الفصل الثاني عشر

الإشارات المتغيرة مع الزمن
Time-Varying Signals

إن مصدر التيار المتناوب (AC) أو المصدر الجيبي ذا التردد ٥٠ هرتزاً أو ٦٠ هرتزاً شائع في جميع أنحاء العالم كمصدر للتغذية لتزويد معظم المعدات والأجهزة الأخرى بالطاقة. في حين أن معظم هذا الفصل يركّز على الاستجابة العابرة؛ إلاّ أنه عند التعامل مع المصادر الجيبية، يتم تركيز الاهتمام على الحالة المستقرة أو الاستجابة القسرية. في التجهيزات الحيوية، يقوم التحليل في الحالة المستقرة بتبسيط التصميم من خلال التركيز فقط على استجابة الحالة المستقرة، حيث يعمل الجهاز في الواقع. إن مصدر الجهد الجيبي هو إشارة متغيرة مع الزمن تُعطى بالعلاقة التالية

$$v_s = V_m \cos(\omega t + \phi) \qquad (١٢.١)$$

حيث يتم تحديد الجهد من خلال التردد الزاوي (ω بالراديان/الثانية)، وزاوية الطور (ϕ بالراديان أو الدرجة)، ومطال (مقدار) الذروة (V_m). إن دور المنحني الجيبي مرتبط بالتردد f (هرتز أو دورة/ثانية) والتردد الزاوي بالعلاقة التالية

$$\omega = 2\Pi f = \frac{2\Pi}{T} \qquad (١٢.٢)$$

إن أحد المقاييس الهامة للمنحني الجيبي هو قيمة الـ rms له (الجذر التربيعي للقيمة المتوسطة لمربع التابع (الدالة)) (square root of the mean value of the squared function)، التي تُعطى من خلال العلاقة

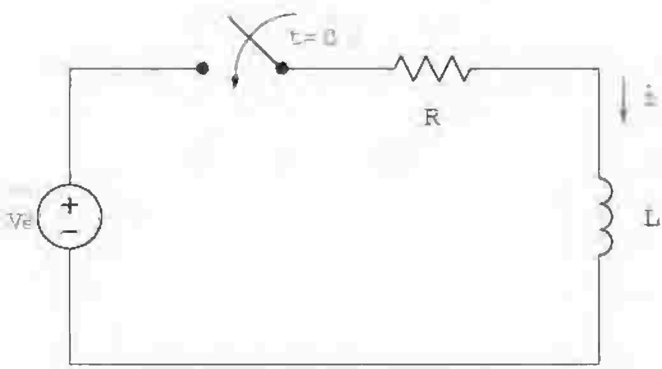
$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V_m^2 \cos^2(\omega t + \phi)dt} \qquad (١٢.٣)$$

التي تنخفض إلى $V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$.

ولتقدير الاستجابة بالنسبة إلى دخل متغير مع الزمن، $v_s = V_m \cos(\omega t + \phi)$، خذ في الاعتبار الدارة المبينة في الشكل رقم (١٢.١) التي يتم فيها إغلاق المفتاح عند $t = 0$ وليس هناك طاقة ابتدائية مُخزّنة في الملف،

بتطبيق قانون كيرشوف للجهد (KVL) على هذه الدارة يتم الحصول على ما يلي:

$$L\frac{di}{dt} + iR = V_m \cos(\omega t + \phi)$$



الشكل رقم (١٢.١). دارة RL ذات دخل جيبي.

وبإجراء بعض الحسابات، يكون الحل

$$i = i_n + i_f$$
$$= \frac{-V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \cos\left(\phi - \frac{\omega L}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \cos\left(\omega t + \phi - \frac{\omega L}{R}\right)$$

إن الحد الأول هو الاستجابة الطبيعية التي تذهب إلى الصفر عندما يذهب t إلى اللانهاية. إن الحد الثاني هو الاستجابة القسرية التي لها نفس شكل الدخل (أي، منحني جيبي له نفس التردد الزاوي (ω)، ولكن زاوية طور ومطال أعظمي مختلفان). إذا كان الجميع يهتمون باستجابة الحالة المستقرة كما هو الحال في معظم تطبيقات التجهيزات الحيوية، تكون المجاهيل الوحيدة عندئذ هي مطال الاستجابة وزاوية الطور. يتعامل ما تبقى من هذا الجزء مع تقنيات تتضمن المتجه (الشعاع) الطوري (phasor) لإيجاد هذه المجاهيل بكفاءة.

