الفصل الرابع

مقاييس النزعة المركزية

• أهداف الفصل الرابع • مقدمة • المتوسط الحسابي * المتوسط الحسابي للقيم الخام * المتوسط الحسابي لقيم الجداول التكرارية – طريقة مراكز الفئات – طريقة المتوسط الفرضي • الوسيط * الوسيط للقيم العددية القليلة – الفردية – الزوجية * الوسيط لقيم الجداول التكرارية * الوسيط من خلال الرسم • المنوال * المنوال من خلال الطرق الحسابية – طريقة مركز الفئة المنوالية – طريقة الجذب – طريقة الفروق بين التكرارات * المنوال من خلال الرسم • تعقيب على مقاييس النزعة المركزية • أسئلة على الفصل الرابع

أهداف الفصل الرابع

١- أن يتعرف الطالب على أهمية مقاييس النزعة المركزية (المتوسط الحسابي- الوسيط - المنوال) وكيف يمكن الاستفادة منهم في البحوث.

٢- أن يتعرف الطالب على طرق حساب المتوسط الحسابي سواء من الأعداد القليلة (القيم الخام) أو من الجداول التكرارية (طريقة مراكز الفئات - الطريقة المختصرة) والمنطق الرياضي الذي يحكم حسابه.

٣- أن يتعرف الطالب على طرق حساب الوسيط سواء للقيم الخام الفردية أو الزوجية، أو للقيم المتجمعة في جدول تكراري والمنطق الرياضي الذي يحكم حسابه، وكذلك إمكانية حسابه عن طريق الرسم.

٤- أن يتعرف الطالب على طرق حساب المنوال بالطرق الرياضية المختلفة والمنطق الرياضي الذي يحكم كل منها، وكذلك التعرف على طريقة حسابه عن طريق الرسم.

٥- أن يستطيع الطالب عقد مقارنة بين مقاييس النزعة المركزية الثلاثة وحساب أي منهم في حالة حصوله على قيم تمثل المقياسين الآخرين.

٦- أن يستطيع الطالب حل التمارين التي تتعلق بالمقاييس الثلاثة.

مقدمـــة

مما لا شك فيه أن الفصل السابق والخاص بتصنيف البيانات الإحصائية وتمثيلها بالرسم أوضح كيف يمكن الاستفادة من الإحصاء في إعطاء صورة مفصلة لجميع البيانات في صيغة ملائمة هي صيغة التوزيع التكراري أو الرسومات البيانية بأشكالها المختلفة، بيد أن ما يطمح إليه الباحث في مجال علم النفس وعلم الاجتماع وغيرهما من العلوم الإنسانية يتعدى هذا الحد بكثير.. ولعل أهم ما قد يطمح إليه الباحث في هذه المجالات الوصول إلى قيمة تحدد ما يسمى بالموضع العام General Location في التوزيع التكراري للبيانات، وهو الموضع الذي تتلخص فيه كل درجات المجموعة، أو بالأحرى هو الموضع الذي يعبر عن قيم المجموعة التي يشملها البحث بقيمة واحدة.

ويمكن الاستفادة من تحديد هذا الموضع في مواقف كثيرة قد يصطدم بها الباحث من قبيل المقارنة بين أداء مجموعتين، والتي قد لا تتأتى من خلال مجرد الاطلاع على التوزيع التكراري الخاص بكل منهما، ولكنها تتوفر إذا أمكن المقارنة بين قيمتين فقط.. أو مقارنة أداء مجموعة واحدة تحت ظرفين مختلفين أو أكثر، فضلا عن إمكانية التعرف على الدرجات التي تقع في مستوى أدنى أو أعلى من هذا الموضع، وما هو غير ذلك من أغراض التوضيح أو المقارنة.

وتقوم مقاييس النزعة المركزية Measures of Central tendency بتحديد هذا الموضع أو هذه القيمة المركزية، ومن أكثر مقاييس النزعة المركزية شيوعا في البحوث ما يلي:

أولاً: المتوسط الحسابي Arithmetic Mean.

ثانياً: الوسيط Median.

ثالثاً: المنوال Mode.

وفيما يلي طرق حساب كل منهم بالتفصيل:

أولاً: المتوسط الحسابي

يعد المتوسط الحسابي من أبسط المقاييس المتداولة على وجه العموم، لسهولة حسابه وفهم معناه، ومن ثمة فهو من أكثر مقاييس النزعة المركزية استخداماً ومن أهمها من الناحية النظرية والتطبيقية، ويمكن تعريف المتوسط الحسابي جبرياً بأنه مجموع المشاهدات مقسوما على عددها. فإذا كان لدينا عددٌ من المشاهدات (ويرمز لها بالرمز ن) هي:

س١، س٢، س٣، س٤، .... الخ مجموع س

فإن المتوسط الحسابي (ويرمز له بالرمز م) يكون:

$$م = \frac{مجـ س}{ن}$$

فإذا كانت درجات عشرة أفراد على أحد المقاييس هي على الترتيب:

٣٠ – ١٧ – ٢٩ – ١٥ – ٢٧ – ١٣ – ٢٢ – ٣٥ – ٢٤ – ٣٨.

كان متوسط درجاتهم = $\frac{٣٠+١٧+٢٩+١٥+٢٧+١٣+٢٢+٣٥+٢٤+٣٨}{٢} = \frac{٢٥٠}{١٠} = ٢٥$

ويلاحظ سهولة إيجاد قيمة المتوسط، واستخدام جميع الدرجات في إيجاده مما يرفع من كفاءته، ولا يشترط أن يكون المتوسط الحسابي دائماً عدداً صحيحاً، كما لا يشترط أن تكون قيمته إحدى القيم المستخدمة في العملية الحسابية، ولكنها قيمة تتركز حولها وتتجمع مختلف قيم العينة، ويلاحظ أن المجموع الجبري لانحراف القيم عن المتوسط يكون دائما (صفر)، وإذا طبقنا ذلك على المثال السابق نجد أن:

س	س – م
٣٠	+٥
١٧	–٨
٢٩	+٤
١٥	–١٠
٢٧	+٢
١٣	–١٢
٢٢	–٣
٣٥	+١٠
٢٤	–١
٣٨	+١٣
	+٣٤
	–٣٤
	—
	صفر

والواقع أننا كثيرا ما نستخدم المتوسط الحسابي في حياتنا اليومية، فصاحب المصنع يحتاج لمعرفة متوسط إنتاج مصنعه اليومي خلال الشهر، فيقوم بجمع إنتاج كل يوم من أيام الشهر وقسمة الناتج على عدد أيام الشهر (٢٨ أو ٣٠ أو ٣١)، ويمكنه ذلك من مقارنة إنتاج مصنعه اليومي خلال شهرين أو أكثر.. كما أننا إذا أردنا أن نتعرف على مستوى أداء أحد التلاميذ في امتحان مادة ما، نقوم بجمع درجات تلاميذ الفصل جميعهم وقسمة الناتج على عددهم فنحصل على المتوسط، ومن ثمة يمكننا تعيين درجة أي تلميذ من حيث قربها أو بعدها عن متوسط أداء التلاميذ.

المتوسط الحسابي لقيم الجداول التكرارية

أ) طريقة مراكز الفئات

بطبيعة الحال ينتج عن الجدول التكراري أن قيم الأفراد جميعها لا تكون معروفة فهي متجمعة على هيئة فئات، ولننظر للجدول التكراري التالي لتوضيح المقصود:

فئات	تكرارات
١٠-١٩	٣
٢٠-٢٩	٣
٣٠-٣٩	٥
٤٠-٤٩	٦
٥٠-٥٩	٣
مجموع	٢٠

ويعكس الجدول السابق أن الدرجات من ١٠-١٩ والخاصة بالفئة الأولى حصل عليها ثلاثة أشخاص، والدرجات من ٢٠-٢٩ حصل عليها ثلاثة أشخاص، والدرجات من ٣٠-٣٩ حصل عليها خمسة أشخاص، ومن ٤٠-٤٩ حصل عليها ستة أشخاص، ومن ٥٠-٥٩ حصل عليها ثلاثة أشخاص.. وإذا أردنا استخراج المتوسط الحسابي لهؤلاء الأشخاص فإن الصعوبة التي ستواجهنا هي عدم معرفتنا للدرجة الفعلية للأفراد في كل فئة؛ لأنها محصورة بين قيمتين، فهي بالنسبة لأفراد الفئة الأولى محصورة بين ١٠ و١٩، ولأفراد الفئة الثانية محصورة بين ٢٠ و٢٩... وهكذا، وعليه لن نستطيع جمع الدرجات للأفراد جميعهم تمهيدا لقسمة الناتج على عددهم للحصول على المتوسط.

