الفصل الخامس

تحليل الشبكات الخطية

Linear Network Analysis

لقد شملت طرائقنا لحل مسائل الدارات حتى هذه النقطة تطبيق قانون أوم وقوانين كيرشوف، وتبسيط الدارات ذات المقاومات، وقواعد مُقسِّم الجهد والتيار. يمكن تطبيق هذا الأسلوب على جميع مسائل الدارات، ولكن عندما يزداد تعقيد الدارة، فإن حل المسائل يصبح أكثر صعوبة. نُقدِّم في هذا القسم طريقة جهد العقدة وطريقة تيار الشبكة لتأمين حل سهل ومنهجي لمسائل الدارات. يتضمن تطبيق طريقة جهد العقدة التعبير عن تيارات الفرع بواسطة أحد جهود العقدة أو أكثر، وتطبيق قانون كيرشوف للتيار (KCL) على كل عقدة. يتضمن تطبيق طريقة تيار الشبكة التعبير عن جهود الفرع بواسطة تيارات الشبكة، وتطبيق قانون كيرشوف للجهد (KVL) حول كل شبكة. إن هاتين الطريقتين هما أسلوبان منهجيان يؤديان إلى حل فعال وقوي ينتج عنه حد أدنى لعدد المعادلات المتزامنة التي توفر الوقت والجهد.

وفي كلتا الحالتين، يتم حل المجموعة الخطية للمعادلات المتزامنة من أجل تحديد الجهود أو التيارات المجهولة (غير المعروفة). إن عدد الجهود المجهولة بالنسبة لطريقة جهد العقدة أو عدد التيارات المجهولة بالنسبة لطريقة تيار الشبكة يحدد عدد المعادلات. إن عدد المعادلات المستقلة يستلزم ما يلي:

• *N-1* معادلة تتضمن KCL في *N-1* عقدة من أجل طريقة جهد العقدة. وقد يكون هذا العدد أقل إذا كانت هناك مصادر للجهد موجودة في الدارة.

• *N-1* معادلة تتضمن KVL حول كل واحدة من الشبكات في الدارة من أجل طريقة تيار الشبكة. وقد يكون هذا العدد أقل إذا كانت هناك مصادر للتيار موجودة في الدارة.

وكما سنرى، فإن برنامج MATLAB مثالي لحل المسائل التي تتضمن حل معادلات متزامنة، مما يوفر أداة بسيطة تقلّل من حجم العمل.

(٥.١) طريقة جهد العقدة
NODE-VOLTAGE METHOD

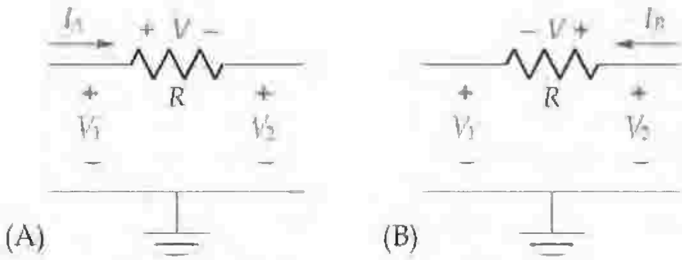
يوفر استخدام معادلات العقدة طريقة منهجية لحل مسائل تحليل الدارات من خلال تطبيق قانون كيرشوف للتيار (KCL) على كل عقدة أساسية. تتضمن طريقة جهد العقدة الخطوتين التاليتين:

١ - تحديد جهد لكل عقدة استناداً إلى عقدة مرجعية (الأرضي). إن العقدة المرجعية هي عادة العقدة التي تصل بها معظم الفروع، ويُشار إليها بالرمز . يتم كتابة جميع الجهود استناداً إلى العقدة المرجعية.

٢ - نكتب قانون كيرشوف للتيار (KCL) لكل عقدة من العقد البالغة *N-1* عقدة وذلك باستثناء العقدة المرجعية.

يتم كتابة التيار المار خلال مقاومة باستخدام قانون أوم، مع التعبير عن الجهد بأنه فرق الجهد على طرفي المقاومة استناداً إلى العقدة المرجعية كما هو مبين في الشكل.رقم (٥.١). إننا نعبر عن معادلات جهد العقدة على أنها التيارات الخارجة من العقدة. تعطي العقدتان المتجاورتان زيادة للتيار المتحرك إلى اليمين (مثل الشكل رقم

(A.٥.١)) لأحدى العقد، والتيار المتحرك إلى اليسار (مثل الشكل رقم (B.٥.١)) للعقدة الأخرى. يتم كتابة التيار لـ (A) على النحو التالي $I_A = \frac{V}{R} = \frac{V_1 - V_2}{R}$ ولـ (B) كما يلي $I_B = \frac{V}{R} = \frac{V_1 - V_2}{R}$. من السهل التحقق أن $V = V_1 - V_2$ في (A) وذلك من خلال تطبيق قانون كيرشوف للجهد (KVL).

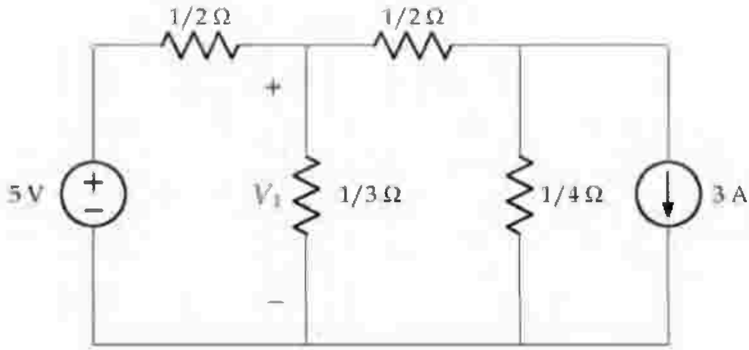


الشكل رقم (٥.١). قانون أوم مكتوب بواسطة جهود العقدة.

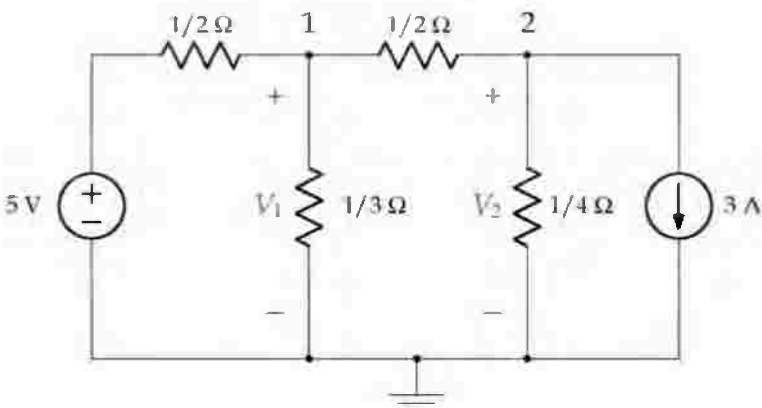
إذا وقع أحد الفروع بين العقدة الأساسية والعقدة المرجعية التي تحتوي على مصدر جهد مستقل أو تابع، فإننا لا نكتب معادلة العقدة لهذه العقدة، لأن جهد العقدة معروف. وهذا يقلّل من عدد معادلات العقدة المستقلة معادلة واحدة وحجم العمل لحل جهود العقدة. وعند كتابة معادلات العقدة للعقد الأخرى، فإننا نكتب قيمة مصدر الجهد المستقل في تلك المعادلات. انظر إلى الشكل.رقم (A.٥.١) وافترض أن الجهد V_2 ينتج عن مصدر جهد مستقل مقداره ٥ فولت. وبما أن جهد العقدة معروف، فإننا لا نكتب معادلة جهد عقدة للعقدة رقم ٢ في هذه الحالة. عند كتابة معادلة جهد عقدة للعقدة رقم ١، فإنه يتم كتابة التيار I_A كما يلي $I_A = \frac{V_1 - 5}{R}$. يوضح المثال رقم (٥.١) هذه الحالة إلى حد أبعد.