(١٢.١) المتجهات (الأشعة) الطورية
PHASORS

إن المتجه الطوري هو عدد مركب يحتوي على معلومات المطال وزاوية الطور لمنحنٍ جيبي، وبالنسبة للإشارة في المعادلة.رقم (١٢.١) فإنه يتم التعبير عنها على النحو التالي:

$$V = V_m e^{j\phi} = V_m \angle\phi \qquad (١٢.٤)$$

يتم في المعادلة.رقم (١٢.١)، بالممارسة العملية، كتابة الزاوية في الأس بالراديان، وفي.الكتابة على شكل $\angle\phi$ بالدرجة. يتضمن العمل في مجال المتجه الطوري استخدام الجبر المعقد (المركب) في الانتقال بين المجال الزمني ومجال المتجه الطوري، لذلك، يتم أيضاً استخدام الشكل المثلثي للمتجه الطوري، ويُعطى على النحو التالي

$$V = V_m(\cos\phi + j\sin\phi) \qquad (١٢.٥)$$

(١٢.٢) العناصر غير الفعالة للدارات في مجال المتجه الطوري
PASSIVE CIRCUIT ELEMENTS IN THE PHASOR DOMAIN

لاستخدام المتجهات الطورية مع العناصر غير الفعالة لدارة للحصول على حلول الحالة المستقرة، فإن هناك حاجة إلى العلاقة بين الجهد و التيار للمقاومة، والملف، والمكثف. افترض أن

$$i = I_m \cos(\omega t + \theta)$$
$$I = I_m \angle\theta = I_m e^{j\theta}$$

وبالنسبة لمقاومة،

$$v = IR = RI_m \cos(\omega t + \theta)$$

والمتجه الطوري للجهد V هو

$$V = RI_m \angle\theta = RI \qquad (١٢.٦)$$

لاحظ أنه لا توجد إزاحة بالطور بالنسبة للعلاقة بين تيار وجهد المتجه الطوري للمقاومة.

وبالنسبة لملف،

$$v = L\frac{di}{dt} = -\omega LI_m \sin(\omega t + \theta) = -\omega LI_m \cos(\omega t + \theta - 90^\circ)$$

والمتجه الطوري للجهد V هو

$$\begin{aligned} V &= -\omega LI_m \angle\theta - 90^\circ = -\omega LI_m e^{j(\theta - 90^\circ)} \\ &= -\omega LI_m e^{j\theta} e^{-j90} = -\omega LI_m e^{j\theta}(-j) \\ &= j\omega LI_m e^{j\theta} \\ &= j\omega LI \end{aligned} \qquad (١٢.٧)$$

لاحظ أن تيار الملف وجهده مختلفان بالطور بمقدار ٩٠ درجة، حيث يتخلف التيار عن الجهد بمقدار ٩٠ درجة.

وبالنسبة لمكثف، حدد $v = V_m \cos(\omega t + \theta)$ و $V = V_m \angle \theta$. والآن

$$i = C\frac{dv}{dt} = C\frac{d}{dt}\left(V_m \cos(\omega t + \theta)\right)$$
$$= -CV_m \omega \sin(\omega t + \theta) = -CV_m \omega \cos\left(\omega t + \theta - 90^\circ\right)$$

والمتجه الطوري للتيار i هو

$$I = -\omega C V_m \angle \theta - 90^\circ = -\omega C V_m e^{j\theta} e^{-j90}$$
$$= -\omega C V_m e^{j\theta}\left(\cos(90^\circ) - j\sin(90^\circ)\right)$$
$$= j\omega C V_m e^{j\theta}$$
$$= j\omega C V$$

أو

$$V = \frac{1}{j\omega C} I = \frac{-j}{\omega C} I \qquad (١٢.٨)$$

لاحظ أن تيار وجهد المكثف مختلفان بالطور بمقدار ٩٠ درجة، حيث يتخلف الجهد عن التيار بمقدار ٩٠ درجة.

إن المعادلات رقم (١٢.٦) ورقم (١٢.٧) ورقم (١٢.٨) جميعها لها الشكل **V = Z I**، حيث **Z** تمثل ممانعة عنصر الدارة، وهي بصفة عامة، عدد مركب، ذو وحدة قياس هي الأوم. وتكون الممانعة للمقاومة هي R، وللملف $j\omega L$، وللمكثف $\frac{-j}{\omega C}$.

إن الممانعة هي عدد مركب وليست متجهاً طورياً على الرغم من أنها قد تبدو وكأنها متجه طوري. ويطلق على الجزء التخيلي للممانعة السماحية.