وإزاء هذا الموقف قد يفترض الباحث أن أفراد كل فئة حصلوا على الحد الأدنى لها، أي أن درجة كل فرد من أفراد الفئة الأولى في المثال السابق وعددهم ثلاثة هي (١٠).. ودرجة كل فرد من أفراد الفئة الثانية هي (٢٠).. وهكذا، ومن ثمة يكون مجموع درجات الأفراد في كل فئة هو حاصل ضرب الحد الأدنى لها في عدد الأفراد فيها (التكرارات) كالتالي:

مجموع درجات أفراد الفئة الأولى = ١٠ × ٣ = ٣٠

مجموع درجات أفراد الفئة الثانية = ٢٠ × ٣ = ٦٠

مجموع درجات أفراد الفئة الثالثة = ٣٠ × ٥ = ١٥٠

مجموع درجات أفراد الفئة الرابعة = ٤٠ × ٦ = ٢٤٠

مجموع درجات أفراد الفئة الخامسة = ٥٠ × ٣ = ١٥٠

ويصبح حينئذ المتوسط الحسابي = $\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}$

$$٣١,٥ = \frac{٣٦٠}{٢٠} = \frac{١٥٠+٢٤٠+١٥٠+٦٠+٣٠}{٢٠}$$

أو قد يفترض الباحث أن أفراد كل فئة حصلوا على الحد الأعلى لها، أي أن درجة كل فرد من أفراد الفئة الأولى وعددهم ثلاثة هي (١٩)، ودرجة كل فرد من أفراد الفئة الثانية هي (٢٩)... وهكذا، ومن ثمة يكون مجموع درجات الأفراد في كل فئة هو حاصل ضرب الحد الأعلى لها في عدد الأفراد فيها (التكرارات) كالتالي:

مجموع درجات أفراد الفئة الأولى = ١٩ × ٣ = ٥٧

مجموع درجات أفراد الفئة الثانية = ٢٩ × ٣ = ٨٧

مجموع درجات أفراد الفئة الثالثة = ٣٩ × ٥ = ١٩٥

مجموع درجات أفراد الفئة الرابعة = ٤٩ × ٦ = ٢٩٤

مجموع درجات أفراد الفئة الخامسة = ٥٩ × ٣ = ١٧٧

ويصبح حينئذ المتوسط الحسابي ($\frac{\text{مج س}}{\text{ن}}$) =

$$٤٠,٥ = \frac{٨١٠}{٢٠} = \frac{١٧٧+٢٩٤+١٩٥+٨٧+٥٧}{٢٠}$$

ويتضح من خلال الفرضين أن المتوسط الحسابي مختلف في كل فرض وأن الفارق بينهما واسع، فهو في الفرض الأول ٣١,٥، وفي الفرض الثاني ٤٠,٥.. وتجنبا لهذا الفرق الذي ينتج عن اتخاذ باحث ما لأي الفرضين دون الآخر من الممكن إعطاء كل فرد في الفئة قيمة متوسطة بين حدها الأدنى والأعلى، وهي ما تسمى بمركز الفئة فنعطي أفراد الفئة الأولى في المثال السابق قيمة واحدة مقدارها (١٥)، وهي الدرجة

التي تقع بين ١٠ و١٩، وأفراد الفئة الثانية (٢٥) وهي الدرجة التي تقع بين ٢٠ و٢٩... وهكذا.

ويمكن الحصول على مركز كل فئة بسهولة عن طريق جمع الحد الأدنى لها على الحد الأدنى للفئة التي تليها وقسمة الناتج على ٢ كالتالي:

$$\frac{\text{الحد الأدنى للفئة + الحد الأدنى للفئة التي تليها}}{٢}$$

فيكون مركز الفئة الأولى = $\frac{٢٠+١٠}{٢} = \frac{٣٠}{٢} = ١٥$

وهكذا بالنسبة لكل فئة...

ويكون مجموع درجات أفراد الفئة الأولى وفقا لهذا الأساس=١٥×٣= ٤٥، ومجموع درجات أفراد الفئة الثانية = ٢٥×٣ = ٧٥، ومجموع درجات أفراد الفئة الثالثة = ٣٥×٥ = ١٧٥، ومجموع درجات أفراد الفئة الرابعة = ٤٥ × ٦ = ٢٧٠، والفئة الخامسة = ٥٥ × ٣ = ١٦٥... ويكون المجموع الكلي للقيم العشرين = ٤٥ + ٧٥ + ١٧٥ + ٢٧٠ + ١٦٥ = ٧٣٠.

وحينئذ يصبح المتوسط = $\frac{٧٣٠}{٢٠} = ٣٦,٥$

ويطلق على هذه الطريقة اسم (طريقة مراكز الفئات)، وفيما يلي مثال للتوضيح:

فيما يلي درجات ٥٠ فرداً على مقياس للاتجاهات نحو التفكير الخرافي والمطلوب توزيعها في جدول تكراري وحساب متوسط الدرجات بطريقة مراكز الفئات:

١٤	١٦	٢٠	٢٣	١٠	١٣	١٧	٢١	٢٩	١٨
١٢	١٩	٢٠	٢٣	٢٧	٢٥	٢٢	٢١	٢٥	٢٩
١٨	٢٠	٢٨	٢٤	١٧	٢١	٢٥	٢٤	٢٢	١٨
١٥	٢٠	٢٣	٢٦	١٩	٢٣	٢٧	٢٥	٢٠	١٧
١٩	٢٠	٢٢	١٦	٢٣	١٨	٢٦	٢٢	٢٠	١٨

الحـــل:

فئات (ف-)	تكرارات (ك)	مراكز الفئات (س)	مراكز الفئات × التكرارات (س×ك)
١٠-	١	١١	١١
١٢-	٢	١٣	٢٦
١٤-	٢	١٥	٣٠
١٦-	٥	١٧	٨٥
١٨-	٨	١٩	١٥٢
٢٠-	١٠	٢١	٢١٠
٢٢-	٩	٢٣	٢٠٧
٢٤-	٦	٢٥	١٥٠
٢٦-	٤	٢٧	١٠٨
٢٨-	٣	٢٩	٨٧
مجموع	٥٠		١٠٦٦

والذي تم في الجدول السابق هو:

١- توزيع الدرجات في جدول تكراري.

٢- الحصول على مراكز الفئات بالأسلوب الذي سبق شرحه ويرمز لها بالرمز (س).

٣- ضرب مركز كل فئة في تكرارها (س×ك).

٤- يحسب مجـ س × ك، بجمع حاصل ضرب مركز الفئة في التكرار الخاص بها لكل الفئات.

وللحصول على المتوسط يتم قسمة مجموع حاصل ضرب مراكز الفئات في التكرارات على مجموع التكرارات، والتي تتضح من القانون التالي:

$$م = \frac{مج\ س \times ك}{مجـ\ ك}$$

فيكون المتوسط الحسابي للدرجات السابقة $= \frac{١٠٦٦}{٥٠} = ٢١,٣٢$

وتجدر الإشارة إلى أن المتوسط الحسابي المستخرج من هذا الجدول المتجمع في فئات لا ينطبق دائما انطباقا تاما على المتوسط الحسابي الذي نستخرجه من قيم أو درجات الحالات الخمسين كل حدة، ولكن الفرق لن يكون كبيرا ويمكن التغاضي عنه إذا ما أخذ في الاعتبار الاختصار في الوقت والجهد، والأخطاء التي قد تترتب على جمع عدد كبير من الأرقام.

إذن نستطيع أن نقول بأن طريقة حساب المتوسط في حالات القيم الخام هي:

$$م = \frac{مجـ\ س}{ن}$$

وطريقة حسابه في حالات الأعداد الكثيرة والتي تتطلب توزيعا تكراريا هي:

$$م = \frac{مج\ س \times ك}{مجـ\ ك}$$

ب) طريقة المتوسط الفرضي (الطريقة المختصرة)

يمكن حساب المتوسط بطريقة أكثر تبسيطا واختصارا تعتمد على ما يسمى بالمتوسط الفرضي، ولتوضيح الأساس الذي يقف وراء هذه الطريقة نسوق المثال التالي:

لو فرضنا أننا أردنا حساب المتوسط الحسابي لأوزان ٢٠ فردا، ففي مثل هذه الحالة يمكننا جمع هذه الأوزان ثم نقسم الناتج على ٢٠ لنحصل على المتوسط، بيد أنه من الممكن أن نختصر هذه العملية إذا قمنا بتحديد أقل وزن فيهم وأكثر وزن، وليكن ٦٠ كجم أقل وزن و٨٥ كجم أعلى وزن، ثم نضع وزنا خاصا وليكن ٧٥ كجم نقيس بالنسبة له ونعطى لكل شخص قيمة سالبة أو موجبة حسب نقص وزنه أو زيادته عن هذا المستوى، وبالطبع سنحصل في هذه الحالة على أعداد صغيرة، وبحساب المجموع الجبري لهذه الفروق وقسمتها بعد ذلك على عدد الأفراد وهو (٢٠) يمكننا من خلال إضافة الناتج للمتوسط الفرضي في حالة الإيجاب أو طرحه منه في حالة السلب أن نحصل على المتوسط الفعلي استناداً على قاعدة أن المجموع الجبري للانحرافات عن المتوسط يساوى صفرا كما في المثال التالي:

الأوزان	الفروق
٦٧	٦٧-٧٥ = -٨
٨٠	٨٠-٧٥ = +٥
٦٦	٦٦-٧٥ = -٩
٧٥	٧٥-٧٥ = صفر
٧٤	٧٤-٧٥ = -١
٨١	٨١-٧٥ = +٦
٧٩	٧٩ - ٧٥ = +٤
٨٤	٨٤ - ٧٥ = +٩
٧٣	٧٣-٧٥ = -٢
٨٠	٨٠-٧٥ = +٥

