الفصل التاسع

الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الجزئية

NUMERICAL SOLUTIONS TO PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

(٩,١) مقدمة

Introduction

إن الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية تكون كالتالي:

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g$$

حيث إن a,b,c,d,e,f,g تكون دوال في x,y ، وعادة ما تعطى شروط عن الدالة $u(x,y)$ عند منحنيات معينة تحيط بنطاق الدالة، وتسمى الشروط الحدية إذا كان كل من x,y هي الإحداثيات الفراغية، وتسمى الشروط الابتدائية إذا احتوت على الزمن.

ويتم تصنيف المعادلة إلى ثلاثة أنواع:

١- نوع ناقصي Elliptic: إذا كان $b^2 - 4ac < 0$ ومثال على ذلك معادلة بواسون Poisson equation والتي لها الصورة التالية:

$$u_{xx} + u_{xy} = f(x,y)$$

٢- نوع مكافئ Elliptic : إذا كان $b^2-4ac=0$ ومثال على ذلك معادلة الحرارة heat equation والتي لها الصورة التالية :

$$u_t = u_{xx}$$

٣- نوع زائدي Hyperbolic : إذا كان $b^2-4ac>0$ ومثال على ذلك معادلة الموجة weave equation والتي لها الصورة التالية :

$$u_{tt} = u_{xx}$$

صور القيم الحدية المختلفة وشروطها

إذا كان المطلوب إيجاد قيم الدالة $u(x,y)$ داخل النطاق $D(x,y)$ والمنحنى المحيط بهذا النطاق يسمى $\partial D(x,y)$ فإن هناك صورة مختلفة منها :

١- مسألة ديرشلت Dirchlet problem :

إذا كانت $u(x,y)$ معطاة على المحيط $\partial D(x,y)$.

٢- مسألة نيومان Neumann problem :

إذا كانت $\frac{\partial u}{\partial n} = f(x,y)$ معطاة عند المحيط $\partial D(x,y)$ حيث إن n هو المتجه العمود على ∂D.

٣- مسألة مختلفة Mixed problem :

إذا كانت $\frac{\partial u_p}{\partial n} = f(u_p)$ معطاة عند $\partial D(x,y)$.

(٩,٢) معادلات تفاضلية جزئية من النوع الناقصي

Elliptic Partial Differential Equations

نأخذ معادلة بواسون كمثال لهذا النوع :

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=f(x,y), \qquad x,y\in D$$

$$u(x,y)=g(x,y), \qquad x,y\in \partial D$$

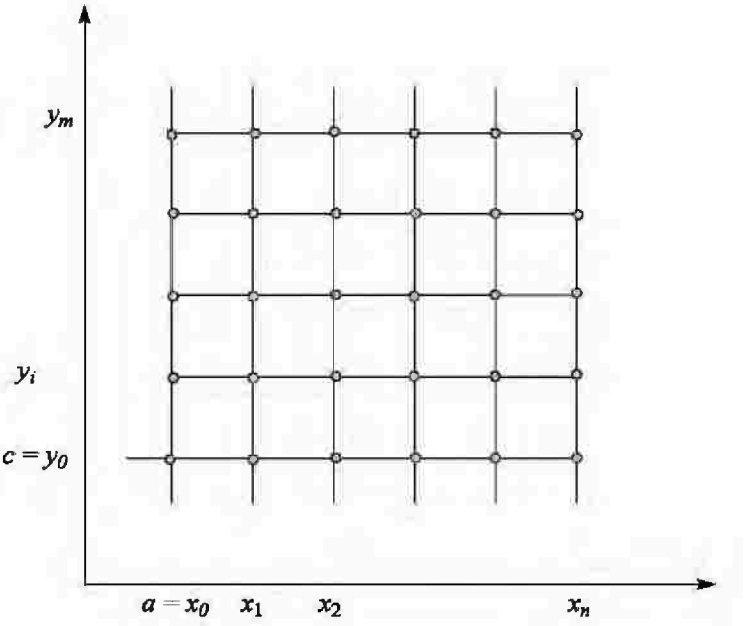
حيث إن $D=\{(x,y): \quad a\le x\le b, \quad c\le y\le d\}$