مثال (٥.١):

المطلوب إيجاد V_1 باستخدام طريقة جهد العقدة.



الحل: إن لهذه الدارة عقدتين أساسيتين، مُسماة ١ و ٢ في الدارة التالية التي تم إعادة رسمها، مع الإشارة إلى العقدة المرجعية وجهود عقدتين، V_1 و V_2. إن العقدة التي تتضمن مصدر الجهد ٥ فولت لها جهد عقدة معروف، وعليه فإننا لا نكتب معادلة عقدة لها.



إن جمع التيارات الخارجة من العقدة رقم ١ يُعطى كما يلي:

$$2(V_1 - 5) + 3V_1 + 2(V_1 - V_2) = 0$$

الذي يمكن تبسيطه إلى:

$$7V_1 - 2V_2 = 10$$

إن جمع التيارات الخارجة من العقدة رقم ٢ يُعطى كما يلي :

$$2(V_2 - V_1) + 4V_2 + 3 = 0$$

الذي يمكن تبسيطه إلى :

$$-2V_1 + 6V_2 = -3$$

يتم كتابة معادلتي العقدة في شكل مصفوفة كما يلي :

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \end{bmatrix}$$

وحلها بواسطة برنامج MATLAB على النحو التالي :

```
>>A= [7  - 2; -2  6];
>>F= [10;-3];
>>V=A\F
V=
   1.4211
  -0.0263
```

وعليه فإن $V_1 = 1.4211$ فولت.

بشكل عام، فإن معامل جهد العقدة هو مجموع السماحيات الموصولة بالعقدة. إن معاملات جهود العقد الأخرى هي القيم السالبة لمجموع السماحيات الموصولة بين جهد العقدة وجهود العقد الأخرى. إذا كان الدخل يتألف من مجموعة من مصادر التيار المُطبّق على كل عقدة، عندئذ يكون لمعادلات العقدة الشكل التالي :

$$\begin{aligned} G_{1,1}V_1 - G_{1,2}V_2 - \cdots - G_{1,N-1}V_{N-1} &= I_1 \\ -G_{2,1}V_1 + G_{2,2}V_2 - \cdots - G_{2,N-1}V_{N-1} &= I_2 \\ &\vdots \\ -G_{N-1,1}V_1 - G_{N-1,2}V_2 - \cdots - G_{N-1,N-1}V_{N-1} &= I_N \end{aligned} \qquad (٥.١)$$

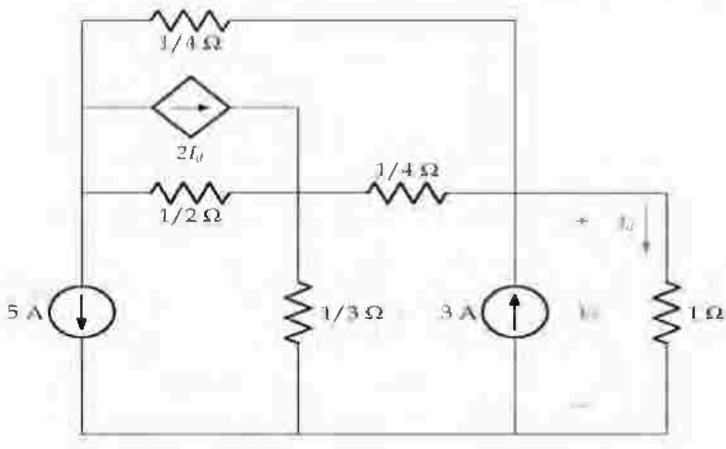
يتم وضع المعادلة رقم (٥.١) في شكل مصفوفة للحل بواسطة MATLAB على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} G_{1,1} & -G_{1,2} & \cdots & -G_{1,N-1} \\ -G_{2,1} & G_{2,2} & \cdots & -G_{2,N-1} \\ & & \ddots & \\ -G_{N-1,1} & -G_{N-1,2} & \cdots & -G_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_{N-1} \end{bmatrix} \tag{٥.٢}$$

لاحظ التناظر حول القطر الرئيسي حيث العناصر الواقعة خارج القطر مساوية لبعضها البعض وسالبة. ينطبق هذا على جميع الدارات التي لا تحوي مصادر تابعة، حيث يلغي المصدر التابع هذا التناظر. وبشكل عام، إذا كان لدى دارة مصادر تابعة، فإن طريقة جهد العقدة هي نفسها كما كانت من قبل باستثناء معادلة إضافية تصف العلاقة بين المصدر التابع وجهد العقدة. وفي الحالات التي تتضمن أكثر من مصدر واحد تابع، فإن هناك معادلة واحدة لكل مصدر تابع بالنسبة إلى جهود العقدة.

مثال (٥.٢):

المطلوب إيجاد V_3 للدارة التالية باستخدام طريقة جهد العقدة.



الحل: لاحظ أن لهذه الدارة ثلاث عقد أساسية ومصدر تيار تابع. نسمي العقد الأساسية ١ و ٢ و ٣ في الدارة التي تم إعادة رسمها، مع العقدة المرجعية في الجزء السفلي من الدارة وثلاثة جهود عقدة V_1، و V_2 و V_3، كما هو مبين.

لاحظ أن $I_d = V_3$ وفقاً لقانون أوم، ويعطي جمع التيارات الخارجة من العقدة رقم ١ ما يلي:

$$5+2(V_1-V_2)+2I_d+4(V_1-V_3)=0$$

الذي يمكن تخفيضه إلى:

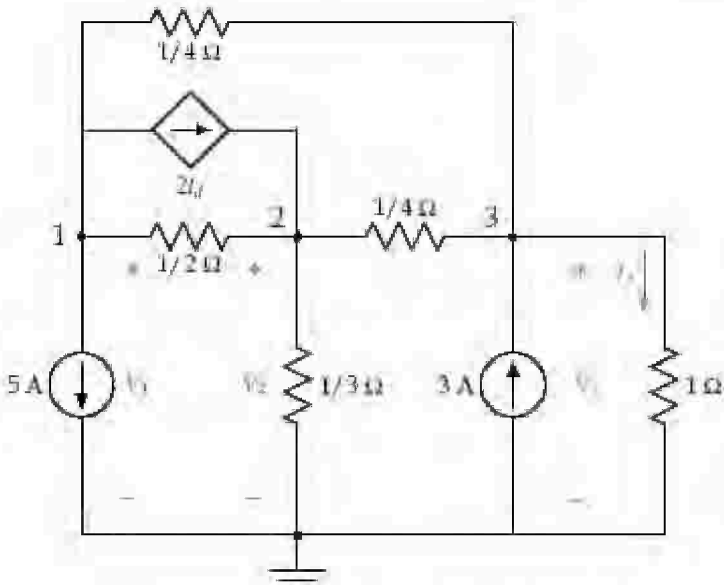
$$6V_1-2V_2-2V_3=-5$$

إن جمع التيارات الخارجة من العقدة رقم ٢ يُعطى كما يلي:

$$-2I_d+2(V_2-V_1)+3V_2+4(V_2-V_3)=0$$

الذي يمكن تبسيطه إلى:

$$-2V_1+9V_2-6V_3=0$$



إن جمع التيارات الخارجة من العقدة رقم ٣ يُعطى كما يلي:

$$4(V_3 - V_2) - 3 + V_3 + 4(V_3 - V_1) = 0$$

الذي يمكن تخفيضه إلى:

$$-4V_1 - 4V_2 + 9V_3 = 3$$

تتم كتابة معادلات العقد الثلاث في شكل مصفوفة كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 9 & -6 \\ -4 & -4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن مصفوفة النظام لم تعد متناظرة بسبب مصدر التيار التابع، كما أن اثنتين من العقد الثلاث لديهما مصدر تيار يعطي زيادة إلى العنصر غير الصفري على الجانب الأيمن من معادلة المصفوفة.