فيكون المتوسط الحسابي بالطريقة العادية=

$$\frac{\text{مج س}}{\text{ن}} = \frac{١٥٢٢}{٢٠} = ٧٦,١$$

وبالطريقة المختصرة =

$$٧٥ + \frac{٢٢}{٢٠} = ٧٦,١$$

الأوزان	الفروق
٨٢	٨٢–٧٥ = +٧
٧٩	٧٩–٧٥ = +٤
٧٧	٧٧–٧٥ = +٢
٦٦	٦٦ – ٧٥ = –٩
٦٥	٦٥ – ٧٥ = –١٠
٨٤	٨٤–٧٥ = +٩
٨٣	٨٣ – ٧٥ = +٨
٨٥	٨٥–٧٥ = +١٠
٧٢	٧٢ – ٧٥ = –٣
٧٠	٧٠–٧٥ = –٥
١٥٢٢	+٦٩
	–٤٧
	+٢٢

ويتضح مما سبق أن هذه الطريقة تقوم على أساس وضع متوسط فرضي، وبالطبع لابد أن يكون هذا المتوسط الفرضي قيمة تتوسط أعلى القيم وأدناها، وهو ما جعلنا في المثال السابق نختار (٧٥ كجم) كمتوسط فرضي حيث يقع هذا الوزن في منطقة وسط بين اقل وزن (٦٥ كجم)، وأعلى وزن (٨٥ كجم).. ثم يحسب بعد ذلك الفرق بين كل وزن وهذا المتوسط الفرضي، ونظرا لأن هناك قيم أو أوزان أقل من هذا الوزن وأخرى أعلى فإن هذه الفروق بعضها سيكون سالبا والبعض الآخر سيكون موجبا، وبحساب المجموع الجبري لهذه الفروق وقسمتها على عدد الأفراد نحصل على فرق المتوسط الحسابي عن المتوسط الفرضي، وبإضافة هذا الفرق للمتوسط

الفرضي في حالة الإيجاب أو طرحه منه في حالة السلب نحصل على المتوسط الفعلي.. وفي المثال السابق كان المجموع الجبري للفروق (+٢٢)، وبقسمته على عدد الأفراد $(\frac{+٢٢}{٢٠})$ كان الناتج (+ ١,١)، وبإضافته للمتوسط الفرضي؛ لأنه موجب نحصل على المتوسط الفعلي وهو ٧٦,١.. ويتضح أن هذه القيمة مطابقة تماما للقيمة التي تم الحصول عليها من خلال جمع الأوزان وقسمتها على عددها وكانت في المثال:

$$\frac{١٥٢٢}{٢٠} = ٧٦,١.$$

والواقع أن هذه الطريقة تكون أسهل بكثير إذا ما طبقت للحصول على المتوسط الحسابي لقيم موزعة في جدول تكراري، حيث إننا في هذه الحالة نكون بإزاء فئات تتابع بانتظام لأنها متساوية المدى مما يجعلها تتزايد وتتناقص بنسبة ثابتة كما سيتضح بعد قليل.

ولتطبيق هذه الطريقة على التوزيع التكراري يتعين أولا تحديد المتوسط الفرضي والذي يمثل نقطة بداية حساب الفروق بالسلب والإيجاب، وهنا يمكن للباحث أن يختار نقطة توسط أو نزعة مركزية وسطى لجميع الفئات لتمثل المتوسط الفرضي، وبالطبع لابد وأن تكون هذه النقطة المختارة في منتصف التوزيع، ومن ثمة يصلح أن يمثل مركز الفئة التي تقع في منتصف التوزيع المتوسط الفرضي، ثم يحسب بعد ذلك الفرق بين مركز كل فئة وبين مركز الفئة التي تقع في منتصف التوزيع على اعتبار أنه المتوسط الفرضي، وبالطبع سيكون الفرق بين مركز الفئة التي تقع في منتصف التوزيع والمتوسط الفرضي يساوي صفرا، وسيكون الفرق بين مراكز الفئات التي تسبق فئة المنتصف والمتوسط الفرضي سالبا، والعكس صحيح.. ويلي ذلك ضرب هذه الفروق في التكرارات، وبحساب المجموع الجبري لناتج ضرب الفروق في التكرارات نحصل على فرق المتوسط الحسابي عن المتوسط الفرضي، وبإضافة هذا

الفرق للمتوسط الفرضي في حالة الإيجاب أو طرحه منه في حالة السلب نحصل على المتوسط الفعلي.

ويمكن توضيح خطوات هذه الطريقة في المثال التالي، وهو يبين توزيع درجات ٥٠ فردا على أحد المقاييس:

ف -	ك	مراكز الفئات (س)	الفروق بين مراكز الفئات والمتوسط الفرضي (ح/)	ك×ح/
١٠-١٩	٣	١٥	١٥-٤٥ = -٣٠	-٩٠
٢٠-٢٩	٥	٢٥	٢٥-٤٥ = -٢٠	-١٠٠
٣٠-٣٩	٧	٣٥	٣٥-٤٥ = ١٠	-٧٠
٤٠-٤٩	١٥	٤٥	٤٥-٤٥ = صفر	صفر
٥٠-٥٩	٩	٥٥	٥٥-٤٥ = +١٠	+٩٠
٦٠-٦٩	٨	٦٥	٦٥-٤٥ = +٢٠	+١٦٠
٧٠-٧٩	٣	٧٥	٧٥-٤٥ = +٣٠	+٩٠
				+٣٤٠
مجـ	٥٠			-٢٦٠
				+٨٠

ويحسب المتوسط باستخدام المعادلة الآتية:

$$م = (\text{المتوسط الفرضي}) \pm \frac{مجـ\ ك\ ح/}{مجـ\ ك}$$

حيث إن:

- المتوسط الفرضي هو مركز الفئة التي تقع في منتصف التوزيع.
- مجـ ك ح/: هو المجموع الجبري لناتج ضرب الفروق بين مراكز الفئات والمتوسط الفرضي.

• مجـ ك : هو مجموع التكرارات.

وبتطبيق المعادلة على المثال السابق يكون المتوسط =

$$٤٦,٦ = ١,٦ + ٤٥ = \frac{٨٠}{٥٠} + ٤٥$$

ويتضح من خلال ما سبق أنه تم أولا تحديد متوسط فرضي، وهو مركز الفئة التي تقع في منتصف التوزيع (الفئة الرابعة) ٤٠ – ٤٩ وهو (٤٥).. ثم تم حساب الفرق بين مراكز الفئات وبين هذا المتوسط الفرضي عمود (ح/) ويتضح أن هذه الفروق تتزايد وتتناقص بنسبة ثابتة (–١٠، –٢٠، –٣٠)، (+١٠، +٢٠، +٣٠).. ثم تم ضرب هذه الفروق في التكرارات لكل فئة (عمود ك × ح/).. ثم تم حساب المجموع الجبري لهذا العمود (+٨٠)، ثم تم إضافة هذا المجموع بعد قسمته على مجموع التكرارات للمتوسط الفرضي لأنه موجب فحصلنا على المتوسط.

ومن الممكن حساب المتوسط بطريقة أكثر اختصارا توفيرا للوقت والجهد، وذلك بمزيد من التبسيط لقيم (ح/)، وتعتمد هذه الطريقة على ما سبق ولاحظناه في الجدول السابق، من أن القيم الناجمة عن انحرافات مراكز الفئات عن المتوسط الفرضي تتزايد (سلبا وإيجابا) بما يساوي مدى الفئة وهو في المثال السابق (١٠)، ويمكن الحصول على مزيد من اليسر إذا قمنا بقسمة هذه القيم على مدى الفئة، فنحصل على تدرج جديد يمتد من صفر ويتزايد بمسافات مقدارها ١، ٢، ٣، ٤... الخ بالسالب والموجب، مما يؤدى إلى مزيد من السهولة في العمليات الحسابية، على أن يصحح أثر القسمة على مدى الفئة عند استخدام المعادلة بالضرب مرة أخرى في هذه القيمة (مدى الفئة) (ف)، وتكون المعادلة حينئذ:

$$م = \text{مركز الفئة الصفرية} \pm \frac{\text{مجـ ك ح/}}{\text{مجـ ك}} \times ف$$

وفيما يلي تطبيق لهذه الطريقة على نفس المثال السابق:

ف	ك	ح/	ك ح/
١٠-	٣	٣-	٩-
٢٠-	٥	٢-	١٠-
٣٠-	٧	١-	٧-
٤٠-	١٥	صفر	صفر
٥٠-	٩	١+	٩+
٦٠-	٨	٢+	١٦+
٧٠-	٣	٣+	٩+
مجـ	٥٠		٣٤+ ٢٦-
			٨٠ +

ويلاحظ هذه المرة أنه تم اختيار مركز الفئة الرابعة – باعتبارها تقع في منتصف الجدول – كمتوسط فرضي وهو (٤٥) وبطرحه من نفسه وقسمته على مدى الفئة كان الناتج صفرا، كالتالي ($\frac{٤٥-٤٥}{١٠}$ = $\frac{\text{صفر}}{١٠}$ = صفر)، وبتكرار نفس العملية لأعلى، أي الفئة السابقة على الرابعة سيكون الناتج كالتالي ($\frac{٤٥-٣٥}{١٠}$ = $\frac{١٠-}{١٠}$ = -١)، وهكذا كلما صعدنا فئة في اتجاه الفئة الأولى ستزيد القيمة بمقدار واحد بالسالب، أي (-٢، -٣، -٤ وهكذا)، والعكس صحيح ستزيد القيمة بمقدار واحد بالموجب كلما نزلنا فئة في اتجاه الفئة الأخيرة، أي (+١، +٢، +٣... وهكذا)، وتعد هذه الطريقة ثابتة مهما تغيرت الفئات ومداها شريطة أن تكون الفئات متساوية..

