الفصل الرابع

المقاومة
Resistance

(٤.١) المقاومات
RESISTORS

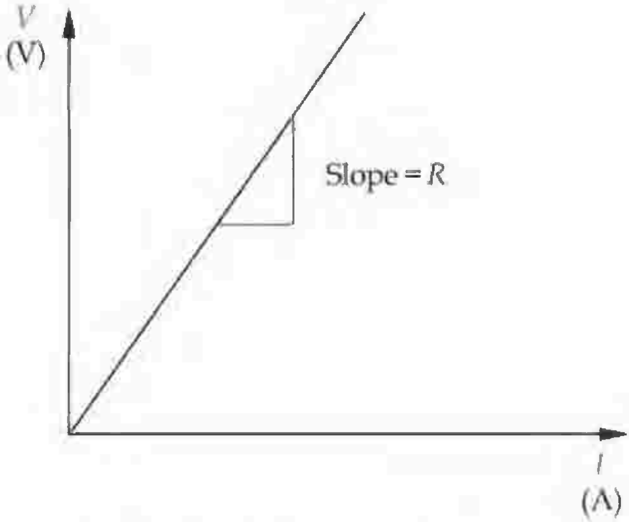
إن المقاومة هي عنصر دارة يحد من تدفق التيار خلاله ويُشار إليه بالرمز ⩘⩘ . إن المقاومات مصنوعة من مواد مختلفة وتعطى قدرتها على إعاقة التيار من خلال قيمة المقاومة، ويُشار إليها R. يتم قياس المقاومة بوحدة الأوم (Ω) حيث ١ أوم يساوي ١ فولت مقسوماً على ١ أمبير ($1\ \Omega = 1\ \text{V/A}$). من الناحية النظرية فإن السلك المجرد الذي يربط عناصر الدارة مع بعضها البعض لديه مقاومة تساوي الصفر. إن الفجوة بين عناصر الدارة لديها مقاومة لانهائية. تتبع المقاومة المثالية قانون أوم، الذي يصف العلاقة الخطية بين الجهد والتيار، كما هو مبين في الشكل رقم (٤.١)، مع ميل يساوي المقاومة.

هناك طريقتان لكتابة قانون أوم، اعتماداً على اتجاه التيار وقطبية الجهد. ويتم كتابة قانون أوم للشكل.رقم (A.٤.٢) كما يلي:

$$v = iR \tag{٤.١}$$

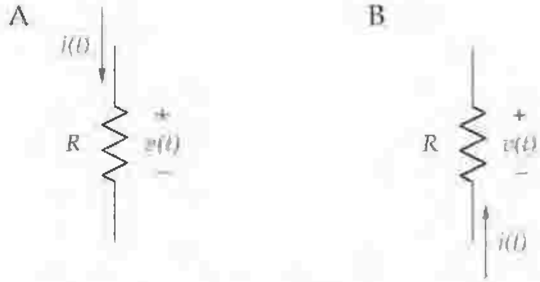
وللشكل رقم (B.٤.٢) كما يلي:

$$v = -iR \tag{٤.٢}$$

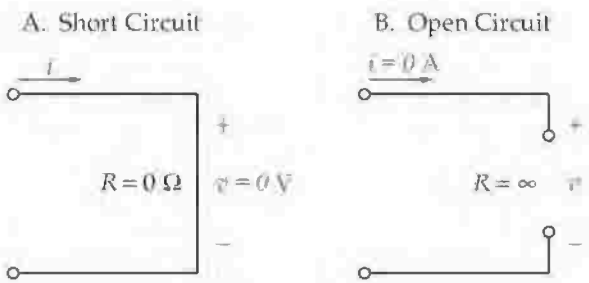


الشكل رقم (٤.١). العلاقة بين الجهد والتيار لمقاومة.

سوف نستخدم في هذا الكتاب المبدأ المُبين في الشكل رقم (A.٤.٢) لكتابة هبوط الجهد على طرفي المقاومة. وكما هو موضح، فإن الجهد على طرفي مقاومة يساوي حاصل ضرب التيار الذي يتدفق خلال العنصر في مقاومته، R. لا تنطبق العلاقة الخطية على الجهود والتيارات العالية جداً. تُظهر بعض المواد الناقلة للكهرباء السلوك الخطي على مجال صغير جداً من التيارات والجهود. وهذا ينطبق على العديد من النماذج الفيزيولوجية حيث يتم ملاحظة الخطية فقط ضمن مجال من القيم. وخارج هذا المجال فإن هذا النموذج غير خطي. نعرِّف الدارة المقصورة كما هو مبين في الشكل رقم (A.٤.٣) مع $R = 0$، ولديها هبوط جهد يساوي **صفر** فولت. نعرِّف الدارة المفتوحة كما هو موضح في الشكل رقم (B.٤.٣) مع $R = \infty$، ولديها تيار يساوي **صفر** أمبير يمر خلالها.