ويعطي الحل بواسطة برنامج MATLAB ما يلي:

```
>>A= [6 -2 -2;-2 9 -6; -4  -4  9];
>>F= [-5;0;3];
>>V=A\F
V=
    -1.1471
    -0.5294
    -0.4118
```

وعليه فإن $V_3 = -0.4118$ فولت

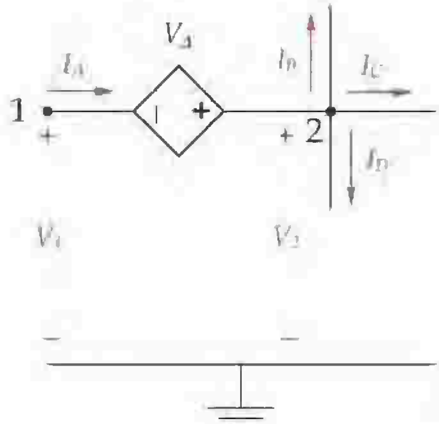
إذا كان لأحد الفروع مصدر جهد مستقل أو مصدر جهد مُتحكم به يقع بين عقدتين أساسيتين كما هو موضح في الشكل رقم (٥.٢)، فإنه لا يمكن بسهولة التعبير

عن التيار المار خلال المصدر بواسطة جهود العقدة. في هذه الحالة، فإننا نشكل عقدة ضخمة من خلال جمع العقدتين. تتطلب تقنية العقدة الضخمة معادلة عقدة واحدة فقط يتم فيها تمرير التيار I_A عبر المصدر وكتابتها بواسطة التيارات الخارجة من العقدة ٢. وبشكل خاص، فإننا نستبدل I_A بـ $I_B + I_C + I_D$ بالنسبة لجهود العقدة. وبما أنه لدينا مجهولان ومعادلة عقدة ضخمة واحدة، فإننا نكتب المعادلة الثانية من خلال تطبيق قانون كيرشوف للجهد (KVL) على جهود العقدتين ١ و ٢ والمصدر كما يلي:

$$-V_1 - V_\Delta + V_2 = 0$$

أو

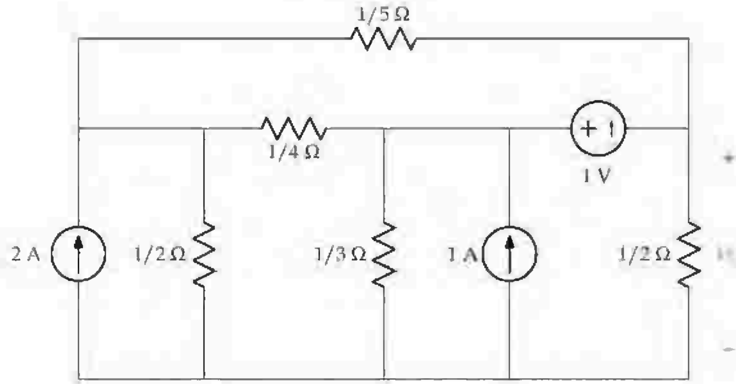
$$V_\Delta = V_1 - V_2$$



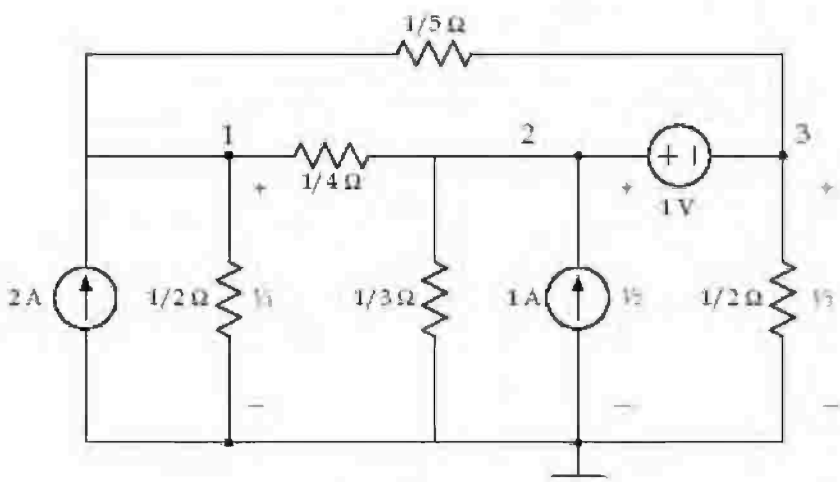
الشكل رقم (٥.٢). مصدر جهد تابع واقع بين العقدتين ١ و ٢ .

مثال (٥.٣):

المطلوب إيجاد V_3 للدارة التالية.



الحل: إن لهذه الدارة ثلاث عقد أساسية، اثنتين منها موصولتين إلى مصدر جهد مستقل و تشكلان عقدة ضخمة. نسمي العقد الأساسية ١ و ٢ و ٣ في الدارة التي تم إعادة رسمها، مع العقدة المرجعية في الجزء السفلي من الدارة وثلاثة جهود عقدة V_1، و V_2 و V_3، كما هو مبين.



إن جمع التيارات الخارجة من العقدة رقم ١ يُعطى كما يلي:

$$-2+2V_1+5(V_1-V_3)+4(V_1-V_2)=0$$

وبالتبسيط نحصل على ما يلي :

$$11V_1 - 4V_2 - 5V_3 = 2$$

تتصل العقدتان ٢ و ٣ بمصدر جهد مستقل ، وهكذا فإننا نشكل عقدة ضخمة اسمها ٢+٣ .

إن جمع التيارات الخارجة من العقدة ٢+٣ يُعطى كما يلي :

$$4(V_2 - V_1) + 3V_2 - 1 + 2V_3 + 5(V_3 - V_1) = 0$$

وبالتبسيط نحصل على ما يلي :

$$-9V_1 + 7V_2 + 7V_3 = 1$$

تُعطى المعادلة الثانية للعقدة الضخمة بتطبيق قانون كيرشوف للجهد (KVL) خلال جهود العقدة والمصدر المستقل كما يلي :

$$-V_2 + 1 + V_3 = 0$$

أو

$$-V_2 + V_3 = -1$$

تتم كتابة معادلات العقدتين والـ KVL في شكل مصفوفة كما يلي :

$$\begin{bmatrix} 11 & -4 & -5 \\ -9 & 7 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

يعطي الحل بواسطة برنامج MATLAB ما يلي :

```
>>A= [11 -4 -5; -9 7 7; 0 -1 1];
>>F= [2; 1;-1];
>>V=A\F
V=
    0.4110
    0.8456
    -0.1644
```

وعليه فإن $V_3 = -0.1644$ فولت.