وبتطبيق المعادلة نحصل على المتوسط كالتالي:

$$م = \text{مركز الفئة الصفرية} \pm \frac{\text{مجـ ك ح/}}{\text{مجـ ك}} \times ف$$

حيث إن:

مركز الفئة الصفرية: هو مركز الفئة المقابلة للصفر، وهو في الأصل المتوسط الفرضي.. وهو في هذا المثال (٤٥).

مجـ ك ح/ : هو المجموع الجبري لحاصل ضرب عمود (ح/) في عمود (ك).

ف: مدى الفئة.

$$\therefore م = ٤٥ + \frac{٨}{٥٠} = ١٠$$

$$= ٤٥ + ١,٦ = ٤٦,٦$$

ويلاحظ أنها نفس قيمة المتوسط التي تم الحصول عليها بطريقة الفروق بين مراكز الفئات والمتوسط الفرضي.

ثانياً: الوسيـــط

يعد الوسيط ثاني مقاييس النزعة المركزية من حيث الأهمية، ويعرف بأنه قيمة المفردة الوسطى للقيم، أو هو الدرجة التي يكون موقعها في منتصف المجموعة تماما بشرط ترتيب القيم تصاعديا أو تنازليا فيكون عدد القيم الأخرى التي تسبقها معادلا لعدد القيم التي تليها.

يتضح مما سبق أن إيجاد الوسيط مرهون بترتيب القيم تصاعديا أو تنازليا، وتكون القيمة التي تقع في المنتصف تماما هي القيمة الوسيطية، ولتوضيح ما سبق نسوق المثال التالي لحساب الوسيط من القيم الخام:

لو فرضنا أن لدينا مجموعة من الأفراد عددهم سبعة، وطبقنا عليهم مقياسا للقيم الاجتماعية وكانت درجاتهم على هذا المقياس هي:

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
٢٠	١٧	٢١	١٣	٢٤	١٢	١١

وأردنا حساب الوسيط، فإننا سوف نقوم أولا بترتيب هذه القيم أو الدرجات تصاعديا أو تنازليا كالتالي:

الترتيب التصاعدي	١١	١٢	١٣	(١٧)	٢٠	٢١	٢٤	
الترتيب التنازلي	٢٤	٢١	٢٠	(١٧)	١٣	١٢	١١	

وتكون القيمة الوسيطية هي الرابعة في الترتيب، حيث يكون هناك ثلاث قيم أقل منها، وثلاث قيم أعلى منها، وهي في المثال (١٧).

ويلاحظ في المثال السابق أن عدد الأفراد فردى (سبعة أفراد) مما يسر إمكانية الحصول على الوسيط، ولكن لنفرض أن عددهم كان زوجيا كما يلي:

الأفراد	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
القيم	٢٠	١٧	٢١	١٣	٢٤	١٢	١١	١٩	١٥	٢٥

وبترتيبهم تصاعديا نحصل على ما يلي:

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
١١	١٢	١٣	١٥	١٧	١٩	٢٠	٢١	٢٤	٢٥

وفي هذه الحالة نجد أن الوسيط يقع بين قيمتين، أو بالأحرى يضم قيمتين هما (١٧، ١٩) على اعتبار أنهما يحتلان المرتبة الخامسة والسادسة، وهما المرتبتان اللذان يسبقهما عددا من القيم مساويا لعدد القيم التي تليها.

ولحساب الوسيط في هذه الحالة نحصل على متوسط القيمتين اللتين تقعان في الوسط، وذلك عن طريق جمعهما وقسمة الناتج على ٢ كالآتي:

$$\text{الوسيط} = \frac{١٧+١٩}{٢} = \frac{٣٦}{٢} = ١٨$$

ويمكن التعرف على رتبة الوسيط بسهولة بقسمة عدد الأفراد مضافا إليه واحد على ٢، في حالة الأعداد الفردية كالتالي:

$$\text{رتبة الوسيط} = \frac{\text{ن} + ١}{٢}$$

أما إذا كان عدد الأفراد زوجيا فنحصل على رتبة الوسيط بقسمة عدد الأفراد على ٢ للحصول على رتبة القيمة الأولى، وقسمة عدد الأفراد مضافا إليه اثنين على ٢ للحصول على رتبة القيمة الثانية كالتالي:

$$\text{رتبة القيمة الأولى} = \frac{\text{ن} + ١}{٢}$$

$$\text{رتبة القيمة الثانية} = \frac{\text{ن} + ١}{٢}$$

وبتطبيق ذلك على المثال الأول والذي كان فيه عدد الأفراد فرديا تكون رتبة الوسيط هي:

$\frac{٧ + ١}{٢} = \frac{٨}{٢} = ٤$، أي القيمة الرابعة وكانت في المثال (١٧).

أما في المثال الثاني والذي كان فيه عدد الأفراد زوجيا فكانت:

رتبة القيمة الأولى = $\frac{١٠}{٢} = ٥$ وكانت في المثال (١٧).

ورتبة القيمة الثانية = $\frac{١٠ + ٢}{٢} = ٦$ وكانت في المثال (١٩).

ويجمع القيمتين اللتين في الوسط وقسمتهما على ٢ حصلنا على الوسيط.

الوسيط في التوزيع التكراري

يعتمد حساب الوسيط من الجدول التكراري على نفس فكرة حسابه من القيم غير الموزعة، غير أنه – وكما سبق أن أوضحنا – نحن لا نستطيع أن نتعرف على قيم الأفراد جميعها في التوزيع التكراري على اعتبار أنها متجمعة على هيئة فئات، وهو

ما سيدفعنا إلى افتراض أن الوسيط هو قيمة ما في واحدة من هذه الفئات يطلق عليها اسم (الفئة الوسيطية)، تلك الفئة التي يكون عدد ما قبلها من القيم (التكرارات) مساويا لعدد ما بعدها من هذه القيم، مما يعني أن رتبة الوسيط هي نصف عدد التكرارات، والتي تحسب عن طريق قسمة مجموع التكرارات على ٢ كالتالي (رتبة الوسيط = $\frac{\text{مج ك}}{٢}$).. وبتحديد رتبة الوسيط تتاح لنا فرصة التعرف على الفئة الوسيطية، أي التي تحتوي على الوسيط ويبقى فقط تحديد أية قيمة بالضبط هي الوسيط داخل هذه الفئة، على اعتبار أن الفئة تحتوي على عدد من القيم وليست قيمة واحدة، ويمكن التغلب على هذه المشكلة باتباع أسلوب النسبة والتناسب خاصة وأن القيم التي تقع داخل كل فئة في الجدول التكراري تكون موزعة توزيعاً منتظماً داخل الفئة مما يسهل هذه المهمة.

ومما سبق يمكننا الحصول على قيمة الوسيط من خلال ما يلي:

١ – إيجاد رتبة الوسيط لتحديد الفئة الوسيطية

أشرنا فيما سبق إلى أن رتبة الوسيط = $\frac{\text{مجـــ ك}}{٢}$، ولو فرضنا أن لدينا توزيعا لدرجات٥٠ فردا فإن رتبة الوسيط في هذه الحالة تساوي ٢٥ ($\frac{٥٠}{٢}$=٢٥)، وإذا نظرنا للجدول التالي يمكننا تصور هذه الرتبة:

	ك	ف -
٢١=	٩	٩-٥
	١٢	١٤-١٠
	٨ ←	١٩-١٥
٢١=	١٠	٢٤-٢٠
	٧	٢٩-٢٥
	٤	٣٤-٣٠
	٥	مجـ

وبالنظر للجدول السابق يتضح أن هذه الرتبة تقع في الفئة ١٥-١٩، إذ إن عدد القيم التي تسبقها (٢١) (التكرارات)، وتكرار هذه الفئة (٨) مما يعني أنها داخل هذه الفئة.. أي أن رقم (٢٥) وهو الرتبة سيكون بالمجموع الجبري ضمن هذه الفئة.. (٩+١٢+٨ = ٢٩)، ومن ثمة فإن هذه الفئة هي الفئة الوسيطة.