إن الجزء الأخير للعمل في مجال المتجه الطوري هو تحويل مخطط الدارة من المجال الزمني إلى مجال المتجه الطوري. على سبيل المثال، يتم تحويل الدارة المبينة في الشكل

رقم (١٢.٢) إلى مجال المتجه الطوري، كما هو موضح في الشكل رقم (١٢.٣)، من خلال استبدال كل عنصر من عناصر الدارة مع الممانعة المكافئة والمصادر بمتجهها الطوري. وبالنسبة لمصدر الجهد، يكون لدينا

$$v_s = 100\sin 500t = 100\cos(500t - 90^\circ)\ mV \leftrightarrow 500\angle -90^\circ\ mV$$

وبالنسبة للمكثف، يكون لدينا

$$0.5\mu F \leftrightarrow \frac{-j}{\omega C} = -j4000\Omega$$

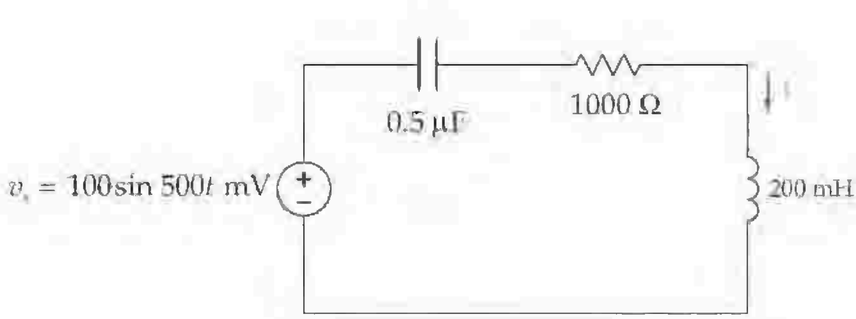
وبالنسبة للمقاومة، يكون لدينا

$$1000\Omega \leftrightarrow 1000\Omega$$

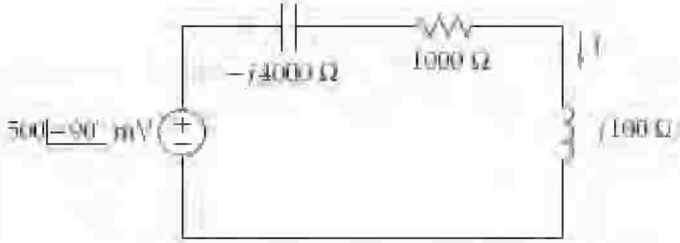
وبالنسبة للملف، يكون لدينا

$$200\,mH \leftrightarrow = j\omega L = j100\Omega$$

يتم استبدال كل عنصر من العناصر بمتجهه الطوري وممانعته المكافئتين كما هو مبين في الشكل رقم (١٢.٣).



الشكل رقم (١٢.٢). مخطط دارة.



الشكل رقم (١٢.٣). دارة مكافئة بممانعة ومتجه طوري للشكل رقم (١٢.٢).

(١٢.٣) قوانين كيرشوف والتقنيات الأخرى في مجال المتجه الطوري
KIRCHOFF'S LAWS AND OTHER TECHNQUES IN THE PHASOR DOMAIN

لحسن الحظ فإن جميع المواد التي تم تقديمها من قبل في هذا الفصل تتضمن قوانين كيرشوف للتيار والجهد، وأن جميع التقنيات الأخرى تنطبق على المتجهات الطورية. فمثلاً، بالنسبة لقانون كيرشوف للجهد (KVL)، فإن مجموع جهود المتجهات الطورية حول أي مسار مغلق يساوي صفراً.

$$\sum V_i = 0 \qquad (12.9)$$

وبالنسبة إلى لقانون كيرشوف للتيار (KCL)، فإن مجموع تيارات المتجهات الطورية الخارجة من أي عقدة يساوي صفراً

$$\sum I = 0 \qquad (12.10)$$

وتُعطى الممانعات على التسلسل (التوالي) بالعلاقة التالية

$$Z = Z_1 + \cdots + Z_n \qquad (12.11)$$

وتُعطى الممانعات على التفرع (التوازي) بالعلاقة التالية

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \cdots + \frac{1}{Z_n}} \qquad (١٢.١٢)$$

إن طريقة جهد العقدة، بالإضافة إلى التراكب ودارات ثيفنن (Th'evenin) المكافئة قابلة للتطبيق في فضاء المتجه الطوري. ويوضح المثالان التاليان هذه العملية، مع الجانب الأكثر صعوبة الذي يتضمن الجبر العقدي (المركب).

