الفصل الثامن

المكثفات
Capacitors

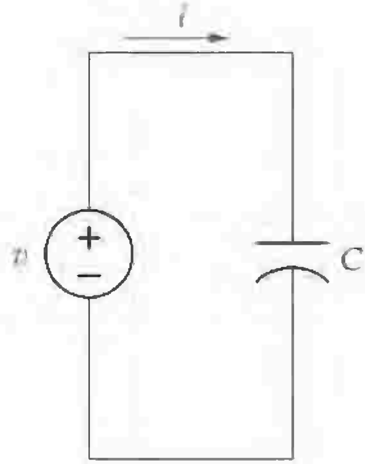
المكثف هو أداة تقوم بتخزين الطاقة في حقل كهربائي من خلال فصل الشحنة عند استقطابها بشكل مناسب بواسطة جهد ما. تتكون المكثفات البسيطة من صفائح متوازية من مادة ناقلة مفصولة بفجوة مملوءة بمادة عازلة كهربائياً. تحتوي المواد العازلة كهربائياً، مثل الهواء أو رقاقات الميكا (مادة شبه زجاجية) أو التيفلون، على عدد كبير من ثنائيات الأقطاب الكهربائية التي تصبح مُستقطبة في وجود حقل كهربائي. يتناسب فصل الشحنة الناجم عن استقطاب العازل الكهربائي مع الجهد الخارجي وتُعطى بالعلاقة التالية:

$$q(t) = C\,v(t) \tag{٨.١}$$

حيث تمثل C سعة العنصر. إن وحدة قياس السعة هي الفاراد (F)، حيث ١ فاراد = ١ كولومب/ فولت (1 F = 1 C/V). إننا نستخدم الرمز للدلالة على المكثف؛ ويتم قياس معظم المكثفات بواسطة الميكروفاراد (١ ميكروفاراد = ١٠⁻⁶ فاراد) ($1\ \mu F = 10^{-6}\ F$) أو بيكو فاراد (١ بيكو فاراد = ١٠⁻¹² فاراد) ($1\ pF = 10^{-12}\ F$). يوضح الشكل رقم (٨.١) مكثف في دارة.

باستخدام العلاقة بين التيار والشحنة، يتم كتابة المعادلة رقم (٨.١) في شكل أكثر فائدة لمسائل تحليل الدارات على النحو التالي:

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt} \qquad (٨.٢)$$



الشكل رقم (٨.١). دارة مع مكثف.

يتم تحديد سعة المكثف من خلال سماحية العازل الكهربائي ($\varepsilon = 8.854 \times 10^{-12}$ فاراد/المتر بالنسبة للهواء) الذي يملأ الفجوة بين الصفائح المتوازية، ومسافة الفجوة بين الصفائح، d، ومساحة المقطع العرضي للصفائح، A، كما يلي:

$$C = \frac{\varepsilon A}{d} \qquad (٨.٣)$$

كما هو موضح، يتكون المكثف فيزيائياً من سطحين ناقلين يقومان بتخزين الشحنة، مفصولين بمادة رقيقة عازلة لديها مقاومة كبيرة جداً. في واقع الأمر، لا يتدفق التيار من خلال صفائح المكثف. وليس، كما افترض جيمس كلارك ماكسويل (James Clerk Maxwell) عندما وصف النظرية الكهرومغناطيسية الموحدة، فإن تيار الإزاحة

يتدفق داخلياً بين صفائح المكثف وهذا التيار يساوي التيار الذي يتدفق إلى المكثف ومن المكثف. وعليه يتم الحفاظ على قانون كيرشوف للتيار (KCL). وينبغي أن يكون واضحاً من المعادلة رقم (٨.٢) أن المواد العازلة كهربائياً لا تنقل التيارات المستمرة (DC)؛ تعمل المكثفات كدارات مفتوحة في وجود التيارات المستمرة.

مثال (٨.١):

افترض أن $v = 5$ فولت و $C = 2$ فاراد للدارة المبينة في الشكل رقم (٨.١). المطلوب إيجاد i.