والواقع أن التكرار المتجمع الصاعد يعيننا كثيرا في هذه المسألة، ولننظر لنفس المثال بعد حساب ك صاعد:

ف-	ك	ك متجمع صاعد
٩-٥	٩	٩
١٤-١٠	١٢	٢١
١٩-١٥	٨	٢٩
٢٤-٢٠	١٠	٣٩
٢٩-٢٥	٧	٤٦
٣٤-٣٠	٤	٥٠
مجـ	٥٠	

ويوضح الجدول كيف أصبح البحث عن رتبة الوسيط يسيراً بعد حساب التكرار المتجمع الصاعد فبما أن رتبة الوسيط هي (٢٥) إذن هي تقع في الفئة الثالثة والتي تنطوي على الرتب من ٢٢: ٢٩، ولا يمكن أن تكون في الفئة السابقة عليها؛ لأنها تحتوي على الرتب من ١٠: ٢١، وكذلك لا يمكن أن تكون في الفئة التالية عليها؛ لأنها تحتوي على الرتب من ٣٩: ٤٥... مما يعني أن الخطوة الأولى لحساب الوسيط هي إيجاد الرتبة ثم تحديد مكان هذه الرتبة في عمود (ك متجمع صاعد) فنكون داخل الفئة الوسيطية.

٢- تحديد قيمة الوسيط من قيم الفئة الوسيطية

يتضح من المثال السابق أن الفئة الوسيطية تمتد فيما بين (١٥) وهو الحد الأدنى لها و(١٩) وهو الحد الأعلى لها، وعلينا تحديد أية قيمة بالضبط هي الوسيط داخل هذه الفئة، أي في المدى من ١٥: ١٩... وباتباع أسلوب النسبة والتناسب يمكن تحديد الجزء الذي يجب إضافته إلى بداية الفئة الوسيطية لنحصل على قيمة الوسيط.

ويتطلب هذا الأسلوب التعرف أولا على عدد التكرارات المتبقية للوصول إلى رتبة الوسيط ويتم ذلك عن طريق طرح التكرار المتجمع الصاعد للفئة التي تسبق الفئة الوسيطية من رتبة الوسيط، وهي في المثال (٢٥-٢١ = ٤)... ثم تقسم هذه القيمة على عدد التكرارات الخاصة بالفئة الوسيطية لتحديد موضع قيمة الوسيط داخل الفئة، وهو في المثال $\frac{٤}{٨}$ = ٠,٠٥، أي أن موضع الوسيط هو النصف من مداها، ومن ثمة يسهل تحديده بضرب الموضع في المدى، وهو في المثال ٠,٥ × ٥، على اعتبار أن مدى الفئة في المثال ٥، وعليه يمكن القول بأن قيمة الوسيط تزيد عن الحد الأدنى للفئة و هو ١٥ بقيمة تساوى $\frac{٤}{٨}$ × ٥ = ٢,٥ أي أن قيمة الوسيط = ١٥ + ٢,٥ = ١٧,٥.

ومما سبق نستنتج أن:

$$\text{الوسيط} = \text{الحد الأدنى للفئة الوسيطية} + \frac{\text{رتبة الوسيط} - \text{تكرار متجمع صاعد للفئة قبل الوسيطية}}{\text{تكرار الفئة الوسيطية}} \times \text{ف}$$

وفيما يلي مثال يوضح كيف يمكن حساب الوسيط من التوزيع التكراري، وهو خاص بدرجات (١٠٠) مفردة على مقياس البعد الاجتماعي لبوجاردس Bogardus:

فئات	تكرارات	تكرار متجمع صاعد	
١٥-٢٩	١٥	١٥	
٣٠-٤٤	١٧	٣٢	
٤٥-٥٩	٢٠	٥٢	←
٦٠-٧٤	٢٥	٧٧	
٧٥-٨٩	١٢	٨٩	
٩٠-١٠٤	٦	٩٥	
١٠٥-١١٩	٥	١٠٠	
مجـ	١٠٠		

الحـــل:

$$\text{رتبة الوسيط} = \frac{\text{مجـــ ك}}{٢} = \frac{١٠٠}{٢} = ٥٠$$

وبالبحث عن رتبة الوسيط في (ك متجمع صاعد) يتضح أنها تقع في الفئة ٤٥-٥٩

وبما أن الوسيط = الحد الأدنى للفئة الوسيطة + $\frac{\text{رتبة الوسيط} - \text{تكرار متجمع صاعد للفئة قبل الوسيطية}}{\text{تكرار الفئة الوسيطية}} \times \text{ف}$

$$\therefore \text{الوسيط} = ٤٥ + \frac{٣٢-٥٠}{٢٠} \times ١٥$$

$$\text{الوسيط} = ٤٥ + ١٣,٥$$

$$\text{الوسيط} = ٥٨,٥$$

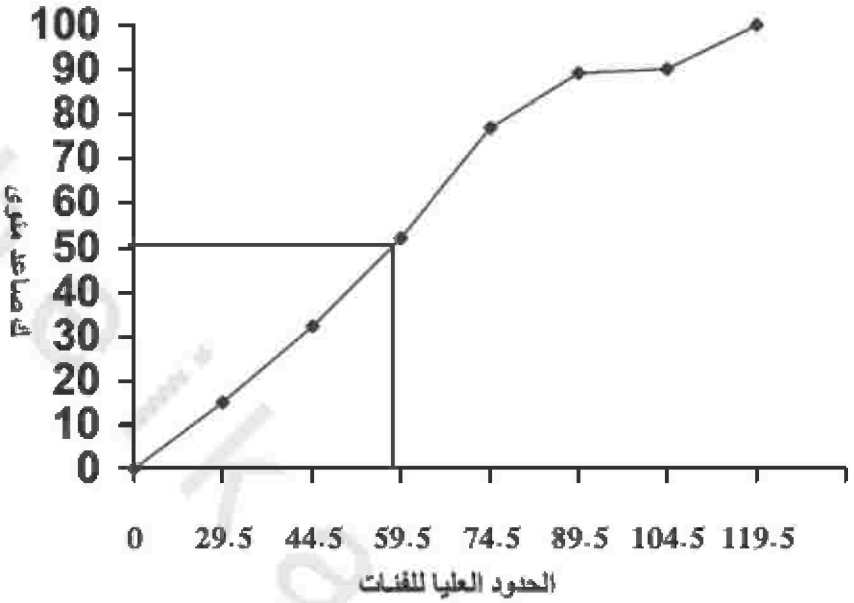
حساب الوسيط من خلال الرسم

يمكن حساب الوسيط من خلال الرسم، وإن كانت هذه الطريقة لا تتسم بنفس دقة حسابه من التوزيع التكراري، ويكون ذلك إما عن طريق رسم المنحنى المتجمع الصاعد وإما المنحنى المتجمع النازل أو كلاهما معا.

أ) عن طريق المنحنى المتجمع الصاعد

والطريقة المتبعة في ذلك هي رسم المنحنى المتجمع الصاعد بنفس الأسلوب المتبع في الفصل السابق على أن يمثل المحور الرأسي التكرار المتجمع الصاعد المئوي وليس التكرار المتجمع الصاعد العادي حتى يسهل تحديد رتبة الوسيط بقيمة ثابتة في كل الأحوال هي ٥٠، ويرسم خطا أفقيا عند هذه النقطة، ثم يتم إسقاط عموداً عند تقابل هذا الخط مع المنحنى المرسوم، وتمثل النقطة التي يتم الإسقاط عليها في المحور الأفقي والخاص بالحدود العليا للفئات قيمة الوسيط، ويتضح ذلك من المثال التالي والذي تم استخدامه في حساب الوسيط من التوزيع التكراري:

فئات	تكرارات	الحدود العليا للفئات	ك صاعد	ك صاعد مئوي
١٥-٢٩	١٥	٢٩,٥	١٥	٪١٥
٣٠-٤٤	١٧	٤٤,٥	٣٢	٪٣٢
٤٥-٥٩	٢٠	٥٩,٥	٥٢	٪٥٢
٦٠-٧٤	٢٥	٧٤,٥	٧٧	٪٧٧
٧٥-٨٩	١٢	٨٩,٥	٨٩	٪٨٩
٩٠-١٠٤	٦	١٠٤,٥	٩٥	٪٩٥
١٠٥-١١٩	٥	١١٩,٥	١٠٠	٪١٠٠

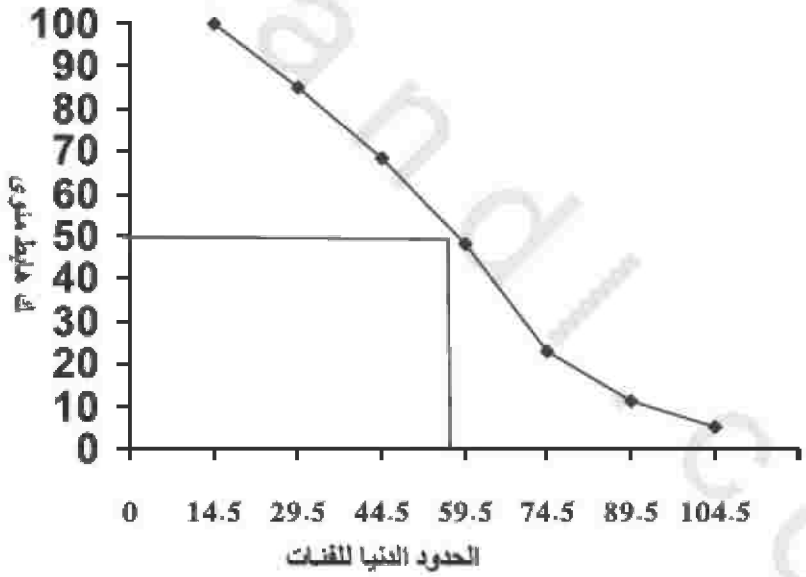


ويتضح من الرسم أن العمود الذي تم إسقاطه جاء عند القيمة ٥٨,٥ وهي نفس القيمة التي حصلنا عليها عن طريق التوزيع التكراري.