ويتم تقسيم المجال D إلى مستطيلات حيث إن :

$$h=\frac{b-a}{n},\ k=\frac{d-c}{m},\ \ m,n\in Z^{+}$$

$$x_i=a+ih,\ i=0,1,.....,n$$

$$y_i=c+jh,\ j=0,1,.....,m$$



حيث إن نقاط التقاطع (x_i,y_i) تسمى نقاط الشبكة mesh points

$i=0,1,2,.....,n$ و $j=0,1,.....,m$. باستخدام مفكوك تايلور حول x_i نجد أن :

$$\frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial x^2}=\frac{u(x_{i+1},y_j)-2u(x_i,y_j)+u(x_{i-1},y_j)}{h^2}-\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u(\xi_i,y_j)}{\partial x^4},$$
$$x_{i-1}\le\xi_i\le x_{i+1}$$

وحول y_j نجد أن:

$$\frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial y^2}=\frac{u(x_i,y_{j+1})-2u(x_i,y_j)+u(x_i,y_{j-1})}{k^2}-\frac{k^2}{12}\frac{\partial^4 u(x_i,\eta_j)}{\partial y^4}$$
$$y_{i-1}\le\mu_i\le y_{i+1}$$

وبالتعويض في معادلة بواسون نحصل على التالي:

$$\frac{u(x_{i+1},y_j)-2u(x_i,y_j)+u(x_{i-1},y_j)}{h^2}+\frac{u(x_i,y_{j+1})-2u(x_i,y_j)+u(x_i,y_{j-1})}{k^2}$$
$$=f(x_i,y_j)+\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u(\xi_i,y_j)}{\partial x^4}+\frac{k^2}{12}\frac{\partial^2 u(x_i,\eta_j)}{\partial y^4},$$
$$i=1,2,.....,n-1,\ j=1,2,.....,m-1$$

ومعالجة الشروط الحدية كما يلي:

$$u(x_0,y_j)=g(x_0,y_j),\qquad j=0,1,.....,m$$
$$u(x_n,y_j)=g(x_n,y_j),\qquad j=0,1,.....,m$$
$$u(x_i,y_0)=g(x_i,y_0),\qquad i=1,2,.....,n-1$$
$$u(x_i,y_m)=g(x_i,y_m),\qquad i=1,2,.....,n-1$$

وبذلك نحصل على طريقة الفرق المركزي Central difference method والتي لها خطأ الاقتطاع المحلي Local truncation error من الرتبة $O(k^2+h^2)$ على الصورة التالية :

$$2(r^2+1)w_{i,j}-(w_{i+1,j}+w_{i-1,j})-r^2(w_{i,j+1}+w_{i,j-1})=-h^2 f(x_i,y_j),$$

$$i=1,2,...,n-1, \qquad j=1,2,.....,m-1, \qquad r=\frac{h}{k},$$

$$w_{0,j}=g(x_0,y_j), \qquad j=0,1,.....,m$$

$$w_{n,j}=g(x_n,y_j), \qquad j=0,1,.....,m$$

$$w_{i,0}=g(x_i,y_0), \qquad i=1,2,.....,n-1$$

$$w_{i,m}=g(x_i,y_m), \qquad i=1,2,.....,n-1$$

وبحل هذا النظام مع الشروط الحدية نحصل على $w_{i,j}=u(x_0,y_j)$.

مثال (٩,١)

بأخذ معادلة بواسون على الصورة التالية :

$$u_{xx}+u_{yy}=0, \qquad 0\le x\le\frac{1}{2}, \qquad 0\le y\le\frac{1}{2}$$

مع الشروط الحدية :

$$u(0,y)=0,\ \ u(x,0)=0,\ \ u(x,\frac{1}{2})=200x,\ \ u(\frac{1}{2},y)=200y$$

وإذا أخذنا $m=n=4$ فسوف نحصل على التالي :

