الفصل السابع

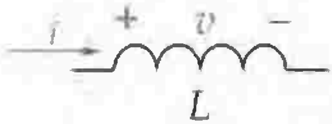
الملفات
INDUCTORS

أخذنا في الاعتبار في الأقسام السابقة الدارات التي تتضمن مصادر ومقاومات يتم وصفها بمعادلات جبرية. إن أية تغييرات في المصدر يتم ملاحظتها بشكل فوري في الاستجابة. في هذا القسم، سندرس الملف، وهو عنصر غير فعال يربط علاقة الجهد بالتيار من خلال معادلة تفاضلية. يتم كتابة الدارات التي تحتوي على ملفات بواسطة المشتقات والتكاملات. إن أية تغييرات في المصدر في الدارات التي تحتوي على ملفات، أي دخل خطوة، لها استجابة ليست فورية، ولكن لها استجابة طبيعية تتغير بشكل أسي واستجابة قسرية لها نفس شكل المصدر.

إن الملف هو عنصر غير فعال قادر على تخزين الطاقة في حقل (مجال) مغناطيسي، ويتم صنعه من خلال لف وشيعة سلكية حول نواة عبارة عن عازل أو مواد مغناطيسية. يتم إنشاء حقل مغناطيسي عندما يتدفق التيار خلال الوشيعة. نحن نستخدم الرمز  لتمثيل الملف في الدارة؛ إن وحدة قياس التحريض (الحث) هي الهنري (H)، حيث ١ هنري= ١ فولت ثانية/أمبير (1 H = 1 Vs/A). تُعطى العلاقة بين الجهد والتيار للملف بواسطة المعادلة التالية:

$$v = L\frac{di}{dt} \qquad (٧.١)$$

إن مبدأ كتابة هبوط الجهد على طرفي الملف مماثل لمبدأ كتابته للمقاومة، كما هو مبين في الشكل رقم (٧.١).

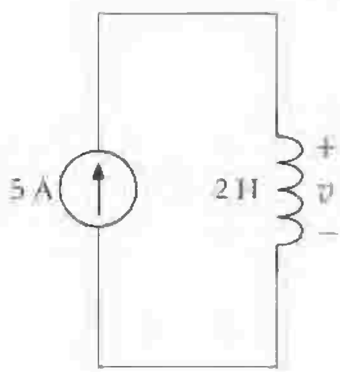


الشكل رقم (٧.١). ملف.

فيزيائياً، لا يمكن للتيار التغير بشكل فوري خلال الملف لأن هناك حاجة إلى جهد لانهائي وفقاً للمعادلة رقم (٧.١) (أي، إن مشتق التيار عند زمن التغيير اللحظي هو اللانهاية). رياضياً، فإن التغير المرحلي في التيار خلال الملف ممكن من خلال تطبيق جهد هو تابع دلتا ديراك (Dirac delta function). وتسهيلاً للعمل، عندما يكون في الدارة تيارات (أو جهود) مستمرة (DC) فقط، فإنه يمكن استبدال الملفات بدارات مقصورة لأن هبوط الجهد على طرفي الملفات يساوي صفراً.

مثال (٧.١):

المطلوب إيجاد v في الدارة التالية.



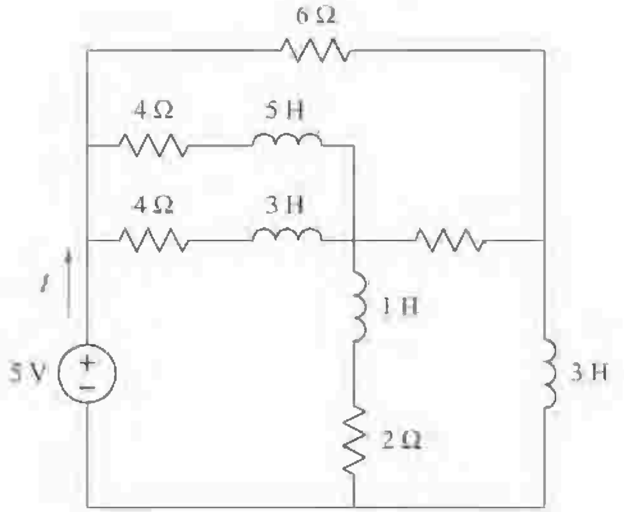
الحل: وفقاً لما سبق فإن:

$$v = L\frac{di}{dt} = 2x\frac{d(5)}{dt} = 0$$

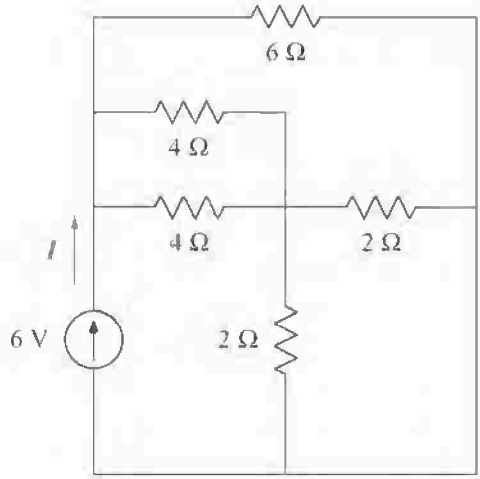
يدل هذا المثال على أن الملف يعمل مثل دارة مقصورة للتيار المستمر (DC).