ب) عن طريق المنحنى المتجمع النازل أو الهابط

وأيضا الطريقة المتبعة في ذلك هي رسم المنحنى المتجمع الهابط بنفس الأسلوب المتبع في الفصل السابق، على أن يمثل المحور الرأسي التكرار المتجمع الهابط المئوي، ويرسم خطاً أفقياً عند القيمة ٥٠، ثم يتم إسقاط عموداً عند تقابل هذا الخط مع المنحنى المرسوم، وتمثل النقطة التي يتم الإسقاط عليها في المحور الأفقي والخاص بالحدود الدنيا للفئات قيمة الوسيط.. وفيما يلي توضيحاً لما سبق باستخدام نفس المثال:

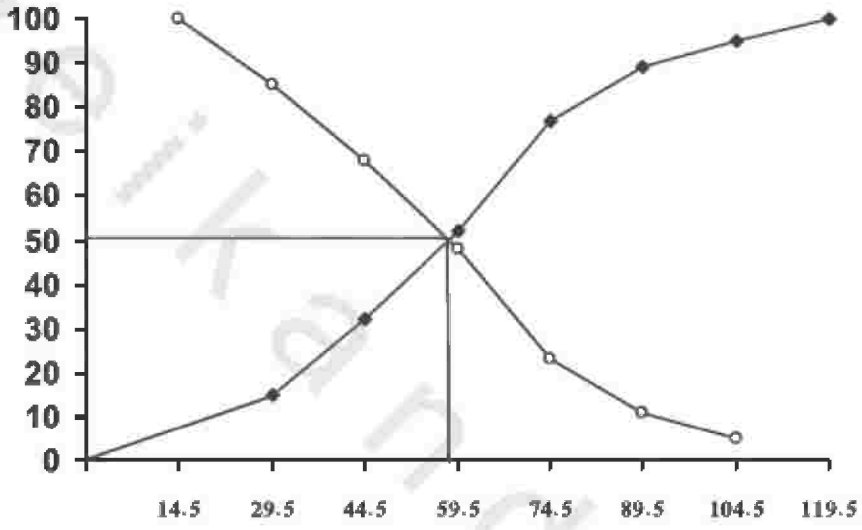
فئات	تكرارات	الحدود الدنيا للفئات	ك هابط	ك هابط مئوي
١٥-٢٩	١٥	١٤,٥	١٠٠	٪١٠٠
٣٠-٤٤	١٧	٢٩,٥	٨٥	٪٨٥
٤٥-٥٩	٢٠	٤٤,٥	٦٨	٪٦٨
٦٠-٧٤	٢٥	٥٩,٥	٤٨	٪٤٨
٧٥-٨٩	١٢	٧٤,٥	٢٣	٪٢٣
٩٠-١٠٤	٦	٨٩,٥	١١	٪١١
١٠٥-١١٩	٥	١٠٤,٥	٥	٪٥



ويتضح من الرسم أن العمود الذي تم إسقاطه جاء عند القيمة ٥٨,٥.

جـ) عن طريق المنحنى المتجمع الصاعد والهابط معا

ويتم ذلك عن طريق رسم كلا المنحنين على شكل واحد، ثم يسقط عمودا على المحور الأفقي من نقطة تلاقي المنحنيين لتحديد قيمة الوسيط، والشكل التالي يوضح هذه الطريقة والمستخدم فيه نفس المثال:



ويتضح من الرسم أن الخط الذي تم إسقاطه جاء عند القيمة ٥٨,٥.

ثالثاً: المنـــوال

أ) حساب المنوال من القيم الخام

يعرف المنوال بأنه القيمة الأكثر شيوعا أو تكرارا، مما يعني ضرورة وجود قيمة تكررت أكثر من غيرها، ولتوضيح طبيعة المنوال تأمل المثال التالي:

لو فرضنا أن لدينا عدداً من الأفراد وليكن (٥٠) اجتازوا اختباراً للإحصاء من عشر درجات فكان عدد الذين حصلوا على ثلاث درجات من عشر (٢)، وعدد

من حصلوا على أربع درجات (١٢)، وعدد من حصلوا على خمس درجات(٢٠)، وعدد من حصلوا على ست درجات (٧)، وعدد من حصلوا على سبع درجات (٥)، وعدد من حصلوا على ثمان درجات (٤) كالتالي:

الدرجة	٣	٤	٥	٦	٧	٨
عدد الطلاب	٢	١٢	٢٠	٧	٥	٤

فإننا نستنتج أن الدرجة (٥) تقابل أكبر تكرار وهو (٢٠ طالبا)، وحينئذ تعتبر الدرجة (٥) في هذه الحالة هي المنوال.

ووفقا لما سبق فإنه من المحتمل ألا نجد منوالا، وذلك عندما لا تتكرر أحد القيم كما في المثال التالي:

الدرجة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
عدد الطلاب	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠

وفي مثل هذه الحالة وما يشبهها يحسن إيجاد الوسيط أو المتوسط الحسابي كمقياس للنزعة المركزية، وهو ما لا يجعل المنوال مقياس نزعة مركزية جيد إلا إذا كانت هناك قيمة شائعة تتكرر بشكل واضح.

ب) حساب المنوال من الجدول التكراري

والواقع أنه توجد عدة طرق لحساب المنوال من الجدول التكراري، وإن كانت جميعها تعطي نتائج تقريبية، حيث إننا نعتبر أن الفئة المنوالية هي الفئة التي يقابلها أكبر تكرار، ويعني ذلك أن هذه الفئة قد تختلف إذ أعدنا توزيع الدرجات في جدول تختلف فئاته عن التوزيع الأول، ففي هذه الحالة سنحصل على فئة منوالية جديدة... ومن هذه الطرق:

١ – طريقة مركز الفئة المنوالية

تعتبر هذه الطريقة من أبسط طرق حساب المنوال، وتقوم على اعتبار أن مركز الفئة التي يقابلها أكبر تكرار هو المنوال، ويطلق على هذه الفئة اسم الفئة المنوالية، والمثال التالي يوضح طريقة حساب المنوال وفقا لهذا الأسلوب:

فئات	ك	تحديد تكرار المنوال
٣٢-٣٠	٨	
٣٥-٣٣	١٢	
٣٨-٣٦	١٥	
٤١-٣٩	٢٥	←
٤٤-٤٢	١٨	
٤٧-٤٥	١٢	
٥٠-٤٨	١٠	
مجـ	١٠٠	

ويكون المنوال لهذا التوزيع هو مركز الفئة (٣٩-)؛ نظرا لأن تكرارها (٢٥) وهو أكبر من أي تكرار آخر.

ومن ثمة فإن المنوال= $\frac{\text{الحد الأدنى للفئة المنوالية + الحد الأدنى التي تليها}}{٢}$

$= \frac{٣٩+٤٢}{٢} = \frac{٨١}{٢} = ٤٠,٥$.

وبطبيعة الحال قد نجد فئتان أو ربما أكثر لهما نفس التكرار المرتفع كما في المثال التالي:

فئات	ك	تحديد تكرار المنوال
٥–	٢	
١٠–	١٠	
١٥–	٢٠	←
٢٠–	٢٠	←
٢٥–	٥	
٣٠–	٣	
مجـ	٦٠	

وإزاء هذه الحالة يمكننا أن نسحب لهما نقطة توسط كالتالي:

- مركز الفئة المنوالية الأولى = $\frac{٢٠+١٥}{٢} = \frac{٣٥}{٢} = ١٧,٥$
- مركز الفئة المنوالية الثانية = $\frac{٢٥+٢٠}{٢} = \frac{٤٥}{٢} = ٢٢,٥$

المنوال = $\frac{٢٢,٥+١٧,٥}{٢} = ٢٠$

وتتبع هذه الطريقة إذا كانت الفئتان متتابعتان كما في المثال، أما إذا كانت هذه الفئات ذات أعلى التكرارات متباعدة، فإننا نصف التوزيع في هذه الحالة بأنه ذو منوالين، أو متعدد القمم إذا كان لهذا التوزيع أكثر من منوالين متباعدين.. وبالطبع إذا كانت جميع الفئات لها نفس التكرار (التوزيع المستطيل) فإننا في هذه الحالة لا نستطيع أن نحدد لها منوالا.