(٥.٢) طريقة تيار الشبكة

MECH-CURRENT METHOD

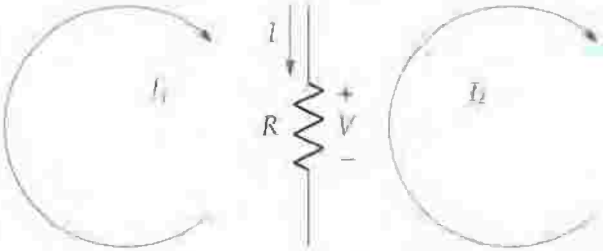
تُسمى الطريقة الأخرى لتحليل الدارات المستوية بطريقة تيار الشبكة. إن الشبكة هي مسار مغلق من دون أي مسارات مغلقة أخرى داخلة، والدارة المستوية هي دارة من دون أي فروع متداخلة. إن جميع مسائلنا في هذا الكتاب تتضمن دارات مستوية. توفر طريقة تيار الشبكة عملية منهجية لحل مسائل تحليل الدارات من خلال تطبيق قانون كيرشوف للجهد (KVL) حول كل شبكة. تتضمن طريقة تيار الشبكة الخطوتين التاليتين:

١- حدِّد تيارات الشبكة في الدارة. وكما هو مُتفق عليه، فإننا نرسم تيارات الشبكة على شكل دائرة أو قوس أو سطح على المحيط الداخلي للشبكة. وعلاوة على ذلك، فإننا نحدد اتجاه تيار الشبكة لجميع الشبكات بحيث يكون في اتجاه عقارب الساعة.

٢- اكتب مجموعة معادلات الشبكة باستخدام قانون كيرشوف للجهد (KVL). بشكل عام، فإننا نكتب معادلة واحدة لكل شبكة. وفي ظل ظروف خاصة، قد يكون عدد معادلات الشبكة أقل من العدد الإجمالي للشبكات.

عند كتابة معادلة الشبكة، فإننا نتحرك خلال الشبكة في اتجاه عقارب الساعة من خلال كتابة هبوطات الجهد بواسطة تيارات الشبكة. وعندما يكون عنصر الدارة مشتركاً في شبكتين، كما في الشكل.رقم (٥.٣)، فإن هبوط الجهد على طرفي المقاومة هو:

$$V = RI = R(I_1 - I_2)$$



الشكل رقم (٥.٣). تيارات شبكة.

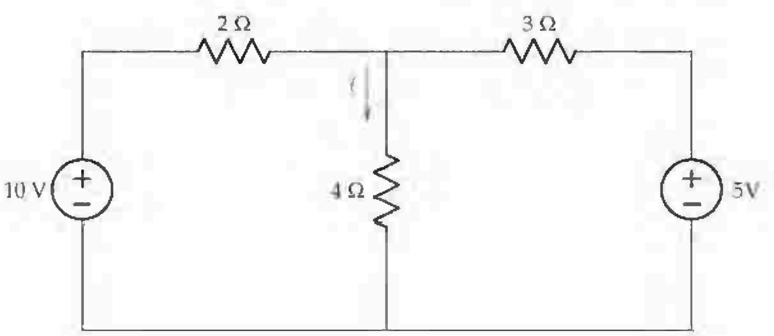
عند كتابة المعادلة للشبكة رقم ١. وعند كتابة معادلة الشبكة للشبكة رقم ٢، يعطي اتجاه عقارب الساعة هبوط جهد حسب المبدأ $R(I_2-I_1)$، تماماً عكس ما هو الحال في الشبكة رقم ١. وعلاوة على ذلك، وفقاً لقانون كيرشوف للتيار (KCL) فإن:

$$I=(I_1-I_2)$$

إن تيارات الشبكة، مثل التي في الشكل رقم (٥.٣)، لا يمكن قياسها بواسطة مقياس أمبير لأنها لا تساوي تيار فرع. ويتألف التيار المار خلال الفرع من الفرق بين تياريّ الشبكتين، وهنا $I=(I_1-I_2)$. وعلى الرغم من أن تيار الشبكة ليس حقيقياً، إلاّ أنها تقنية قوية تبسط تحليل مسائل الدارات كما هو مبين في المثال التالي.

مثال (٥.٤):

المطلوب إيجاد I في الدارة التالية.



الحل: هناك شبكتان في هذه الدارة. يتم تحديد تيارات الشبكة دائماً في اتجاه عقارب الساعة، تيار واحد لكل شبكة، كما هو موضح في الدارة التالية التي تم إعادة رسمها.

إن جمع هبوطات الجهد حول الشبكة رقم ١ يمكن كتابته كما يلي:

$$-10 + 2I_1 + 4(I_1 - I_2) = 0$$

الذي يمكن تبسيطه إلى:

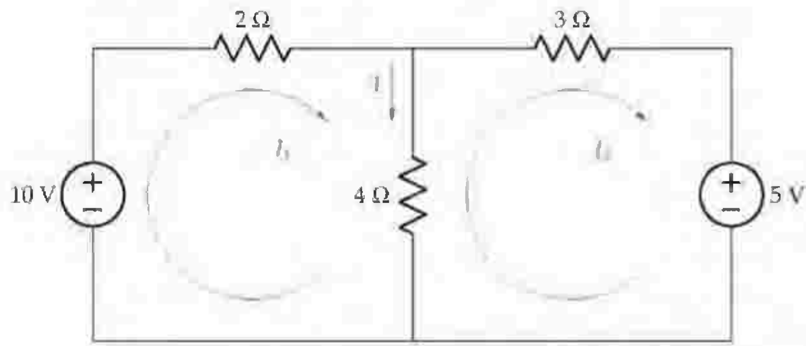
$$6I_1 - 4I_2 = 10$$

وجمع هبوطات الجهد حول الشبكة رقم ٢ يمكن كتابته كما يلي:

$$4(I_2 - I_1) + 3I_2 + 5 = 0$$

الذي يمكن تبسيطه إلى:

$$-4I_1 + 7I_2 = -5$$



تتم كتابة معادلتي الشبكة في شكل مصفوفة على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix}$$

إن الملاحظات الواردة في الفقرة رقم (٥.١) بشأن هيكل وتناظر مصفوفة النظام بالنسبة لطريقة جهد العقدة تنطبق أيضاً على طريقة تيار الشبكة. ويعطي حلنا لهذه المسألة بواسطة MAT:AB ما يلي:

```
>>A= [6 -4; -4 7];
>>F= [10; -5];
>>I=A\F
I=
   1.9231
   0.3846
```

ويتم إيجاد التيار I من $I = I_1 - I_2 = 1.9231 - 0.3846 = 1.5375\,A$

عندما يكون لأحد الفروع مصدر تيار مستقل أو مصدر تيار تابع في الدارة، فلا بد من إجراء تعديل على طريقة تيار الشبكة. واعتماداً على ما إذا كان مصدر التيار على المحيط الخارجي أو داخل الدارة، كما هو مبين في الشكل.رقم (٥.٤)، فإننا نتعامل مع كلا الحالتين على النحو التالي:

١- يقع مصدر التيار على المحيط، كما هو الحال في الدارة على اليسار في الشكل.رقم (٥.٤)، حيث يساوي تيار الشبكة تيار الفرع. في هذه الحالة، فإننا لا نكتب معادلة الشبكة لأن التيار معروف. إن تيار الشبكة I_1 يساوي تيار المصدر، $I_1 = 3$ A. ويمكن كتابة المعادلة للشبكة رقم ٢ من خلال تطبيق قانون كيرشوف للجهد (KVL) كما يلي:

$$4(I_2 - I_1) + 3I_2 + 5 = 4(I_2 - 3) + 3I_2 + 5 = 0$$

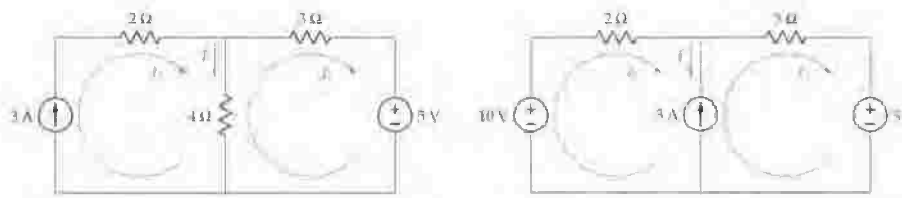
الذي يعطي $I_2 = 1$ A

٢- يقع مصدر التيار داخل الدارة حيث تيار الشبكة لا يساوي تيار الفرع كما هو مبين في الشكل.رقم (٥.٤) (يمين). ولأننا لا نستطيع كتابة هبوط الجهد على طرفي مصدر التيار بسهولة، فإننا نشكل شبكة ضخمة. يتم تشكيل الشبكة الضخمة من

خلال جمع الشبكتين معاً، مع معادلة واحدة تصف كلا الشبكتين. في هذه الحالة، تبدأ المعادلة بالشبكة الأولى وتستمر إلى الشبكة الثانية، دائرين حول هبوط الجهد على طرفي مصدر التيار. وهنا تكون معادلة الشبكة الضخمة كما يلي:

$$-10+2I_1+3I_2+5=0$$

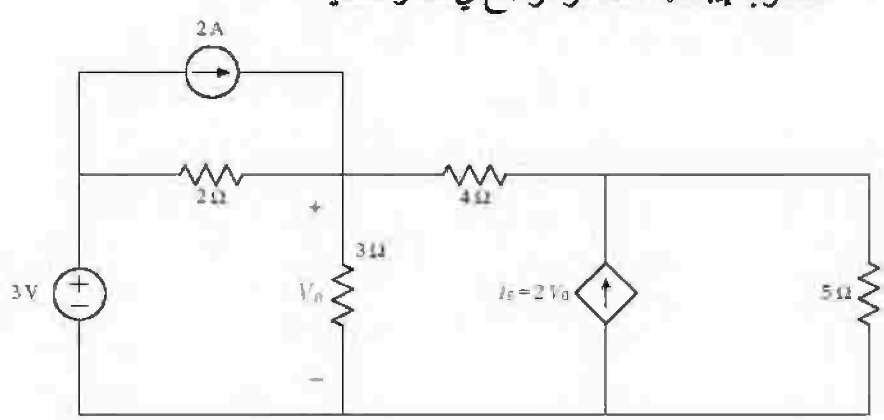
ولأن هناك تيارين مجهولين، فإننا بحاجة إلى معادلتين مستقلتين. يتم كتابة المعادلة الثانية باستخدام قانون كيرشوف للتيار (KCL) بالنسبة لمصدر التيار وتياريّ الشبكة. وهنا تكون معادلة الـ KCL $I_2-I_1=3$.



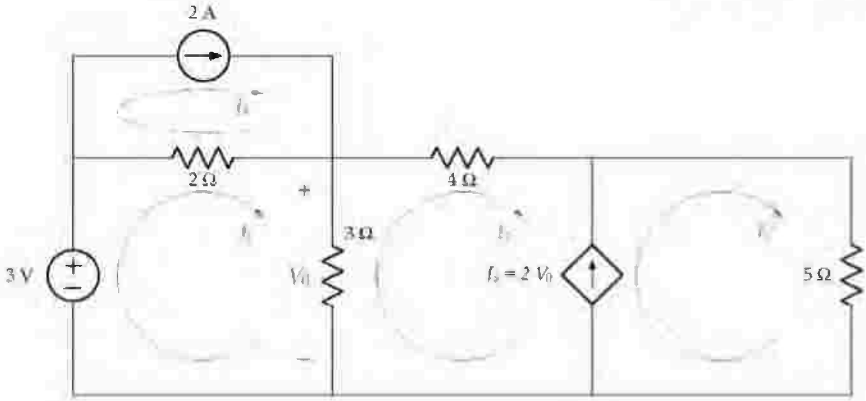
الشكل رقم (٤.٥).(يسار) مصدر تيار على محيط الدارة. (يمين) مصدر تيار في فرع بين شبكتين

مثال (٥.٥):

المطلوب إيجاد V_0 كما هو موضح في الدارة التالية.



الحل: إن لهذه الدارة أربعة شبكات ، كما هو موضح في مخطط الدارة التالي. تتضمن الشبكة رقم ٤ مصدر تيار في محيطها ، لذلك فلن نكتب معادلة شبكة لها ، ولكن ببساطة نكتب $I_4 = 2A$.



يمكن كتابة جمع الجهود حول الشبكة رقم ١ كما يلي :

$$-3+2(I_1-2)+3(I_1-I_2)=0$$

ويعطي تبسيط ذلك :

$$5I_1-3I_2=7$$

وبما أن هناك مصدر تيار تابع داخل الدارة ، فإننا نشكل شبكة ضخمة من الشبكتين ٢ و ٣. ويعطي جمع الجهود حول الشبكة الضخمة ٢+٣ ما يلي :

$$3(I_2-I_1)+4I_2+5I_3=0$$

ويمكن تبسيط ذلك كما يلي :

$$-3I_1+7I_2+5I_3=0$$

بتطبيق قانون كيرشوف للتيار (KCL) على مصدر التيار التابع يمكن كتابة ما يلي :

$$2V_0=2\times3(I_1-I_2)=I_3-I_2$$

وهذا يعطي :

$$6I_1 - 5I_2 - I_3 = 0$$

تتم كتابة المعادلات الثلاث المستقلة في شكل مصفوفة كما يلي :

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 7 & 5 \\ 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ويعطي الحل باستخدام MATLAB :

```
>>A= [5 -3 0; -3 7 5; 6 -5 -1];
>>F= [7;0;0];
>>I=A\F
I=
   14.000
   21.000
   -21.000
```

وعليه :

$$V_0 = 3(I_1 - I_2) = 3(14 - 21) = 21\,V$$

(٥.٣) الخطية و التراكب (التجميع) و تحويلات المصدر

LINEARITY, SUPERPOSITION AND SOURCE TRANSFORMATIONS

(٥.٣.١) الخطية و التراكب (التجميع) Linearity and Superposition

إذا كان هناك نظام خطي مؤلف من اثنين أو أكثر من المصادر المستقلة ، فإن الاستجابة الإجمالية عندئذ هي مجموع الاستجابات الفردية المنفصلة لكل مدخل. تُسمى هذه الخاصية مبدأ التراكب. إن الاستجابة لعدة مصادر مستقلة ، خصيصاً للدارات ، هي مجموع الاستجابات لكل مصدر مستقل عندما تكون المصادر المستقلة الأخرى ميتة (غير فعالة) ، حيث :