الشكل رقم (٤.٢). عنصر مقاوم ذو مقاومة R بالأوم (Ω).



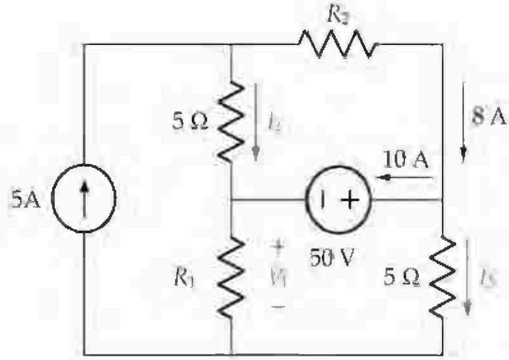
الشكل رقم (٤.٣). الدارات المقصورة و المفتوحة.

كل مادة لها خاصية تسمى المقاومة النوعية *(ρ)* التي تشير إلى مقاومة المادة. إن الناقلية (التوصيلية) *(σ)* هي معكوس المقاومة النوعية، والسماحية *(G)* هي معكوس المقاومة. يتم قياس السماحية بوحدات تسمى سيمنز (S) ولها وحدات الـ A/V. يمكن كتابة قانون أوم بدلالة السماحية كما يلي:

$$i = Gv \qquad (٤.٣)$$

مثال (٤.١):

المطلوب إيجاد I_2، و I_3، و V_1 في الدارة التالية:



الحل: نجد أولاً I_2 من خلال تطبيق قانون كيرشوف للتيار (KCL) على العقدة في الفرع الأيسر العلوي من الدارة.

$$-5+I_2+8=0$$

و

$$I_2=-3A$$

يتم تحديد التيار I_3 من خلال تطبيق قانون كيرشوف للتيار (KCL) على العقدة في يمين الدارة.

$$10+I_3-8=0$$

و

$$I_3=-2A$$

يتم تحديد الجهد V_1 من خلال تطبيق قانون كيرشوف للجهد (KVL) حول المسار المغلق الأيمن السفلي واستخدام قانون أوم.

$$-V_1-50+5I_3=0$$

$$V_1=-50+5x(-2)=-60V$$

(٤.٢) القدرة (الاستطاعة)
POWER

يتم إعطاء القدرة المُستهلكة من قبل مقاومة من خلال جمع المعادلة رقم (٣.٦)، وإما المعادلة رقم (٤.١) أو المعادلة رقم (٤.٢) كما يلي:

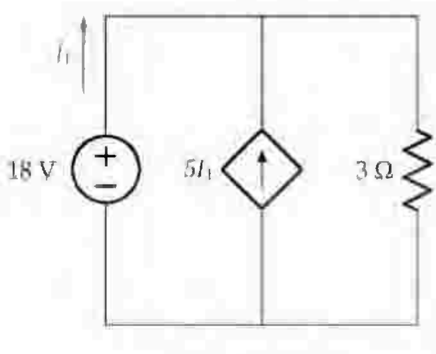
$$p = vi = \frac{v^2}{R} = i^2 R \qquad (٤.٤)$$

وإصدارها على شكل حرارة. توضح المعادلة رقم (٤.٤) أنه يتم استهلاك الطاقة من قبل المقاومة بغض النظر عن قطبية الجهد واتجاه التيار. إن استطاعة المقاومة هي دائماً موجبة، وهو ما ينطبق على أي عنصر غير فعال.

مثال (٤.٢):

احسب القدرة في كل عنصر من الدارة التالية.