٢- طريقة الجذب

يلاحظ من خلال الطريقة السابقة أن تحديد المنوال باعتباره مركز الفئة المنوالية يفتقد إلى الدقة، حيث إنها - أعني الطريقة - مالت إلى التقريب، فالواقع أن المنوال له قيمة تزيد بمقدار معين (نسبة من مدى الفئة) عن الحد الأدنى للفئة، ولا يكون منتصفها تماما إلا في حالات معينة.. وتتوقف هذه النسبة على تكرار كل من الفئة التي تسبق تكرار الفئة المنوالية، والتي تليها.

فإذا كان تكرار الفئة بعد المنوالية أكبر من تكرار الفئة التي قبلها انجذب المنوال نحو القيم الكبيرة في فئته، والعكس صحيح إذا كان تكرار الفئة قبل المنوالية أكبر من تكرار الفئة التي بعدها انجذب المنوال نحو القيم الصغيرة في فئته، وفقا لما يسمى بقانون الرافعة أما إذا كان التكرارين متساويين وقع المنوال في منتصف الفئة تماما.

ويعني هذا أن مدى الفئة سينقسم تقسيما تناسبيا بنسبة حديها تكرار الفئتين المحيطتين للفئة المنوالية.. وعليه نستنتج أن المنوال =

$$\text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + \frac{\text{تكرار الفئة بعد المنوالية}}{\text{مجموع تكراري الفئة قبل وبعد المنوالية}} \times \text{ف}$$

وفيما يلي حساب المنوال للمثال السابق وفقا لهذه الطريقة:

فئات	ك	تحديد تكرارات المنوال
٣٠-	٨	
٣٣-	١٢	
٣٦-	١٥	← تكرار الفئة قبل المنوالية
٣٩-	٢٥	← تكرار الفئة المنوالية
٤٢-	١٨	← تكرار الفئة بعد المنوالية
٤٥-	١٢	
٤٨-	١٠	
مج	١٠٠	

وبتطبيق القانون الخاص بهذه الطريقة نحصل على ما يلي:

$$\text{المنوال} = ٣٩ + \frac{١٨}{١٨+١٥} \times ٣$$

المنوال = ٣٩ + ١,٦٤

المنوال = ٤٠,٦٤

ويراعى أيضا في هذه الطريقة إمكانية حساب نقطة توسط بين منوالين أو أكثر في حالة تتابع.

٣- طريقة الفروق بين التكرارات

تشبه هذه الطريقة سابقتها إلى حد كبير، وإن كان الاختلاف يكمن في الاعتماد على حساب الفرق بين تكرار الفئة المنوالية والفئتين السابقة والتالية عليها كالتالي:

فئات	ك	فروق
-١٠	٨	
-٢٠	١٠	١٠=
-٣٠	٢٠	
-٤٠	٢٥	٥ =
-٥٠	١٢	
مجـ	٧٥	

وفي هذه الحالة تحدد قيمة المنوال بإضافة مقدار معين للحد الأدنى للفئة المنوالية يحسب عن طريق قسمة الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة التي تسبقها وهو في المثال (١٠) على الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة التي تسبقها مضافا إليه الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة التي يليها ثم يضرب الناتج في مدى الفئة كالتالي:

$$\text{المنوال} = \text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + \frac{\text{ق}_1}{\text{ق}_1 + \text{ق}_2} \times \text{ف}$$

حيث إن:

ق١ = الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة التي تسبقها.

ق٢ = الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة التي تليها.

ف = مدى الفئة.

ومن ثمة فإن المنوال = $٣٠ + \frac{١٠}{٥+١٠} \times ١٠$

$$= ٣٠ + ٦,٦٧ = ٣٦,٦٧$$

جـ) حساب المنوال عن طريق الرسم

يمكن حساب المنوال عن طريق الرسم باستخدام المدرج التكراري، والخطوات التي تتبع للحصول على المنوال من المدرج التكراري هي:

١- رسم تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة التي قبلها والتي بعدها فقط.

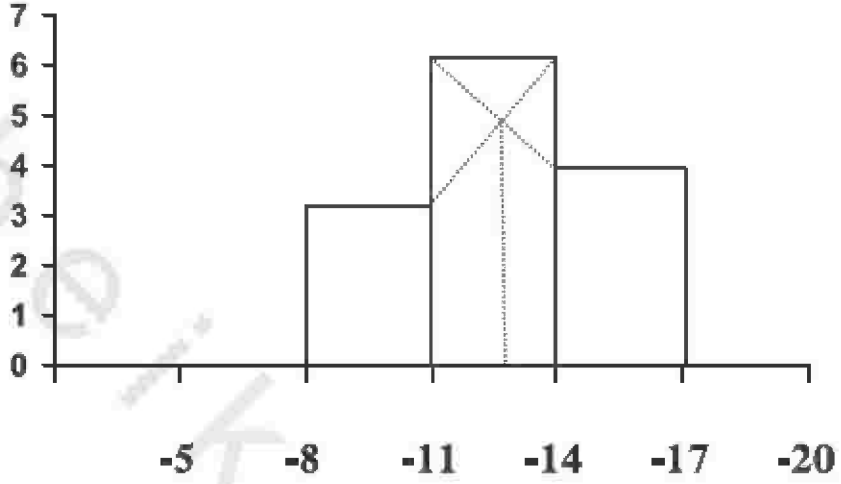
٢- توصيل الطرف الأيمن لقمة الفئة قبل المنوالية بالطرف الأيمن لقمة الفئة المنوالية وذلك بمد خط بينهما.

٣- توصيل الطرف الأيسر لقمة الفئة بعد المنوالية بالطرف الأيسر لقمة الفئة المنوالية وذلك بمد خط بينهما.

٤- إسقاط مستقيم من نقطة تقاطع الخطين السابقين على المحور الأفقي الخاص بالفئات.

وتمثل النقطة التي تم إسقاط المستقيم عليها قيمة المنوال، وفيما يلي مثال للتوضيح:

فئات	ك	تحديد تكرارات المنوال
٥-	١	
٨-	٣	← تكرار الفئة قبل المنوالية
١١-	٦	← تكرار الفئة المنوالية
١٤-	٤	← تكرار الفئة بعد المنوالية
١٧-	٣	
٢٠-	٣	
مجـ	٢٠	



تعقيب على مقاييس النزعة المركزية الثلاث

يمكن من خلال ما تقدم ملاحظة ما يلي:

١- إن المتوسط الحسابي يعد أدق المتوسطات الثلاثة التي قمنا بعرضها، حيث إنه يعتمد في حسابه على جميع القيم.. ومن ثمة فهو الأكثر ثباتا، وإن كان يؤخذ عليه تأثره بالقيم المتطرفة في أحد طرفي التوزيع، وخاصة إذا لم توازن هذه القيم بقيم أخرى متطرفة في الطرف الثاني من التوزيع، ومن هذه الحالات تلك التي تشتمل على عدد قليل من الأفراد الضعاف في القدرة المقاسة عن المستوى العام لبقية المجموعة مما يؤثر على المتوسط الحسابي، وفي مثل هذه الحالات يفضل استخدام الوسيط أو المنوال حيث إنهما لا يتأثران بالقيم المتطرفة، أضف إلى ذلك أن المتوسط الحسابي يتعذر إيجاده في حالات الجداول التكرارية المفتوحة من أحد الطرفين أو من كليهما، مما يشير أيضا إلى أفضلية الوسيط والمنوال.

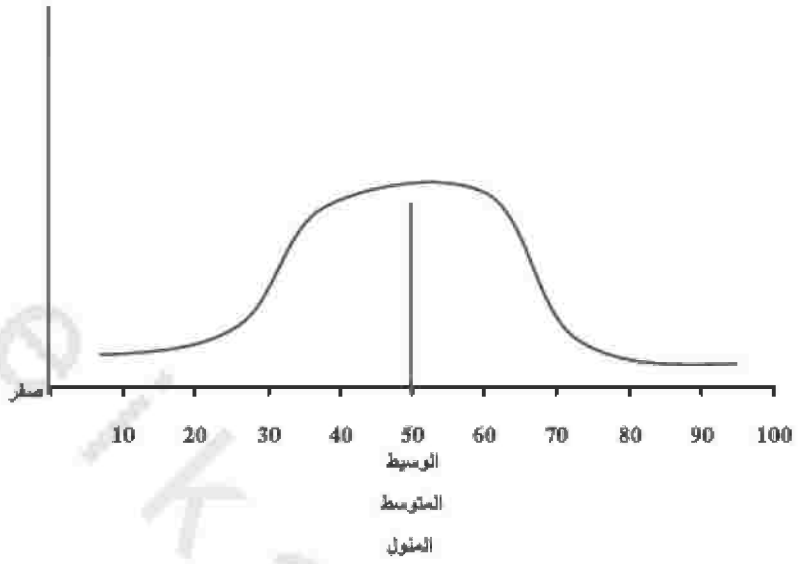
٢- إن المتوسط الحسابي هو مقياس النزعة المركزية الوحيد الذي تتوازن فيه الانحرافات السالبة عنه مع الانحرافات الموجبة بحيث يصبح مجموعها الجبري صفرا، وهو ما يفيد في طرق حسابه.