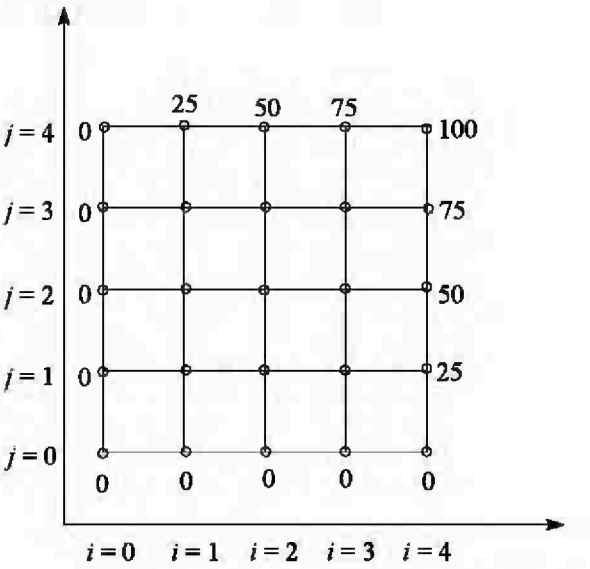
$$-w_{i,j}+4w_{i,j}-w_{i-1,j}-w_{i,j-1}+w_{i,j+1}=0$$

$$i=1,2,3 \qquad , \qquad j=1,2,3$$

ومن الشروط الحدية نجد أن:

$$w_{1,0} = w_{2,0} = w_{3,0} = 0, \qquad w_{0,1} = w_{0,2} = w_{0,3} = 0,$$

$$w_{1,4} = w_{4,1} = 25, \quad w_{2,4} = w_{4,2} = 50, \quad = w_{3,4} = w_{4,3} = 75,$$



ويكون النظام على الصورة التالية:

$$-w_{2,1} + 4w_{1,1} - w_{0,1} - w_{1,0} - w_{1,2} = 0, \qquad i = 1, \quad j = 1$$

$$-w_{2,2} + 4w_{1,2} - w_{0,2} - w_{1,1} - w_{1,3} = 0, \qquad i = 1, \quad j = 2$$

$$-w_{2,3} + 4w_{1,3} - w_{0,3} - w_{1,2} - w_{1,4} = 0, \qquad i = 1, \quad j = 3$$

$$-w_{3,1} + 4w_{2,1} - w_{1,1} - w_{2,0} - w_{2,2} = 0, \qquad i = 2, \quad j = 1$$

$$-w_{3,2} + 4w_{2,2} - w_{1,2} - w_{2,1} - w_{2,3} = 0, \qquad i = 2, \quad j = 2$$

$$-w_{3,3} + 4w_{2,3} - w_{1,3} - w_{2,2} - w_{2,4} = 0, \qquad i = 2, \quad j = 3$$

$$-w_{4,1} + 4w_{3,1} - w_{2,1} - w_{3,0} - w_{3,2} = 0, \qquad i = 3, \quad j = 1$$

$$-w_{4,2} + 4w_{5,2} - w_{2,2} - w_{3,1} - w_{3,3} = 0, \qquad i = 3, \quad j = 2$$

$$-w_{4,3} + 4w_{3,3} - w_{2,3} - w_{3,2} - w_{3,4} = 0, \qquad i = 3, \quad j = 3$$

ويمكن كتابة هذا النظام على الصورة التالية :

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,1} \\ w_{1,2} \\ w_{1,3} \\ w_{2,1} \\ w_{2,2} \\ w_{2,3} \\ w_{3,1} \\ w_{3,2} \\ w_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 50 \\ 150 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \end{bmatrix}$$

ويحل النظام الخطي السابق بأى طريقة مباشرة أو تكرارية نحصل على التالي :

$$w_{1,1} = 18.75, \quad w_{1,2} = 37.5, \quad w_{1,3} = 56.25$$
$$w_{2,1} = 12.5, \quad w_{2,2} = 25, \quad w_{2,3} = 37.5$$
$$w_{3,1} = 6.25, \quad w_{3,2} = 12.5, \quad w_{3,3} = 18.75$$