- إن مصدر الجهد الميت هو دارة مقصورة

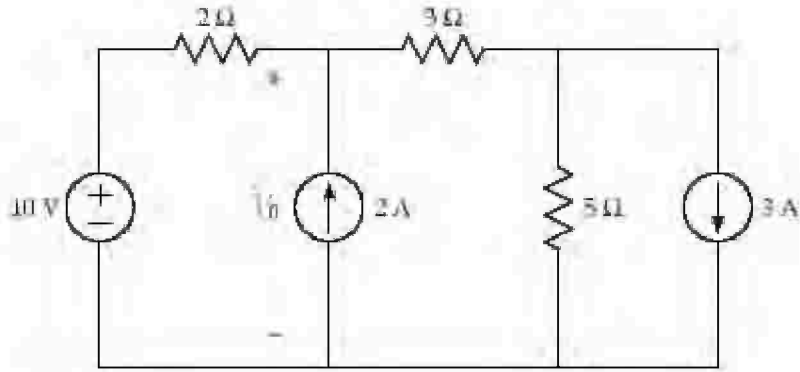
- إن مصدر التيار الميت هو دارة مفتوحة

إن الاستجابة الإجمالية، في الدارات الخطية ذات المصادر المستقلة المتعددة، هو حاصل جمع الاستجابة لكل مصدر مستقل مأخوذة في وقت واحد. ويتم تنفيذ هذا التحليل عن طريق إزالة جميع المصادر ما عدا واحد، وافتراض أن المصادر الأخرى ميتة. بعد تحليل الدارة بالنسبة للمصدر الأول، يتم وضعها مساوية لمصدر ميت ويتم تطبيق المصدر الثاني مع بقاء المصادر المتبقية ميتة. عندما يكون قد تم تحليل كل مصدر من المصادر، فإنه يتم الحصول على الاستجابة الإجمالية عن طريق جمع الاستجابات الفردية. لاحظ بعناية أن هذا المبدأ ينطبق فقط على المصادر المستقلة. يجب أن تبقى المصادر التابعة في الدارة عند تطبيق هذه التقنية، ويجب تحليلها استناداً إلى التيار أو الجهد الذي يتم تحديده. ينبغي أن يكون واضحاً أن الجهود والتيارات في دارة واحد تختلف فيما بين الدارات، وأننا لا نستطيع مزج ومطابقة الجهود والتيارات من إحدى الدارات مع أخرى.

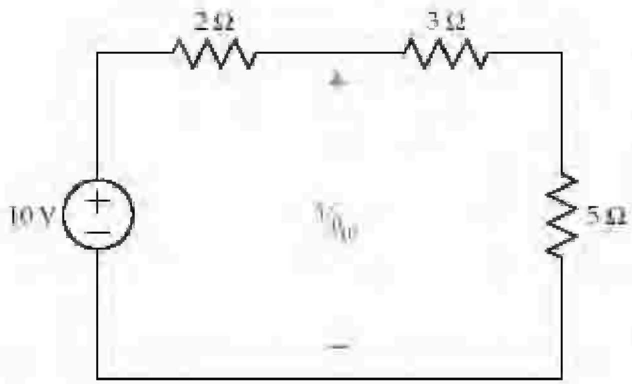
بشكل عام، يوفر التراكب حلاً أبسط من الذي يتم الحصول عليه من خلال تقييم الاستجابة الإجمالية مع جميع المصادر المُطبَّقة. إن هذه الخاصية قيّمة خاصة عند التعامل مع دخل يتألف من نبضة أو تأخيرات. وسيتم أخذ هذا في الاعتبار في الأجزاء القادمة.

مثال (٦.٥):

المطلوب إيجاد V_0 كما هو مبين في الشكل التالي باستخدام التراكب.



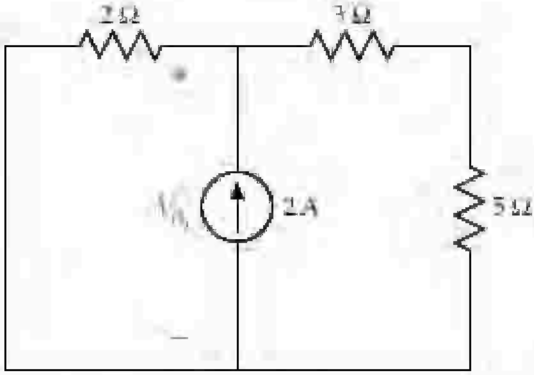
الحل: نبدأ بتحليل الدارة عندما يكون المصدر ١٠ فولت فعالاً فقط ومصدرا التيار ميّتين، كما هو موضح في الشكل التالي



تعطي قاعدة مُقسِّم الجهد بسهولة الاستجابة $V_{0_{10}}$ الناتجة عن المصدر ١٠ فولت.

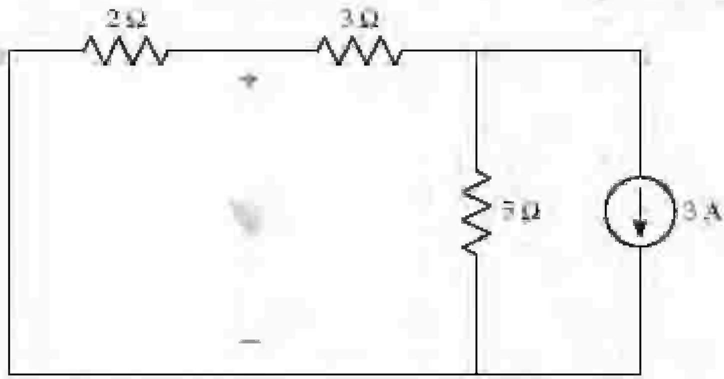
$$V_{0_{10}} = 10(\frac{8}{2+8}) = 8\ V$$

بعد ذلك خذ في الاعتبار مصدر التيار الفعال ٢ أمبير، والمصدران الآخران ميّتان، كما هو موضح في الدائرة التالية.



إن جمع المقاومات في مقاومة مكافئة، $R_{EQ} = 2\,||\,(3+5) = \dfrac{2\times 8}{2+8} = 1.6\,\Omega$ ، ومن ثم تطبيق قانون أوم يعطي $V_{0_2} = 2\times 1.6 = 3.2\,V$.

وأخيراً، خذ في الاعتبار الاستجابة، V_{0_3} ، بالنسبة إلى المصدر ٣ أمبير كما هو مبين في الشكل التالي:



لإيجاد V_{0_3} لاحظ أن التيار ٣ أمبير ينقسم إلى ١.٥ أمبير خلال كل فرع (الفرع 2 + 3 Ω والفرع 5 Ω)، و $V_{0_3} = -1.5\times 2 = -3\,V$.

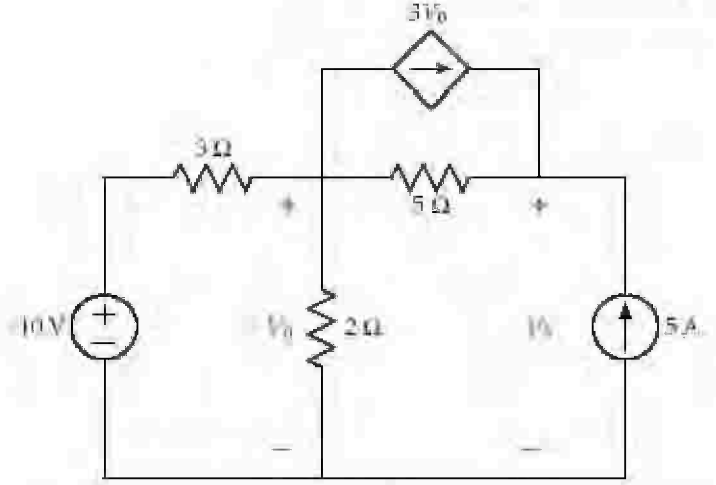
وتُعطى الاستجابة الإجمالية من خلال مجموع الاستجابات الفردية كما يلي:

$$V_0 = V_{0_{10}} + V_{0_2} + V_{0_3} = 8 + 3.2 - 3 = 8.2\,V$$

وهـذه نفس النتيجة التي يمكن أن نجدها إذا قمنا بتحليل الدارة الأصلية مباشرة باستخدام طريقة جهد العقدة أو طريقة تيار الشبكة.