الحل: نلاحظ أولاً أن المقاومة على اليمين لديها ١٨ فولتاً على طرفيها، وعليه فإن التيار خلالها، وفقاً لقانون أوم، هو $\frac{18}{3}=6A$. ولإيجاد التيار I_1 نطبق قانون كيرشوف للتيار (KCL) على العقدة العلوية وهذا يعطي:



$$-I_1 - 5I_1 + 6 = 0$$

أو

$$I_1 = 1A$$

إن القدرة لكل عنصر من عناصر الدارة هي :

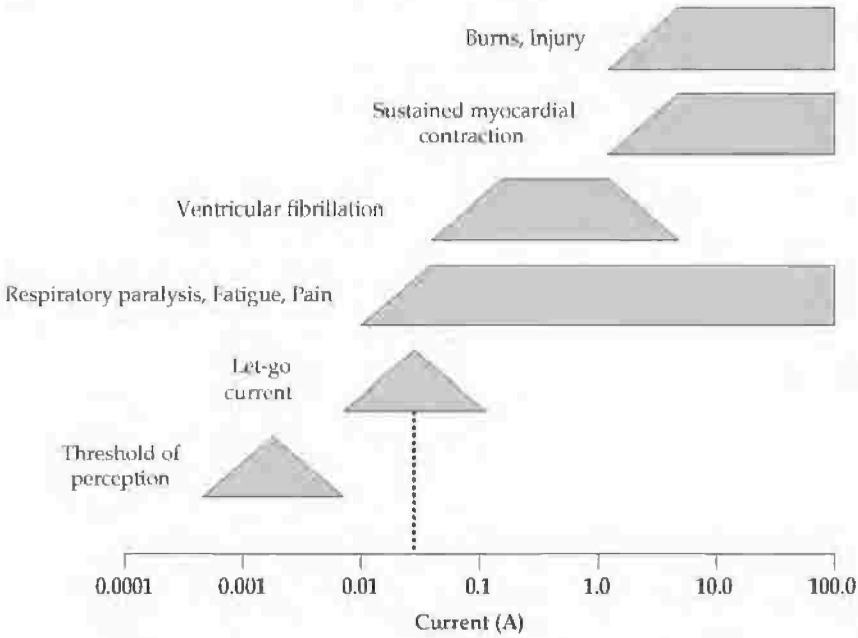
$$p_{18V} = -I_1 x18 = -18W$$
$$p_{5i_1} = -18x5I_1 = -90W$$
$$p_{3\Omega} = \frac{18^2}{3} = 108W$$

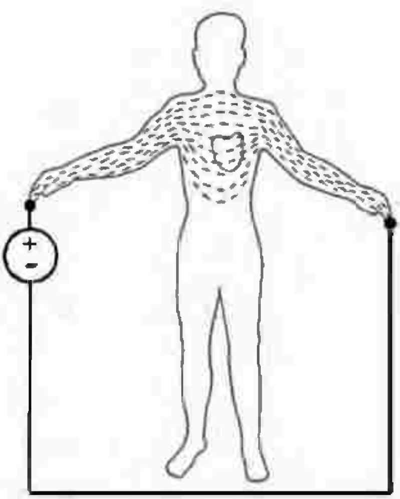
إن القدرة التي تقدمها العناصر الفعالة في أي دارة تساوي دائماً القدرة المُستهلكة. وهنا فإن القدرة المتولدة تساوي ١٠٨ وات والقدرة المُستهلكة تساوي ١٠٨ وات ، كما هو مطلوب.

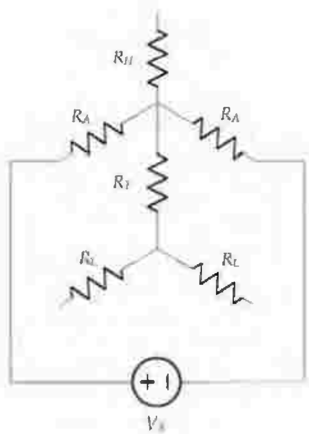
مثال (٤.٣) :

إن السلامة الكهربائية ذات أهمية قصوى في المستشفى أو البيئة الإكلينيكية. إذا تم السماح لتيار كافٍ بالتدفق خلال الجسم ، يمكن أن تحدث أضراراً كبيرة ، كما هو موضح في الشكل التالي :