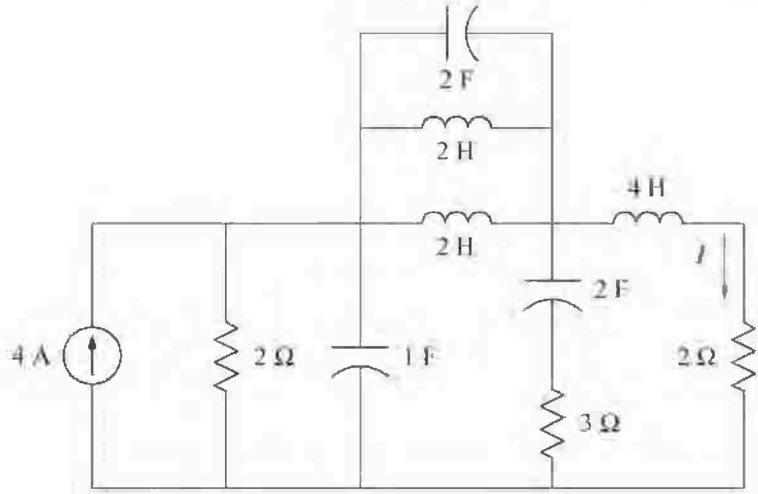
الحل:

$$i = C\frac{dv}{dt} = 2x\frac{d}{dt}(5) = 0$$

إن المكثف هو دارة مفتوحة بالنسبة للجهد المستمر (DC).

مثال (٨.٢):

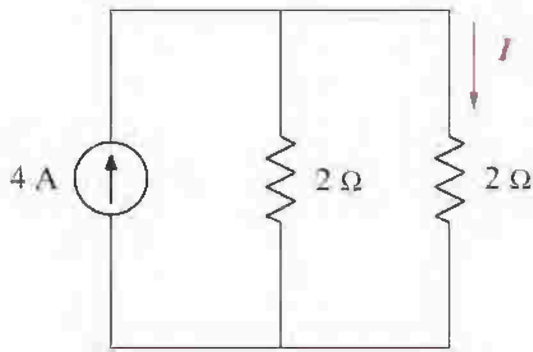
المطلوب إيجاد I في الدارة التالية مع الأخذ بالاعتبار أن مصدر التيار مُطبَّق منذ فترة طويلة جداً.



الحل: نظراً لأن المصدر مُطبَّق منذ فترة طويلة جداً، فإن التيار المستمر فقط هو الذي يتدفق في الدارة. وعلاوة على ذلك يمكن استبدال الملف بدارات مقصورة والمكثفات يمكن استبدالها بدارات مفتوحة، كما هو موضح في الشكل التالي.

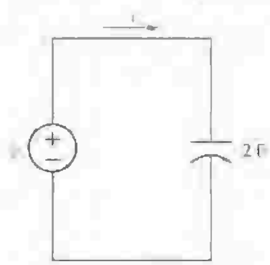
ولإيجاد I، فإننا نستخدم قانون مُقسِّم التيار كما يلي:

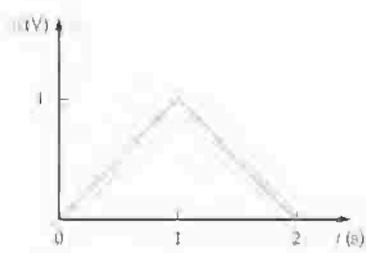
$$I = 4x\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 2\,A$$



مثال (٨.٣):

المطلوب إيجاد i للدارة التالية.





الحل: عندما $t < 0$ و $t > 2$ فإن $v = 0$ فولت وعليه $i = 0$ في هذه الفترة الزمنية. وفي وجود القيم غير الصفرية، فإنه يتم وصف شكل موجة الجهد بواسطة تابعين مختلفين،

$v = t$ فولت عندما $0 \le t \le 1$، و $v = -(t-2)$ فولت عندما $2 \ge t > 0$. يتم استخدام المعادلة رقم (٨.٢) لتحديد التيار لكل فترة زمنية على النحو التالي:

عندما $0 < t < 1$

$$i = C\frac{dv}{dt} = 2x\frac{d}{dt}(t) = 2\ A$$

و عندما $1 \le t \le 2$

$$i = C\frac{dv}{dt} = 2x\frac{d}{dt}(-(t-2)) = -2\ A$$

لا يمكن تغيير الجهد بشكل فوري عبر مكثف. وحتى يكون هناك تغيير مرحلي في الجهد عبر مكثف فإن هذا يتطلب تدفق تيار لانهائي من خلال المكثف، وهذا ليس ممكناً فيزيائياً. بالطبع، هذا أمر ممكن حسابياً باستخدام تابع دلتا ديراك (Dirac delta function).