مثال (٥.٧):

المطلوب إيجاد الجهد، V_5، على طرفي مصدر التيار ٥ أمبير كما هو مبين في الشكل التالي باستخدام التراكب.

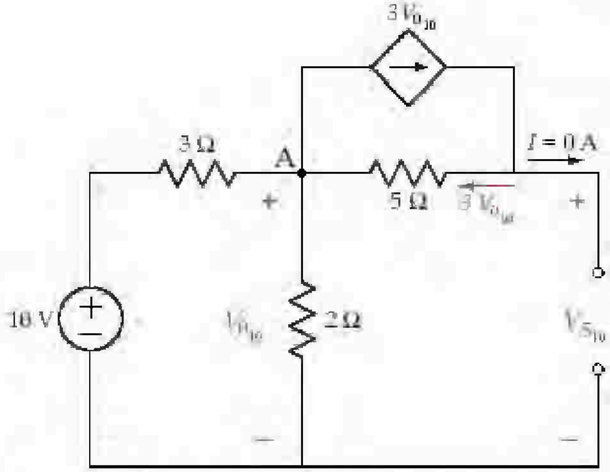


الحل: خذ في الاعتبار أولاً إيجاد الاستجابة، $V_{0_{10}}$ ، الناتجة عن المصدر ١٠ فولت فقط عندما يكون المصدر ٥ أمبير ميتاً كما هو موضح في الشكل التالي. كما هو مطلوب في أثناء التحليل، فإنه يتم الاحتفاظ بمصدر التيار التابع في الدارة المُعدَّلة و لا ينبغي جعله ميتاً.

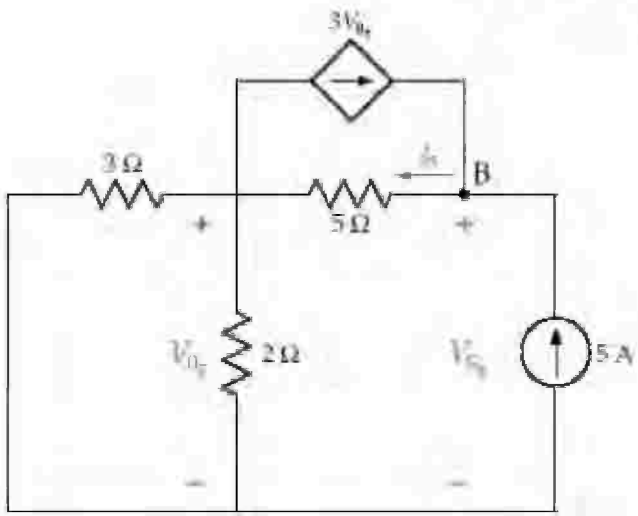
لاحظ أنه لا يتدفق أي تيار من خلال الدارة المفتوحة التي أنشأها مصدر التيار الميت، وأن التيار الذي يتدفق من خلال المقاومة ٥ أوم هو $3V_0$. ولذلك فإن تطبيق قانون كيرشوف للتيار (KCL) على العقدة A يعطي:

$$\frac{V_{0_{10}}-10}{3}+\frac{V_{0_{10}}}{2}+3V_{0_{10}}-3V_{0_{10}}=0$$

الـــذي يعطـــي $V_{0_{10}} = 4\,V$. يعطـــي قـــانون كيرشـــوف للجهـــد (KVL) $0 = -V_{0_{10}} - 5\times 3V_{0_{10}} + V_{5_{10}}$، وعليه $V_{5_{10}} = 64\,V$.



بعد ذلك خذ في الاعتبار إيجاد الاستجابة، V_{0_5}، الناتجة عن المصدر ٥ أمبير، يكون المصدر ١٠ فولت في هذه الحالة ميتاً.



أولاً إن جمع المقاومتين على التفرع (التوازي) $(3\,\Omega // 2\,\Omega)$، يعطي ١.٢ أوم. ويتم حساب V_{0_5} بسهولة من خلال قانون أوم كما يلي $V_{0_5} = 5\times1.2 = 6\,V$. بعد ذلك فإن تطبيق قانون كيرشوف للتيار (KCL) على العقدة B لإيجاد I_5 يعطي:

$$-3V_{0_5} + I_5 - 5 = 0$$

مع $V_{0_5} = 6\,V, I_5 = 6+5 = 23\,A$. وأخيراً يعطي تطبيق قانون كيرشوف للجهد (KVL) حول المسار المغلق ما يلي:

$$V_{0_5} - 5I_5 + V_{5_5} = 0$$

أو $V_{5_5} = V_{05} + 5I_5 = 6 + 5x23 = 121\,V$. وتُعطى الاستجابة الإجمالية من خلال مجموع الاستجابات الفردية كما يلي:

$$V_5 = V_{5_{10}} + V_{5_5} = 64 + 121 = 185\,V$$

(٥.٣.٢) المصدر المكافئ Equivalent Source

يكون المصدران متكافئين إذا كان كل منهما ينتج نفس الجهد والتيار بغض النظر عن المقاومة. انظر إلى الدارتين في الشكل.رقم (٥.٥). إذا كان $I_s = \frac{V_s}{R_s}$ كما هو مبين في الشكل على اليمين، فإنه يتم رؤية نفس التيار والجهد للمقاومة R_l في أي من الدارتين كما هو مبين بسهولة باستخدام قواعد مُقسِّم الجهد والتيار. وبالنسبة للدارة على اليسار، فإن التيار والجهد للمقاومة R_l هما:

$$V_l = V_s\left(\frac{R_l}{R_l + R_s}\right),$$

و

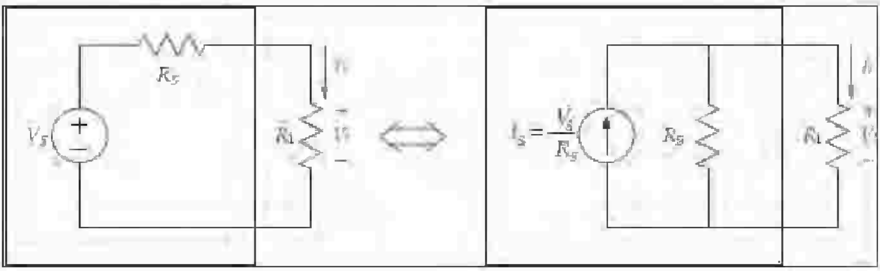
$$I_l = \frac{V_s}{R_l + R_s}$$

وبالنسبة للدائرة على اليمين مع $I_s = \frac{V_s}{R_s}$ ، فإن التيار والجهد للمقاومة R_1 هما:

$$I_1 = I_s\left(\frac{R_1}{R_1 + R_s}\right) = \frac{V_s}{R_1 + R_s}$$

و

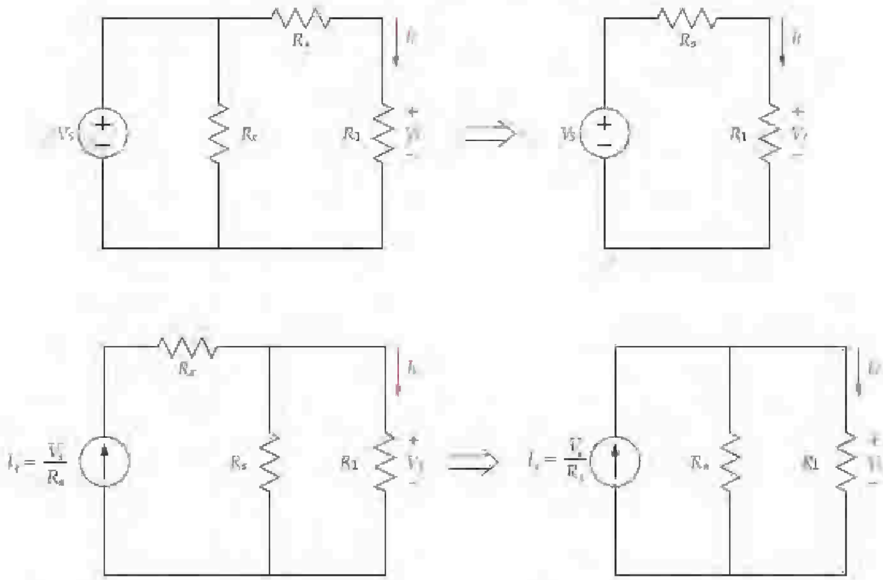
$$V_1 = I_1 R_1 = V_s\left(\frac{R_1}{R_1 + R_s}\right)$$



الشكل رقم (٥.٥). دارتان متكافئتان.

لذا، يمكننا استبدال مصدر الجهد والمقاومة R_s في المربع في الشكل رقم (٥.٥) (يسار) بمصدر التيار والمقاومة R_s في المربع في الشكل رقم (٥.٥) (يمين). وسنرى أن تبديل المصدر مع المقاومة وفقاً للشكل رقم (٥.٥) يبسط تحليل الدارات.

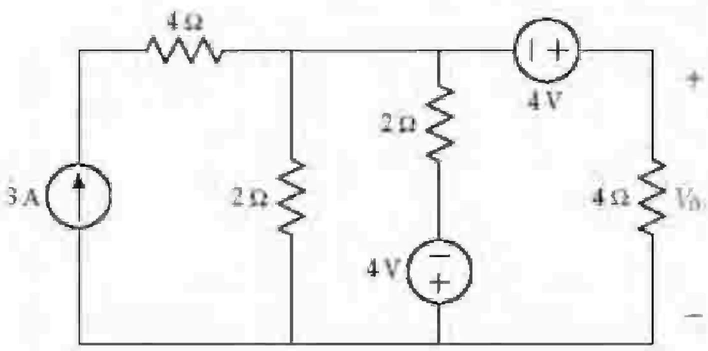
انظر في الشكل رقم (٥.٦). في الدارتين على اليسار، ليس للمقاومة R_x أي تأثير على الجهد والتيار للمقاومة R_1، وعلى النحو المُشار إليه، يمكن استبدال هاتين الدارتين بالدارتين على اليمين من خلال إزالة R_x تماماً.



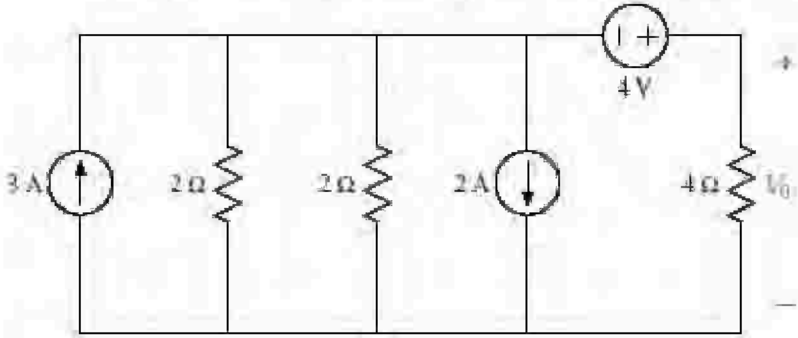
الشكل رقم (٥.٦).الدارات المتكافئة. في كلا الدارتين على اليسار، ليس للمقاومة R_x أي تأثير على الدارة ويمكن إزالتها.

مثال (٥.٧):

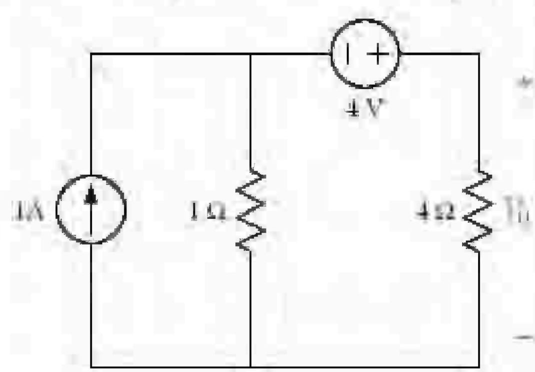
استخدم تحويلات المصدر لإيجاد الجهد V_0 في الدارة التالية.



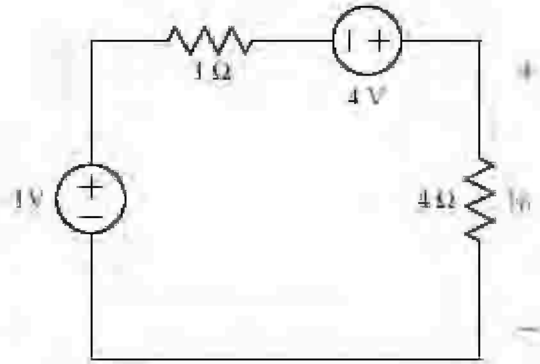
الحل: تتضمن إستراتيجيتنا في هذا الحل جمع المقاومات على التسلسل وعلى التفرع، ومصادر التيار على التفرع ومصادر الجهد على التسلسل. علينا أولاً إزالة المقاومة التي قيمتها ٤ أوم لأنها على التسلسل مع مصدر التيار ٣ أمبير وليس لها تأثير على الدارة، وتحويل المقاومة التي قيمتها ٢ أوم ومصدر الجهد ٤ فولت إلى مصدر تيار $\frac{4}{2}=2A$ على التفرع مع مقاومة قيمتها ٢ أوم كما هو موضح في الشكل التالي. لاحظ أن اتجاه التيار في المصدر الذي تم تحويله متفق مع قطبية مصدر الجهد ٤ فولت.



كما هو موضح في الشكل التالي، فإن جمع مصدريّ التيار على التفرع ينتج عنه مصدر تيار ١ أمبير، وجمع المقاومتين على التفرع ينتج عنه مقاومة ١ أوم.



ويتم تنفيذ تحويل مصدر آخر على مصدر التيار والمقاومة على الفرع كما هو موضح في الشكل التالي.



يتم جمع مصدريْ الجهد، مما يؤدى إلى مصدر جهد ٥ فولت. وباستخدام مُقسِّم الجهد نحصل على ما يلي:

$$V_0 = 5\left(\frac{4}{4+1}\right) = 4\,V$$