مثال مسألة (١٢.١):

المطلوب إيجاد استجابة الحالة المستقرة i للدارة المبينة في الشكل رقم (١٢.٣).

الحل: إن ممانعة الدارة هي

$$Z = -i4000 + 1000 + j100 = 1000 - j3900\,\Omega$$

وباستخدام قانون أوم،

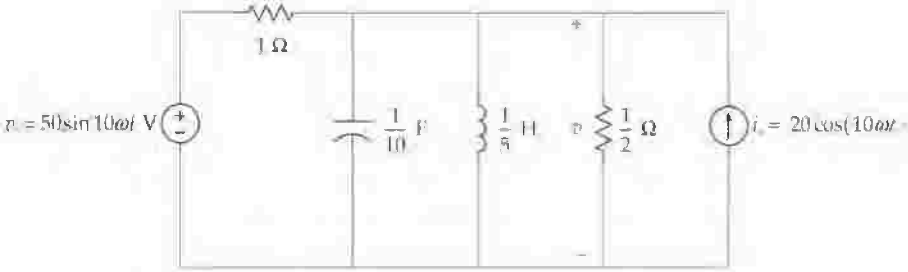
$$I = \frac{V}{Z} = \frac{0.5\angle-90^\circ}{1000 - j3900} = \frac{0.5\angle-90^\circ}{4026\angle-76^\circ} = 124\angle-14^\circ\ \mu A$$

وبالعودة إلى المجال الزمني، فإن تيار الحالة المستقرة هو

$$i = 124\cos(500t - 14^\circ)\ \mu A$$

مثال مسألة (١٢.٢):

المطلوب إيجاد استجابة الحالة المستقرة v باستخدام طريقة جهد العقدة للدارة التالية.



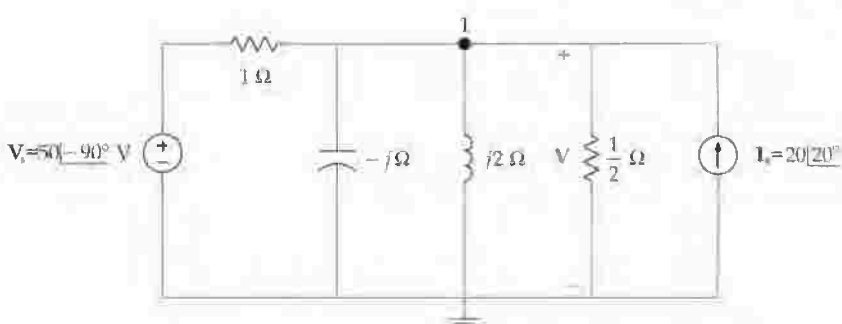
الحل: إن الخطوة الأولى هي تحويل عناصر الدارة إلى ممانعاتها التي تساوي في حالة المكثف و الملف ما يلي

$$\frac{1}{10}F \leftrightarrow \frac{-j}{\omega C} = -j\Omega$$
$$\frac{1}{5}H \leftrightarrow j\omega L = j2\Omega$$

والمتجهات الطورية للمصدرين هي:

$$v_s = 50\sin \omega t\ V \leftrightarrow V_s = 50\angle -90^\circ\ V$$
$$i_s = 20\cos(\omega t + 20^\circ)\ A \leftrightarrow I_s = 20\angle 20^\circ$$

ونظراً لأن المقاومتين تحتفظان بقيمهما، فإن رسم المتجه الطوري للدارة مبين في الشكل التالي مع الأرضي عند العقدة السفلى.



وبكتابة معادلة جهد العقدة للعقدة رقم ١ يكون لدينا:

$$V - 50\angle -90^\circ + \frac{V}{-j} + \frac{V}{j2} + 2V - 20\angle 20^\circ = 0$$

وبجمع الحدود المتشابهة، والتحويل إلى الشكل المثلثي والتحويل إلى الشكل القطبي ينتج ما يلي:

$$V\left(3+\frac{j}{2}\right) = 50\angle -90^\circ + 20\angle 20^\circ$$

$$V\left(3+\frac{j}{2}\right) = -50j + 18.8 + j6.8 = 18.8 - j43.2$$

$$V \times 3.04\angle 9.5^\circ = 47.1\angle -66.5^\circ$$

$$V = \frac{47.1\angle -66.5^\circ}{3.04\angle 9.5^\circ} = 15.5\angle -76^\circ$$

ويكون حل الحالة المستقرة ما يلي

$$v = 15.6\cos(10t - 76^\circ)V$$