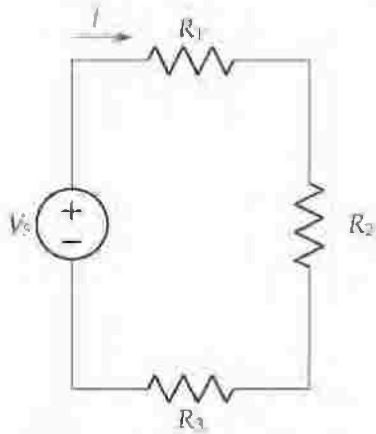
على سبيل المثال ، إن تياراً مقداره ٥٠ ميلي أمبير (الخط المتقطع) كافٍ للتسبب في الرجفان البطيني ، بالإضافة إلى حالات أخرى. يبين الشكل على اليسار توزيع التيار الناتج عن صدمة كبرى (macroshock) من ذراع إلى أخرى (تم إعادة رسمه من مقالة إنديرلي ورفاقه ، مقدمة في الهندسة الطبية الحيوية ، ٢٠٠٠م (Enderle et al., Introduction to Biomedical Engineering, 2000). ويبين الجانب الأيمن من الشكل التالي نموذج دارة كهربائية بسيطاً للجسم يتكون من ذراعين (كل منهما له مقاومة R_A) ، وساقين (كل منهما له مقاومة R_L) ، وجذع جسم (له مقاومة R_T) ، ورأس (له مقاومة R_H).


Burns, Injury
Sustained myocardial contraction
Ventricular fibrillation
Respiratory paralysis, Fatigue, Pain
Let-go current
Threshold of perception
0.0001
0.001
0.01
0.1
1.0
10.0
100.0
Current (A)




R_H
R_A
R_A
R_T
R_L
R_L

وبما أن العناصر الوحيدة التي تشكل مساراً مغلقاً يمكن للتيار أن يتدفق خلاله مُعطى من خلال المصدر على التسلسل مع الذراعين، فإننا نختصر الدارات الكهربائية للجسم على الشكل التالي:



وإذا كانت $R_A = 400\ \Omega$ (أوم) و $V_S = 120\ V$ (فولت)، أوجد عندئذ I.

الحل: باستخدام قانون أوم، لدينا:

$$I = \frac{V_s}{R_A + R_A} = \frac{120}{800} = 0.15\,A$$

إن التيار I هو التيار المار من خلال القلب، وقد يسبب عند هذا المستوى الرجفان البطيني.

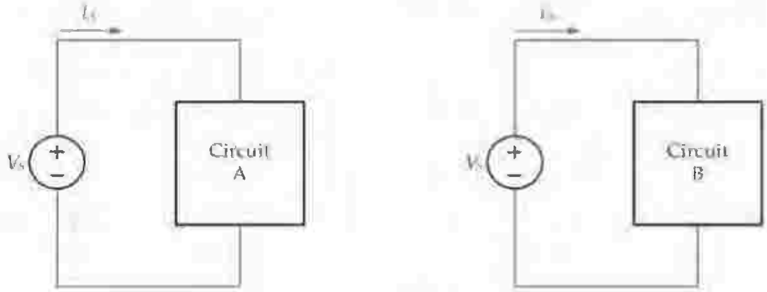
(٤.٣) المقاومة المكافئة
EQUIVALENT RESISTANCE

من الممكن في بعض الأحيان تخفيض الدارات المعقدة إلى أبسط وإلى دارات مكافئة كما سنرى. نحن نعتبر أن الدارتين متكافئتان إذا كان لا يمكن تمييزهما عن بعضهما البعض من خلال قياسات الجهد والتيار، وهذا يعني، أن الدارتين تتصرفان بشكل مماثل. خذ في الاعتبار أن الدارتين A و B في الشكل رقم (٤.٤) تتكونان من

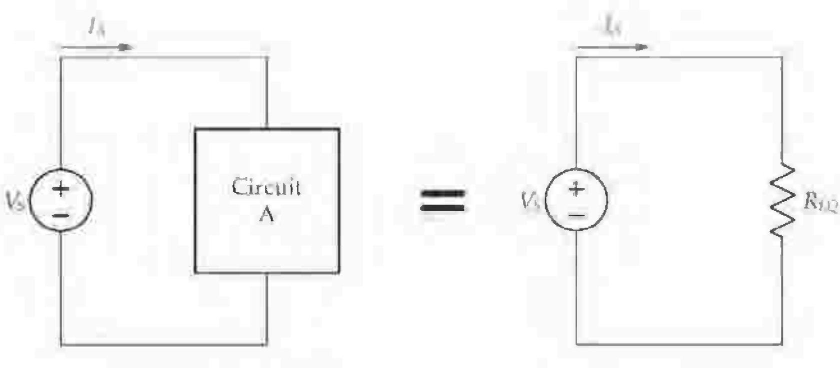
مجموعـات مـن المقاومـات، ويـتم تغذيـة كـل منهمـا بجهـد مسـتمر (DC) V_S. إن هـاتين الدارتين متكافئتان إذا كان $I_A = I_B$. إننا نمثّل المقاومة لأي من الـدارتين باسـتخدام قـانون أوم كما يلي:

$$R_{EQ} = \frac{V_s}{I_A} = \frac{V_s}{I_B} \qquad (٤.٥)$$

وهكذا يترتب على ذلك أنه يمكن استبدال أي دارة تتكون من مقاومات بدارة مكافئة لها كما هو مبين في الشكل رقم (٤.٥). وسوف نتوسع في قسم آخر حول الدارة المكافئة لثيفينن (Th'evenin) في هذه الملاحظة لتشمل أي تركيب للمصادر والمقاومات.



الشكل رقم (٤.٤). دارتان.



الشكل رقم (٤.٥). الدارات المكافئة.

(٤.٤) التركيبات على التسلسل (التوالي) والتفرع (التوازي) للمقاومات
SERIES AND PARALLEL COMBINATIONS OF RESISTANCE

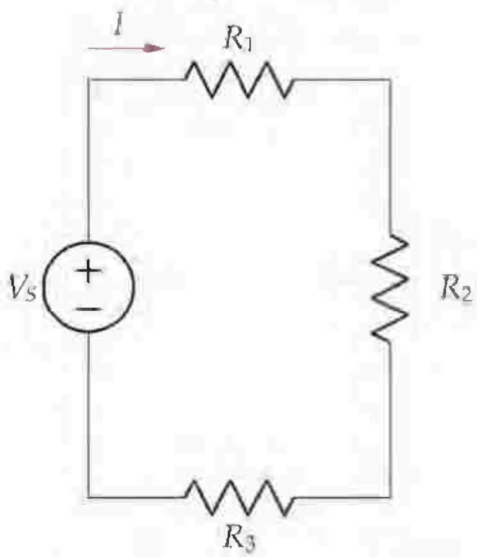
(٤.٤.١) المقاومات على التسلسل (التوالي) Resistors in Series

إذا تدفق نفس التيار من إحدى المقاومات إلى أخرى، فإنه يقال إن المقاومتين على التسلسل. إذا كانت هاتان المقاومتان متصلتين مع مقاومة ثالثة ويتدفق نفس التيار من خلالها جميعاً، فإن المقاومات الثلاث تكون على التسلسل عندئذ. بشكل عام، إذا تدفق نفس التيار من خلال N مقاومة، فإن الـ N مقاومة تكون على التسلسل عندئذ. وبالأخذ في الاعتبار الشكل رقم (٤.٦) الذي يحتوي ثلاثة مقاومات على التسلسل، فإنه يمكن استخراج الدارة المكافئة من خلال قانون كيرشوف للجهد (KVL) كما يلي:

$$-V_s + I R_1 + I R_2 + I R_3 = 0$$

أو يمكن إعادة كتابتها حسب المقاومة المكافئة R_{EQ} كما يلي:

$$R_{EQ} = \frac{V_s}{I} = R_1 + R_2 + R_3$$



الشكل رقم (٤.٦). دارة على التسلسل (التوالي).

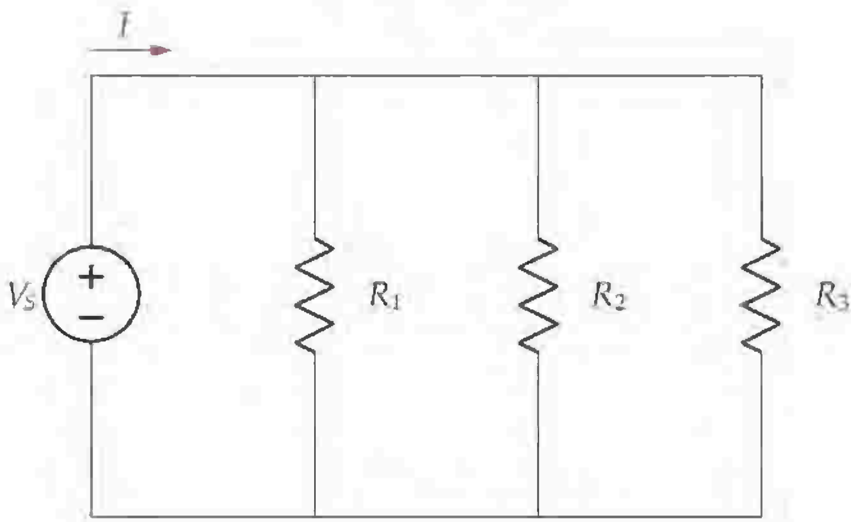
بشكل عام إذا كان لدينا N مقاومة على التسلسل، فإن المقاومة المكافئة تساوي ما يلي:

$$R_{EQ} = \sum_{i=1}^{N} R_i \qquad (٤.٦)$$

(٤.٤.٢) المقاومات على التفرع (التوازي) Resistors in Parallel

يمكن القول إن اثنين أو أكثر من العناصر على التفرع إذا وُجد نفس الجهد على طرفي كل مقاومة من هذه المقاومات. خذ في الاعتبار المقاومات الثلاث على التفرع كما هو مبين في الشكل رقم (٤.٧). إننا نستخدم منهج الاختزال لتمثيل المقاومات على التفرع باستخدام الرمز //. وعليه يكون في الشكل رقم (٤.٧)، $R_{EQ} = R_1 // R_2 // R_3$. ويتم استخراج الدارة المكافئة للشكل رقم (٤.٧) من خلال قانون كيرشوف للتيار (KCL) كما يلي:

$$-I + \frac{V_s}{R_1} + \frac{V_s}{R_2} + \frac{V_s}{R_3} = 0$$



الشكل رقم (٤.٧). دارة على التفرع (التوالي).

أو يمكن إعادة كتابتها حسب المقاومة المكافئة R_{EQ} كما يلي :

$$R_{EQ} = \frac{V_s}{I} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

بشكل عام إذا كان لدينا N مقاومة على التفرع، فإن المقاومة المكافئة تساوي ما يلي :

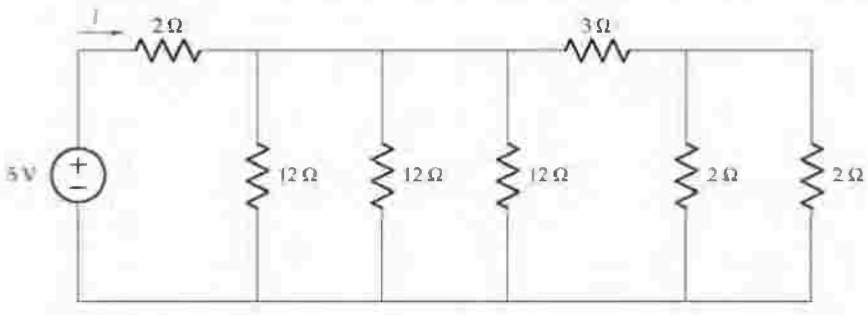
$$R_{EQ} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots\dots\dots\dots\dots + \frac{1}{R_N}} \quad (٤.٧)$$

وفي حالة مقاومتين فقط على التفرع يتم كتابة المعادلة رقم (٤.٧) على النحو التالي :

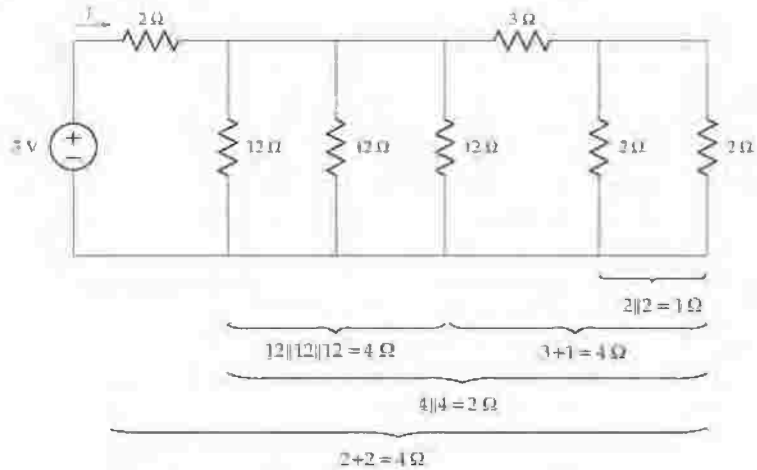
$$R_{EQ} = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (٤.٨)$$

مثال (٤.٤):

المطلوب إيجاد R_{EQ} والقدرة التي يقدِّمها المصدر للدارة التالية.



