خلال:

$$v_C = e^{-0.42(t-1)}(K_1\cos(12.9(t-1)) + K_2\sin(12.9(t-1)))(u(t-1) - u(t-4))$$

يتطلب هذا الحل شرطين ابتدائيين. تذكّر أنه عند $t=1$ ، و $v_C(1^+)=v_C(1^-)$ ، و $i_L(1^+)=i_L(1^-)$. وعلاوة على ذلك، فإن جميع الجهود والتيارات الأخرى ومشتقاتها تتغير من $t=1^-$ إلى $t=1^+$ ثانية. الآن باستخدام الحل من أجل v_C في الفترة الزمنية السابقة، يكون لدينا

$$\upsilon_C(1^+)=\upsilon_C(1^-)=40e^{-\frac{t}{1.2}}=17.4V$$

ومن حلنا في هذه الفترة الزمنية، يكون لدينا

$$\upsilon_C(1^+)=K_1=17.4V$$

وبما أنه لم يكن هناك تيار يتدفق من خلال الملف خلال الفترة الزمنية $0\le t<1$ فإن $i_L(1^+)=i_L(1^-)=0A$. الآن $i_R(1^+)=\frac{v_C(1^+)}{40}=\frac{17.4}{40}=0.44\,A$ ، ووفقاً لذلك يكون

$$\upsilon_C(1^+)=-(i_L(1^+)+i_R(1^+))=-(0+0.44)=-0.44A$$

$$\dot{\upsilon}_C(1^+)=\frac{1}{C}i_C(1^+)=-14.5V$$

الآن

$$\dot{\upsilon}_C=\begin{pmatrix}-0.42e^{-0.42(t-1)}(K_1\cos(12.9(t-1))+K_2\sin(12.9(t-1)))\\+e^{-0.42(t-1)}(-12.9K_1\sin(12.9(t-1))+12.9K_2\cos(12.9(t-1)))\end{pmatrix}\times(u(t-1)-u(t-4))$$

و

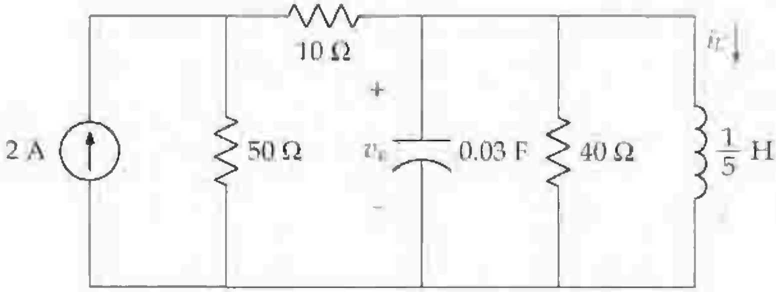
$$\dot{\upsilon}_C(1^+)=-14.5=-0.42K_1+12.9K_2=-0.42\times17.4+12.9K_2$$

الذي يعطي $K_2=-0.557$. وحلنا الكامل هو

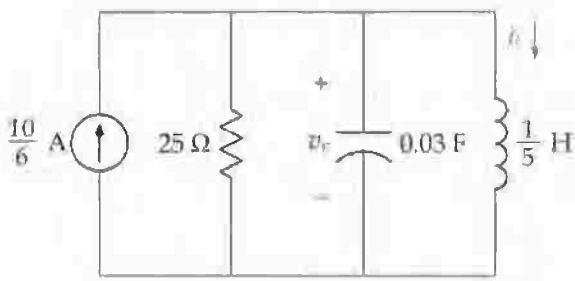
$$\upsilon_C=e^{-0.42(t-1)}(17.4\cos(12.9(t-1))-0.557\sin(12.9(t-1)))(u(t-1)-u(t-4))V$$

عندما $t>4$

في الفترة الزمنية الماضية، فإن المفتاح على جهة اليسار يغلق، وهذا يعطينا الشكل التالي لتحليله.



لتسهيل الحل، يتم تحويل مصدر التيار ٢ أمبير مع المقاومة ٥٠ أوماً إلى مصدر جهد ١٠٠ فولت على التسلسل مع المقاومة ٥٠ أوماً. يتم جمع المقاومات ٥٠ و ١٠ أوم مع بعضهما البعض، وتحويل مصدر الجهد ١٠٠ فولت والمقاومة ٦٠ أوماً إلى مصدر تيار $\frac{10}{6}$ أمبير على التفرع مع المقاومة ٦٠ أوم. يتم جمع المقاومات ٤٠ و ٦٠ أوماً لإعطاء مقاومة ٢٤ أوماً. إن الدارة المُخفّضة مبينة في الدارة التالية.