مثال (٧.٢):

المطلوب إيجاد I في الدارة التالية مع الأخذ في الاعتبار أن المصدر مُطبَّق منذ فترة طويلة جداً.



الحل: بما أن المصدر مُطبَّق منذ فترة طويلة جداً، فإنه التيار المستمر (DC) هو الذي يتدفق فقط في الدارة ويمكن استبدال الملفات بدارات مقصورة كما هو موضح في الشكل التالي:



ولإيجاد I، فإننا نجد أولاً المقاومة الكلية التي تتم رؤيتها من جانب المصدر واستخدام قانون أوم على النحو التالي:

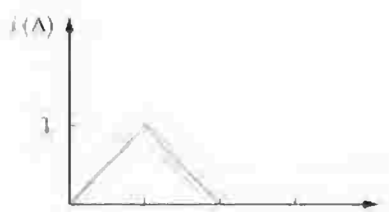
$$R_{EQ} = 6 \| ((4 \| 4) + (2 \| 2)) = 2\Omega$$

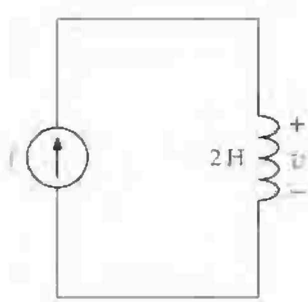
وعليه:

$$I = \frac{6}{2} = 3\Omega$$

مثال (٧.٣):

المطلوب إيجاد v في الدارة التالية.





الحل: إن أفضل السبل لبلوغ حل هذه المسألة هو عن طريق تجزئته إلى فترات زمنية تتفق مع التغيرات في تيار الدخل. من الواضح أنه من أجل $t < 0$ و $t > 2$، فإن التيار يساوي صفراً، وعليه $v = 0$. نستخدم المعادلة.رقم (٧.١) لتحديد الجهد في الفترتين الأُخريين على النحو التالي:

من أجل $0 < t < 1$

في هذه الفترة الزمنية، فإن الدخل هو $i = t$، و

$$v = L\frac{di}{dt} = 2\,\frac{d(t)}{dt} = 2\,V$$

من أجل $1 \leq t \leq 2$

في هذه الفترة الزمنية، فإن الدخل هو $i = -(t-2)$، و

$$v = L\frac{di}{dt} = 2\,\frac{d(-(t-2))}{dt} = -2\,V$$

تحدد المعادلة رقم (٧.١) الجهد على طرفي الملف من أجل تيار معين. افترض أنه يتم إعطاء أحدهم الجهد على طرفي الملف، والمطلوب هو إيجاد التيار. نبدأ في هذه الحالة من المعادلة.رقم (٧.١) عن طريق ضرب كلا الطرفين بـ dt، وهذا يعطي:

$$v(t)\,dt = L di$$

وبمكاملة كلا الطرفين نحصل على ما يلي:

$$\int_{t_0}^{t} v(\lambda)\,d\lambda = L \int_{i(t_0)}^{i(t)} d\alpha$$

أو

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\lambda)\,d\lambda + i(t_0) \qquad (٧.٢)$$

ومن أجل $t_0 = 0$، كما هو الحال غالباً في حل مسائل الدارات، تنخفض المعادلة رقم (٧.٢) إلى:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(\lambda)\, d\lambda + i(0) \tag{٧.٣}$$

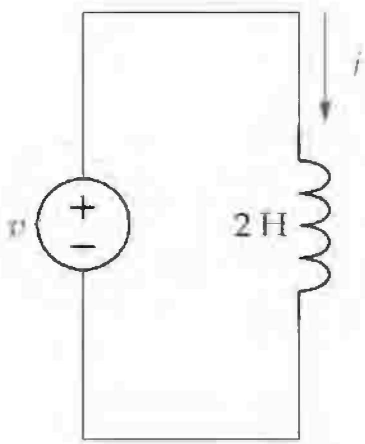
ومن أجل $t_0 = -\infty$، فإن التيار الابتدائي بحكم التعريف مساوٍ للصفر، وعليه تنخفض المعادلة رقم (٧.٢) إلى:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^t v(\lambda)\, d\lambda \tag{٧.٤}$$

يتم عادة تحديد التيار الابتدائي في المعادلة رقم (٧.٢)، $i(t_0)$، في نفس اتجاه التيار i وهو ما يعني أن $i(t_0)$ هو مقدار موجب. إذا كان اتجاه $i(t_0)$ هو عكس اتجاه i (كما يحدث عندما نكتب معادلات عقدة)، فإن $i(t_0)$ عندئذ سالب.