الحل: للحل والحصول على R_{EQ}، نطبِّق من اليمين إلى اليسار التركيبات التفرعية والتسلسلية. أولاً، لدينا مقاومتان كل منهما ٢ أوم على التوازي اللتان يكونان على التسلسل مع مقاومة قيمتها ٣ أوم. بعد ذلك، تكون هذه المجموعة على التفرع مع المقاومات الثلاث التي قيمة كل منها ١٢ أوماً. وأخيراً، تصبح هذه المجموعة على التسلسل مع المقاومة التي قيمتها ٢ أوم. ويبين الشكل والحساب التالي هذه التركيبات.



$$R_{EQ} = 2\Omega + ((12\Omega \parallel 12\Omega \parallel 12\Omega) \parallel (3\Omega + (2\Omega \parallel 2\Omega)))$$

$$= 2 + \left(\left(\frac{1}{\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}} \right) \parallel \left(3 + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \right) \right)$$

$$= 2 + ((4) \parallel (3+1)) = 2 + 2 = 4\Omega$$

ووفقاً لذلك :

$$I = \frac{5}{R_{EQ}} = \frac{5}{4} = 1.25A$$

و

$$p = 5 x I = 6.25W$$

(٤.٥) قواعد مُقسِّم الجهد والتيار

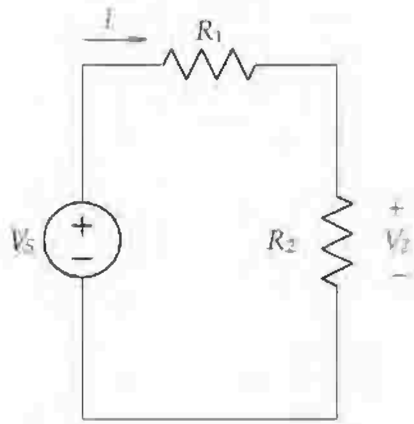
VOLTAGE AND CURRENT DIVIDER RULES

دعونا الآن نوسِّع مفهوم المقاومة المكافئة ، $R_{EQ} = \frac{V}{I}$ ، ليسمح لنا ذلك بسرعة حساب الجهود في دارات المقاومات التسلسلية والتيارات في دارات المقاومات التفرعية دون استطراد إلى الأساسيات.

(٤.٥.١) قاعدة مُقسِّم الجهد Voltage Divider Rule

تسمح لنا قاعدة مُقسِّم الجهد بسهولة حساب الجهد على طرفي مقاومة معينة في دارة تسلسلية. افترض مثلاً إيجاد V_2 في الدارة التسلسلية المُبينة في الشكل رقم (٤.٨)، حيث $R_{EQ}=R_1+R_2$. وبناءً عليه،

$$I=\frac{V_1}{R_{EQ}}=\frac{V_1}{R_1+R_2}$$



الشكل رقم (٤.٨). دارة قاعدة مُقسِّم جهد.

وعليه:

$$V_2=IR_2=V_s\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

ويمكن استخدام هذا التحليل نفسه لإيجاد V_1 كما يلي:

$$V_1=V_s\frac{R_1}{R_1+R_2}$$

وبشكل عام، إذا كانت الدارة تحتوي على N مقاومة على التسلسل، فإن قاعدة مُقسِّم الجهد تعطي الجهد على طرفي أي مقاومة من المقاومات، R_i، كما يلي:

$$V_i = V_s \frac{R_i}{R_1 + R_2 + \cdots R_N} \qquad (٤.٩)$$

(٤.٥.٢) قاعدة مُقسِّم التيار Current Divider Rule

تسمح لنا قاعدة مُقسِّم التيار بسهولة حساب التيار عبر أي مقاومة في دارة مقاومات تفرعية. افترض مثلاً إيجاد I_2 في الدارة التفرعية المُبينة في الشكل رقم (٤.٩)، حيث $R_{EQ} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. وبناءً عليه،