البرنامج رقم (٩.١)

```
C*****************************************************************
**C                                   POISSON  FINITE-DIFFERENCE
C*****************************************************************
**C    TO APPROXIMATE THE SOLUTION TO THE POISSON EQUATION
C     DEL(U) = F(X,Y), A <= X <= B, C <= Y <= D,
C     SUBJECT TO BOUNDARY CONDITIONS:
C               U(X,Y)=G(X,Y),
C     IF X = A OR X = B, FOR C <= Y <= D
C     IF Y = C OR Y = D, FOR A <= X <= B
C     INPUT:  ENDPOINTS A, B, C, D; INTEGERS m, n; TOLERENCE TOL;
C     MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS M.
```

```
C   OUTPUT:  APPROXIMATIONS W(I,J) TO U(X(I),Y(J)) FOR EACH
C   I=1,...,n-1 AND J=1,...,m-1 OR A MESSAGE THAT THE
C   MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS WAS EXCEEDED.
C   INITIALIZATION
C   DIMENSION W(N-1,M-1),X(N-1),Y(M-1)
    DIMENSION W(5,4),X(5),Y(4)
    CHARACTER NAME1*30,AA*1
    INTEGER OUP,FLAG,LBOUND
    LOGICAL OK
C   BOUNDARY VALUES
    F(XZ,YZ)= 0.0
    G(XZ,YZ)= 400*XZ*YZ
    OPEN(UNIT=5,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
    OPEN(UNIT=6,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
    WRITE(6,*) 'This is the Linear Finite Difference Method'
    WRITE(6,*) 'for Elliptic Equations.'
    WRITE(6,*) 'Have the functions F(x,y) and G(x,y) been created?'
    WRITE(6,*) 'Enter Y or N '
    WRITE(6,*) ' '
    READ(5,*)  AA
    IF(( AA .EQ. 'Y' ) .OR. ( AA .EQ. 'y' )) THEN
     OK = .FALSE.
19  IF (OK) GOTO 11
    WRITE(6,*) 'Input endpoints [A,B] on X-axis'
    WRITE(6,*) 'separated by blank.'
    WRITE(6,*) ' '
    READ(5,*) A, B
    WRITE(6,*) 'Input endpoints [C,D] on X-axis'
    WRITE(6,*) 'separated by blank.'
    WRITE(6,*) ' '
    READ(5,*) C, D
    IF ((A.GE.B).OR.(C.GE.D)) THEN
    WRITE(6,*) 'Left endpoint must be less'
    WRITE(6,*) 'than right endpoint'
    ELSE
    OK = .TRUE.
    ENDIF
    GOTO 19
11  OK = .FALSE.
12  IF (OK) GOTO 13
    WRITE(6,*) 'Input number of intervals n on the X-axis'
    WRITE(6,*) 'and m on the Y-axis separated by a blank.'
    WRITE(6,*) 'Note:  both n and m should be larger than 2.'
    WRITE(6,*) ' '
```

```
      READ(5,*) N, M
      IF ((N.LE.2).OR.(M.LE.2)) THEN
      WRITE(6,*) 'Must be integers exceeding 2.'
      ELSE
      OK = .TRUE.
      ENDIF
      GOTO 12
   13 OK = .FALSE.
   14 IF (OK) GOTO 15
      WRITE(6,*) 'Input tolerance '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) TOL
      IF (TOL.LE.0.0) THEN
      WRITE(6,*) 'Tolerance must be positive '
      ELSE
      OK = .TRUE.
      ENDIF
      GOTO 14
   15 OK = .FALSE.
   16 IF(OK) GOTO 17
      WRITE(6,*) 'Input the maximum number of iterations.'
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) LBOUND
      IF(LBOUND.LE.0) THEN
      WRITE(6,*) 'Must be a positive integer.'
      ELSE
      OK = .TRUE.
      ENDIF
      GO TO 16
   17 CONTINUE
      ELSE
      WRITE(6,*) 'The program will end so that the functions'