إن تطبيق قانون كيرشوف للتيار (KCL) يعطي

$$-\frac{10}{6}+\frac{\upsilon_C}{24}+0.03\dot{\upsilon}_C+5\int_1^t \upsilon_C d\lambda+i_L(4^+)=0$$

بتفاضل المعادلة السابقة، وقسمتها على ٠.٠٣ يعطي

$$\ddot{v}_C + 1.4\dot{v}_C + 166.7v_C = 55.6$$

مع جذور محددة بواسطة MATLAB وهي $-0.7 \pm 12.9j$. إن الجذور العقدية، مما يؤدي إلى ظهور استجابة طبيعية

$$v_C = e^{-0.7(t-1)}(K_1 \cos(12.9(t-4)) + K_2 \sin(12.9(t-4)))u(t-4)$$

بعد ذلك، فإننا نحل للاستجابة القسرية بالنسبة إلى الدخل بافتراض $y_f(t)=K_3$. عند استبداله في المعادلة التفاضلية التي تصف هذه الفترة الزمنية، فإن هذا يعطي

$$166.7K\,K_3 = 55.6$$

ومع الأخذ في اعتبار ١١.١ فإن الحل الكلي في هذه الفترة الزمنية يساوي الاستجابة الطبيعية والقسرية، يمكن كتابته كما يلي:

$$v_C = 11.1 + e^{-0.7(t-1)}(K_1 \cos(12.9(t-4)) + K_2 \sin(12.9(t-4)))u(t-4)$$

هناك حاجة إلى شرطين ابتدائيين ($v_C(4^+)$ و $\dot{v}_C(4^+)$) لتحديد الثوابت K_1 و K_2. كما كان من قبل، فإنه عند $t=4$ ، و $v_C(4^+)=v_C(4^-)$ ، و $i_L(4^+)=i_L(4^-)$ ، وجميع الجهود والتيارات الأخرى، ومشتقاتها تتغير من $t=4^-$ إلى $t=4^+$ ثانية. باستخدام الحل من أجل v_C من الفترة الزمنية السابقة، يكون لدينا

$$\begin{aligned}
v_C(4^+) = v_C(4^-) &= e^{-0.42(t-1)}(17.4\cos(12.9(t-1)) - 0.557\sin(12.9(t-1))) \\
&\quad \times (u(t-1) - u(t-4))\big|_{t=4^-} \\
&= e^{-0.42(4-1)}(17.4\cos(12.9(4-1)) - 0.557\sin(12.9(4-1))) \\
&= 2.5V
\end{aligned}$$

ومن حلنا في هذه الفترة الزمنية، يكون لدينا

$$v_C(4^+) = 11.1 + K_1 = 2.53V$$

و $K_1 = -8.6V$. يتم تحديد الشرط الابتدائي التالي، $\dot{v}_C(4^+) = \frac{1}{0.03} i_C(4^+)$ ، من قانون كيرشوف للتيار (KCL)

$$-\frac{10}{6} + \frac{\upsilon_C(4^+)}{24} + i_C(4^+) + i_L(4^+) = 0$$

حيث $i_L(4^+) = i_L(4^-)$. ولإيجاد $i_L(4^-)$ نستخدم الحل من أجل v_C في الفترة الزمنية السابقة ونحسب

$$\begin{aligned}
i_L(4^+) = i_L(4^-) &= 5\int_1^4 \upsilon_C dt + i_L(4^+) = 5\int_1^4 \upsilon_C dt + 0 \\
&= 5\int_1^4 (e^{-0.42(t-1)}(17.4\cos(12.9(t-1)) - 0.557\sin(12.9(t-1)))dt \\
&= e^{-0.42(4-1)}(-0.0037\cos(12.9(t-1)) + 6.74\sin(12.9(t-1)))\Big|_1^4 \\
&= 1.614A
\end{aligned}$$

الآن $i_R(1^+) = \frac{v_C(4^+)}{24} = \frac{2.53}{24} = 0.105\,A$ و

$$i_C(4^+) = \frac{10}{6} - \frac{\upsilon_C(4^+)}{24} - i_L(4^+) = \frac{10}{6} - \frac{2.53}{24} - 1.614 = -0.05A$$

$$\dot{\upsilon}_C(4^+) = \frac{1}{C} i_C(4^+) = -1.75V$$

الآن

$$\dot{\upsilon}_C = \begin{pmatrix} -0.7e^{-0.7(t-4)}(K_1\cos(12.9(t-4)) + K_2\sin(12.9(t-4))) \\ +e^{-0.7(t-4)}(-12.9K_1\sin(12.9(t-4)) + 12.9K_2\cos(12.9(t-4))) \end{pmatrix} u(t-4)$$

و

$$\dot{\upsilon}_C(4^+) = -1.75 = -0.7K_1 + 12.9K_2$$

مع $K_1 = -8.6$ ، يكون لدينا $K_2 = -0.6$. وحلنا لهذه الفترة الزمنية هو

$$\upsilon_C = 11.1 + e^{-0.7(t-4)}(-8.6\cos(12.9(t-4)) - 0.6\sin(12.9(t-4)))u(t-4)V$$

وبالتلخيص يكون حلنا الكامل

$$\upsilon_C = \begin{cases} 40e^{-\frac{1}{1.2}}V & 0 \le t < 1 \\ e^{-0.42(t-1)}(17.4\cos(12.9(t-1)) - 0.557\sin(12.9(t-1)))V & 1 \le t < 4 \\ 11.1 + e^{-0.7(t-4)}(-8.6\cos(12.9(t-4)) - 0.6\sin(12.9(t-4)))V & t \ge 4 \end{cases}$$