مثال (٧.٣):

المطلوب إيجاد i عندما $t \geq 0$ إذا كان $i(0) = 2\ \text{A}$ و $v(t)=4e^{-3t}\,u(t)$ في الدارة التالية.



الحل: لدينا من المعادلة رقم (٧.٢) ما يلي:

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,d\lambda+i(t_0)=\frac{1}{2}\int_{0}^{t}4\,e^{-3\lambda}\,d\lambda+i(0)=\frac{1}{2}\int_{0}^{t}4\,e^{-3\lambda}d\lambda+2$$
$$=2\frac{e^{-3\lambda}}{-3}\bigg|_{\lambda=0}^{t}+2$$
$$=\frac{2}{3}(4-e^{-3t})u(t)V$$

(٧.١) القدرة (الاستطاعة) والطاقة
POWER AND ENERGY

نظراً لأن الملف عنصر غير فعال فإنه يمتص القدرة وفقاً للعلاقة التالية:

$$p=vi=Li\frac{di}{dt} \tag{٧.٥}$$

لا يتم استهلاك القدرة داخل الملف على شكل حرارة، كما يحدث في المقاومة، ولكن يتم تخزينها على شكل طاقة في الحقل المغناطيسي حول الوشيعة خلال أي فترة من الزمن $[t_0, t]$ كما يلي:

$$w(t)-w(t_0)=\int_{t_0}^{t} p\,dt=L\int_{t_0}^{t} i\frac{di}{dt}dt \tag{٧.٦}$$
$$=L\int_{i(t_0)}^{i(t)} i\,di=\frac{1}{2}L\left([i(t)]^2-[i(t_0)]^2\right)$$

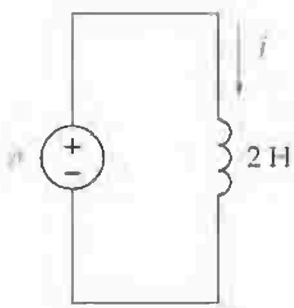
حيث إن وحدة الطاقة هي جول (J). عند زمن يساوي اللانهاية السالبة (∞-)، فإننا نفترض أن التيار الابتدائي هو صفر، وعليه تُعطى الطاقة الإجمالية من خلال المعادلة التالية:

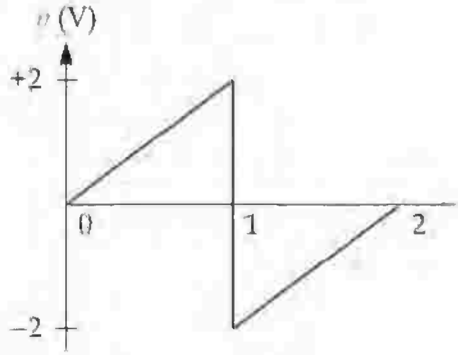
$$w(t)=\frac{1}{2}Li^2 \tag{٧.٧}$$

إن أي طاقة مُخزَّنة في المجال المغناطيسي قابلة للاسترداد. إذا كانت القدرة سالبة في المعادلة رقم (٧.٥)، فإنه يتم استخراج الطاقة من الملف. وإذا كانت القدرة موجبة، فإنه يتم تخزين الطاقة في الملف.

مثال (٧.٣):

المطلوب إيجاد قدرة الملف في الدارة التالية عندما $t > 0$ وإذا كان $i(0) = 0$ A.





الحل: نحل أولاً بالنسبة للتيار بحيث يمكن تطبيق المعادلة رقم (٧.٥) لإيجاد القدرة. كما كان من قبل، فإن أفضل السبل لإيجاد الحل هو عن طريق تجزئته إلى فترات زمنية تتفق مع التغيرات في جهد الدخل.

عندما $0 < t < 1$

في هذه الفترة الزمنية، فإن الدخل هو $v = 2t$، و

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(\lambda)\,d\lambda + i(0) = \frac{1}{2}\int_0^t 2\lambda\,d\lambda = \frac{t^2}{2}A$$

والقدرة لهذه الفترة الزمنية هي:

$$p = vi = 2t \times \frac{t^2}{2} = t^3 \; W$$

إن التيار المطلوب للشرط الابتدائي عند الزمن $t = 1$ في الجز التالي هو :

$$i(1) = \left.\frac{t^2}{2}\right|_{t=1} = \frac{1}{2} \; A$$

عندما $1 \le t \le 2$

في هذه الفترة الزمنية ، فإن الدخل هو $v = 2(t-2)$ ، و

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_1^t v(\lambda)\, d\lambda + i(1) = \frac{1}{2}\int_1^t 2(\lambda - 2)\, d\lambda + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{t^2}{2} - 2t + 2 \; A$$

وبناء عليه ، فإن القدرة ستكون :

$$p = vi = 2(t-2)\, x\, (\frac{t^2}{2} - 2t + 2) = t^3 - 6t^2 + 12t - 8 \; W$$

عندما $t > 2$

تكون القدرة مساوية للصفر في هذا الفترة الزمنية لأن الجهد يساوي الصفر.