تحدد المعادلة رقم (٨.٢) التيار المار خلال مكثف من أجل جهد معين. افترض أنه يتم إعطاء أحدهم تياراً يمر خلال مكثف والطلب منه إيجاد الجهد. لإيجاد الجهد، فإننا نبدأ من المعادلة.رقم (٨.٢) من خلال ضرب كلا الطرفين بـ dt، وهذا يعطي:

$$i(t)\ dt = C\ dv$$

إن تكامل الطرفين يعطي:

$$\int_{t_0}^{t} i(\lambda)\, d\lambda = C \int_{v(t_0)}^{v(t)} dv$$

أو

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\, dt + v(t_0) \qquad (٨.٤)$$

عندما $t_0 = 0$ تنخفض المعادلة رقم (٨.٤) إلى:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + v(0) \qquad (٨.٥)$$

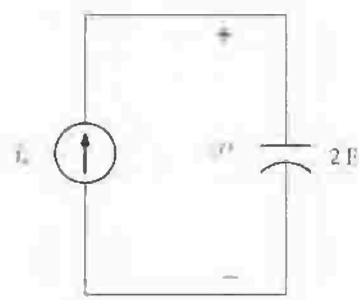
وعندما $t_0 = -\infty$ تنخفض المعادلة رقم (٨.٤) إلى:

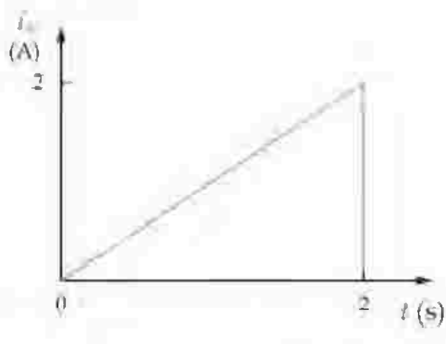
$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\lambda)\,d\lambda \qquad (٨.٦)$$

يتم عادة تحديد الجهد الابتدائي، $v(t_0)$، في المعادلة.رقم (٨.٤) بنفس قطبية v، وهو ما يعني أن $v(t_0)$ هو مقدار موجب. إذا كانت قطبية $v(t_0)$ عكس اتجاه v (كما يحدث عندما نكتب معادلات شبكة)، فإن $v(t_0)$ عندئذ يكون سالباً.

مثال (٨.٤):

المطلوب إيجاد v للدارة التالية.





الحل: يتم وصف شكل موجة التيار بثلاثة توابع مختلفة: في الفترة الزمنية $t \leq 0$، وفي الفترة الزمنية $0 < t \leq 2$، وفي الفترة الزمنية $t > 2$. لإيجاد الجهد نطبق المعادلة رقم (٨.٦) لكل فترة زمنية على النحو التالي:

عندما $t \leq 0$

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} 0\,dt = 0\,V$$

عندما $0 \leq t \leq 2$

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i\,dt + v(0)$$

ومع $v(0) = 0$ يكون لدينا :

$$v(t) = \frac{1}{2}\int_{0}^{t} \lambda\,d\lambda = \frac{1}{2}(\frac{\lambda^2}{2})\Bigg|_{0}^{t} = \frac{t^2}{4}\,V$$

إن الجهد المطلوب عند $t = 2$ للشرط الابتدائي في الجزء التالي هو :

$$v(2) = \frac{t^2}{4}\Bigg|_{t=2} = 1\,V$$

عندما $t = 2$

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{2}^{t} i\,dt + v(2) = \frac{1}{2}\int_{2}^{t} 0\,dt + v(2) = 1\,V$$