٣- المتوسط الحسابي هو أفضل مقاييس النزعة المركزية للتوزيعات الاعتدالية أو الأقرب إليها، أما حين تكون التوزيعات غير اعتدالية فإن المتوسط يؤدي إلى معلومات خاطئة عن التوزيع، ولذلك يستخدم في هذه الأحوال أحد المقياسين الآخرين لكونهما أدق.

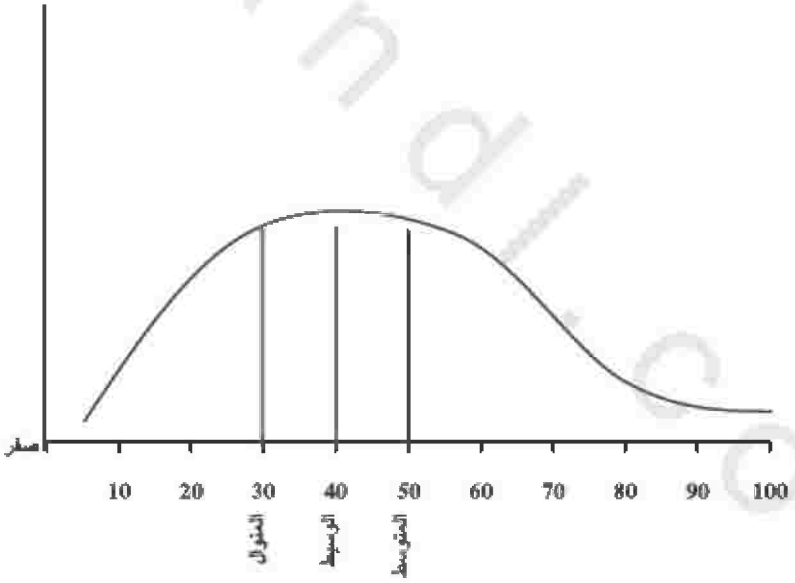
٤- إذا كانت البيانات المعالجة من النوع المتصل فإن المقاييس الثلاثة جميعا تصلح للاستخدام معها، أما في حالة البيانات من النوع المنفصل فيصلح للاستخدام معها كل من الوسيط والمنوال.

٥- المنوال هو أسهل المقاييس الثلاثة في حسابه يليه المتوسط ثم الوسيط، فالمتوسط أسهل من الوسيط؛ لأنه لا يتطلب تحويل البيانات إلى نظام آخر (كالنظام الرتبي) المأخوذ به في الوسيط.

٦- عندما يكون التوزيع اعتدالياً، أي أن القيم الأصلية الموضوعة في الجدول التكراري نابعة من عينة تمثل المجتمع الأصلي تمثيلاً سليماً.. تتطابق قيم مقاييس النزعة المركزية الثلاثة، وبذلك فإن موقعهم في المنحنى التكراري يكون في نقطة واحدة، انظر شكل (أ)... أما في حالة التوزيعات الملتوية فإن القيم تختلف مواضعها، ففي حالة الالتواء الموجب يحتل الوسيط موقع المتصف ويكون المنوال إلى يساره والمتوسط إلى يمينه، انظر شكل (ب). وفي حالة الالتواء السالب فإن المنوال يكون إلى يمين الوسيط والمتوسط إلى يساره، انظر شكل (جـ)، مما يشير إلى أن المتوسط الحسابي في التوزيعات الملتوية يتجه عادة ناحية الطرف الملتوي (المذبب)، فهو يمثل مركز الثقل بالنسبة للمجموعة.

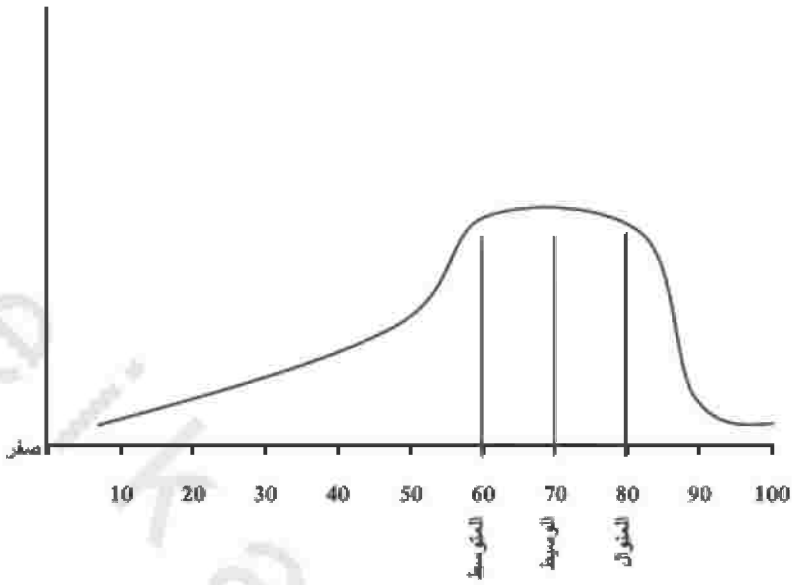


الشكل (أ) . موقع المتوسط والوسيط والمنوال في التوزيع الاعتدالي.



الشكل (ب) . موقع المتوسط والوسيط والمنوال في المنحنى موجب الالتواء.

obeikandl.com



الشكل (جـ). موقع المتوسط والوسيط والمنوال في المنحنى سالب الالتواء.

٧- من الممكن الحصول على قيمة أحد المتوسطات الثلاثة في حالة تواجد قيمة المقياسين الآخرين عن طريق المعادلات الآتية:

(أ) المتوسط الحسابي = $\frac{٣}{٢}$ × الوسيط − $\frac{١}{٢}$ × المنوال.

(ب) الوسيـــــط = $\frac{١}{٣}$ × المنوال + $\frac{٢}{٣}$ × المتوسط الحسابي.

(جـ) المنـــــوال = ٣ × الوسيط − ٢ × المتوسط الحسابي

وفيما يلي مثال للتوضيح:

ف –	ك
٥–	٣
١٠–	٧
١٥–	١٢
٢٠–	٨
٢٥–	٥
مجموع	٣٥

وقيم المقاييس الثلاثة في المثال السابق هي:

- المتوسط = ١٨,٣٣
- الوسيط = ١٨,١٠
- المنوال = ١٧,٦٦

وللحصول على المتوسط من قيمة الوسيط والمنوال تطبق المعادلة الخاصة كالتالي:

$$\text{المتوسط} = \frac{٣}{٢} \times ١٨,١٠ - \frac{١}{٢} \times ١٧,٦٦$$

$$\text{المتوسط} = ٢٧,١٥ - ٨,٨٣ = ١٨,٣٣$$

وللحصول على الوسيط من قيمة المتوسط والمنوال تطبق المعادلة الخاصة كالتالي:

$$\text{الوسيط} = \frac{١}{٣} \times ١٧,٦٦ + \frac{٢}{٣} \times ١٨,٣٣$$

$$\text{الوسيط} = ٥,٨٨ + ١٢,٢٢ = ١٨,١٠$$

obeikandl.com

أسئلة على الفصل الرابع

١- فيما يلي أجور ثلاثين عاملا والممثلين لعينة أحد البحوث:

٧٣٠	٤٣٠	١٠٣٠	٩٨٠	٧٢٠	٦٦٠	١٠٠٠	٩٩٠	٨٧٠	٨٥٠
١٠٠٠	١١٠٠	٧٢٠	٨٩٠	٥٢٠	٩٦٠	١٠٢٠	٨٧٠	٦٦٠	٥٣٠
١٠١٠	٦٥٠	٨٥٠	٩٥٠	٦٥٠	٥٢٠	١٠٠٠	١١٠٠	١٠٠٠	٩٥٠

والمطلوب:

١- توزيع الدخول السابقة في جدول تكراري مدى الفئة فيه (١٠٠)، والحد الأدنى للفئة الأولى (٤٠٠-).

٢- احسب المتوسط بطريقة مراكز الفئات في مراحلها الثلاث.

٣- احسب المتوسط بطريقة المتوسط الفرضي، ثم أحسبه بالطريقة المختصرة وقارن بين الناتجين.

٤- احسب الوسيط من الجدول التكراري.

٥- استخرج المنوال من الجدول السابق بمساعدة القانون الذي يبين العلاقة بين مقاييس النزعة المركزية الثلاثة، ثم قارن بينه وبين قيمة المنوال عن طريق الرسم.

٢- فيما يلي درجات عشرة طلاب على مقياس للقيم الاجتماعية:

ن	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
القيم	٨	٦	٩	١٤	١١	١٠	٣	٧	١٣	١٩

والمطلوب:

١- حساب المتوسط.

٢- ساب الوسيط.

٣- حساب المنوال.

٣- احسب المنوال في التوزيع التالي مستخدما طريقة مركز الفئة المنوالية، ثم طريقة الجذب، ثم طريقة الفروق بين التكرارات:

ف-	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	مجموع
ك	٧	٩	١٥	١٣	٦	٥٠

٤- اضرب مثالا من عندك يوضح كيف أن المتوسط الحسابي هو مقياس النزعة المركزية الوحيد الذي يكون المجموع الجبري للانحرافات عنه مساويا للصفر.

obeikandi.com