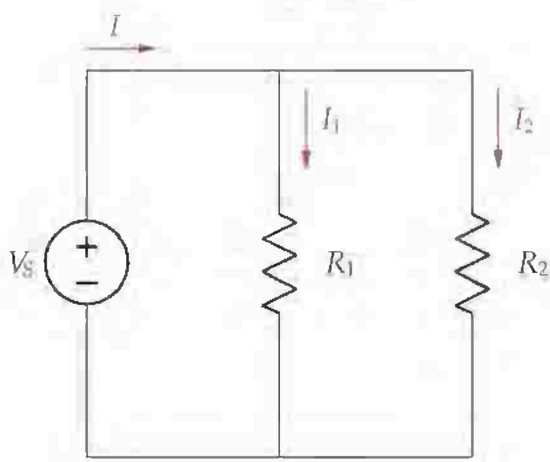
$$I_2 = \frac{V_s}{R_2}$$

و

$$V_s = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

ويعطي هذا بعد استبدال V_s:

$$I_2 = I \frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$



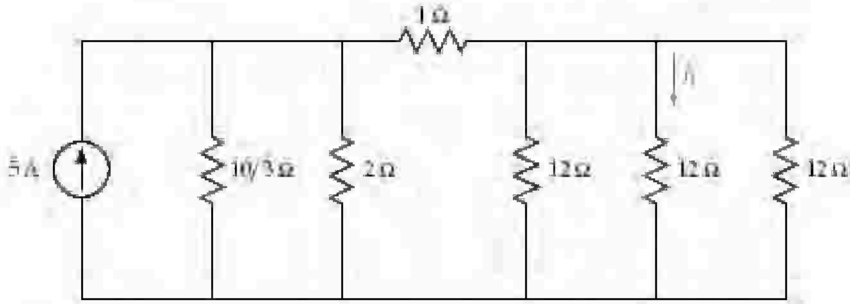
الشكل رقم (٤.٩). دارة قاعدة مُقسِّم تيار.

وبشكل عام، إذا كانت الدارة تحتوي على N مقاومة على التفرع ، فإن قاعدة مُقسِّم التيار تعطي التيار خلال أي مقاومة من المقاومات ، R_i ، كما يلي :

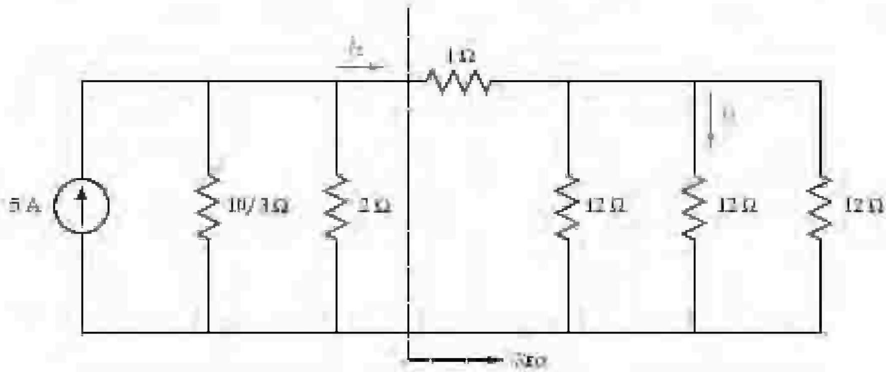
$$I_i = I\frac{\frac{1}{R_i}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\cdots+\frac{1}{R_N}} \qquad (٤.١٠)$$

مثال (٤.٥) :

المطلوب إيجاد I_1 للدارة التالية.



الحل : يمكننا حل مشكلة الدارة هذه في جزأين ، كما هو واضح من الدارة التالية التي تم إعادة رسمها ، أولاً من خلال إيجاد I_2 ومن ثم I_1



يتم في البداية إيجاد R_{EQ} التي تنخفض عند وضعها في الدارة إلى ثلاثة مقاومات على التفرع ويمكن من خلالها حساب I_2. يتم إيجاد المقاومة المكافئة على النحو التالي:

$$R_{EQ} = 1 + (12 \| 12 \| 12) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}} = 5\Omega$$

وبتطبيق قاعدة مُقسِّم التيار على المقاومات التفرعية الثلاث، $\frac{10}{3} // 2 // R_{EQ}$ ، يكون لدينا:

$$I_2 = 5\left(\frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}}\right) = 1\,A$$

يتدفق I_2 خلال المقاومة ١ أوم ثم ينقسم إلى ثلاثة تيارات متساوية كل منها $\frac{1}{3}$ أمبير خلال كل مقاومة قيمتها ١٢ أوماً. ويمكن إيجاد التيار I_1 أيضاً من خلال تطبيق قاعدة مُقسِّم التيار على النحو التالي:

$$I_1 = I_2\left(\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}}\right) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}} = \frac{1}{3}\,A$$