(٨.١) القدرة (الاستطاعة) والطاقة

POWER AND ENERGY

إن المكثف عنصر غير فعال يمتص القدرة وفقاً للعلاقة التالية :

$$p = vi = C\ v\ \frac{dv}{dt} \qquad (٨.٧)$$

يتم تخزين الطاقة في المجال الكهربائي خلال أي فترة من الزمن $[t_0, t]$ كما يلي :

$$w(t)-w(t_0)=\int_{t_0}^{t} p\,dt = C\int_{t_0}^{t} v\frac{dv}{dt}\,dt$$

$$= C\int_{v(t_0)}^{v(t)} v\,dv = \frac{1}{2}C([v(t)]^2-[v(t_0)]^2) \qquad (٨.٨)$$

حيث إن وحدة الطاقة هي جول (J). وعند زمن يساوي اللانهاية السالبة (∞-)، نفترض أن الجهد الابتدائي يساوي صفر، وعليه تُعطى الطاقة الإجمالية من خلال العلاقة التالية:

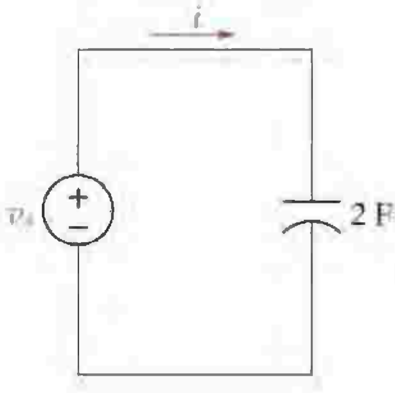
$$w(t)=\frac{1}{2}C\,v^2 \qquad (٨.٩)$$

إن أي طاقة مُخزّنة في الحقل الكهربائي قابلة للاسترداد. إذا كانت القدرة سالبة في المعادلة رقم (٨.٧)، فإنه يتم استخراج الطاقة من المكثف. إذا كانت القدرة موجبة، فإنه يتم تخزين الطاقة في المكثف.

مثال (٨.٥):

المطلوب إيجاد القدرة والطاقة للدارة التالية.

$$v_s(t)=\begin{cases} 0v & t<0 \\ t^2 & 0\le t\le 1 \\ e^{-(t-1)}V & t>1 \end{cases}$$



الحل: لإيجاد القدرة فإننا نحتاج أولاً إلى إيجاد التيار المحسوب من المعادلة.رقم (٨.٢).

$$i(t)= C\frac{dv}{dt} = \begin{cases} 0\,A & t<0 \\ 4t\,A & 0\le t\le 1 \\ -2e^{-(t-1)}\,A & t>1 \end{cases}$$

يتم استخدام المعادلة رقم (٨.٧) لإيجاد القدرة على النحو التالي :

$$p(t)=v.i=\begin{cases} 0 & t<0 \\ t^2\,.4t=4t^3\,W & 0\le t\le 1 \\ e^{-(t-1)}\,.(-2e^{-(t-1)})=-2e^{-2(t-1)}\,W & t>1 \end{cases}$$

ويتم حساب الطاقة في كل فترة زمنية باستخدام المعادلة.رقم (٨.٩) على النحو التالي :

$$w(t)=\frac{1}{2}C\,v^2=\begin{cases} 0 & t<0 \\ \frac{1}{2}x2\,[t^2]^2=t^4\,J & 0\le t\le 1 \\ \frac{1}{2}x2\,[e^{-(t-1)}]^2=e^{-2(t-1)}\,J & t>1 \end{cases}$$

لاحظ أنه يتم تخزين الطاقة في الفترة الزمنية $0 \le t \le 1$ لأن القدرة موجبة، ويتم استخراج الطاقة من الحقل الكهربائي بواسطة المصدر في الفترة $t>1$ لأن القدرة سالبة.

من المعادلة.رقم (٨.٨)، نحسب الطاقة المُخزَّنة في الحقل الكهربائي خلال الفترة الزمنية [0 , 1] كما يلي :

$$w(t)-w(0)=\frac{1}{2}x2\,(v(1)^2-v(0)^2)=1\,J$$

والطاقة التي يقدمها الحقل الكهربائي في الفترة الزمنية [∞ , 1] كما يلي :

$$w(\infty)-w(1)=\frac{1}{2}\times 2(v(\infty)^2-v(1)^2)=-1\,J$$