      WRITE(6,*) 'F and G can be created.'
      OK = .FALSE.
      ENDIF
      IF(.NOT.OK) GOTO 400
      WRITE(6,*) 'Select output destination: '
      WRITE(6,*) '1. Screen '
      WRITE(6,*) '2. Text file '
      WRITE(6,*) 'Enter 1 or 2 '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) FLAG
      IF ( FLAG .EQ. 2 ) THEN
      WRITE(6,*) 'Input the file name in the form - '
```

```
      WRITE(6,*) 'drive:name.ext'
      WRITE(6,*) 'with the name contained within quotes'
      WRITE(6,*) 'as example:  "A:OUTPUT.DTA" '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) NAME1
      OUP = 3
      OPEN(UNIT=OUP,FILE=NAME1,STATUS='NEW')
      ELSE
      OUP = 6
      ENDIF
      WRITE(OUP,*) 'POISSON EQUATION FINITE-DIFFERENCE METHOD'
      WRITE(OUP,*) 'A= ',A,'  B= ',B
      WRITE(OUP,*) 'C= ',C,'  D= ',D
      WRITE(OUP,*) 'TOL= ',TOL,'  M= ',M,'  N= ',N
      WRITE(OUP,*) 'MAX. # ITERATIONS = ',LBOUND
      MM=M-1
      MMM=M-2
      NN=N-1
      NNN=N-2
C     XK WILL BE USED FOR K
C     STEP 1
      H=(B-A)/N
      XK=(D-C)/M
C     A,B,C,D WILL BE USED FOR X(0),X(N),Y(0),Y(M)
C     STEPS 2, 3 CONSTRUCT MESH POINTS
C     STEP 2
      DO 10 I=1,NN
10    X(I)=A+I*H
C     STEP 3
      DO 20 J=1,MM
20    Y(J)=C+J*XK
C     STEP 4
      DO 30 I=1,NN
      DO 30 J=1,MM
30    W(I,J)=0
C     STEP 5
C     USE V FOR LAMBDA, VV FOR MU
      V=H*H/(XK*XK)
      VV=2*(1+V)
      L=1
CZ IS A NEW VALUE OF W(I,J) TO BE USED IN COMPUTING THE
ERROR
C     USE E INSTEAD OF NORM
C     STEP 6
```

```
100   IF (L.GT.LBOUND) GOTO 200
C     STEPS 7 THROUGH 20 PERFORM GAUSS-SEIDEL ITERATIONS
C     STEP 7
      Z=(-H*H*F(X(1),Y(MM))+G(A,Y(MM))+V*G(X(1),D)+W(1,MM-1)*V+W(2, MM))/VV
      E=ABS(W(1,MM)-Z)
      W(1,MM)=Z
C     STEP 8
      DO 40 I=2,NNN
      Z=(-H*H*F(X(I),Y(MM))+V*G(X(I),D)+W(I-1,MM)+W(I+1,MM)+V*
     *      W(I,MM-1))/VV
      IF(ABS(W(I,MM)-Z).GT.E) E=ABS(W(I,MM)-Z)
40    W(I,MM)=Z
C     STEP 9
      Z=(-H*H*F(X(NN),Y(MM))+G(B,Y(MM))+V*G(X(NN),D)+W(NN-1,MM)+V*
     *  W(NN,MM-1))/VV
      IF(ABS(W(NN,MM)-Z).GT.E) E=ABS(W(NN,MM)-Z)
      W(NN,MM)=Z
C     STEP 10
      DO 50 LL=2,MMM
      J=MMM-LL+2
C     STEP 11
      Z=(-H*H*F(X(1),Y(J))+G(A,Y(J))+V*W(1,J+1)+V*W(1,J-
1)+W(2,J))/VV
      IF(ABS(W(1,J)-Z).GT.E) E=ABS(W(1,J)-Z)
      W(1,J)=Z
C     STEP 12
      DO 60 I=2,NNN
      Z=(-H*H*F(X(I),Y(J))+W(I-1,J)+V*W(I,J+1)+V*W(I,J-
1)+W(I+1,J))/VV
      IF(ABS(W(I,J)-Z).GT.E) E=ABS(W(I,J)-Z)
60    W(I,J)=Z
C     STEP 13
      Z=(-H*H*F(X(NN),Y(J))+G(B,Y(J))+W(NN-1,J)+V*W(NN,J+1)+V
     *      *W(NN,J-1))/VV
      IF(ABS(W(NN,J)-Z).GT.E) E=ABS(W(NN,J)-Z)
50    W(NN,J)=Z
C     STEP 14
      Z=(-
H*H*F(X(1),Y(1))+V*G(X(1),C)+G(A,Y(1))+V*W(1,2)+W(2,1))/VV
      IF(ABS(W(1,1)-Z).GT.E) E=ABS(W(1,1)-Z)
      W(1,1)=Z
C     STEP 15
      DO 70 I=2,NNN
      Z=(-H*H*F(X(I),Y(1))+V*G(X(I),C)+W(I+1,1)+W(I-1,1)+V*W(I,2))/VV
```

```
      IF(ABS(W(I,1)-Z).GT.E) E=ABS(W(I,1)-Z)
70    W(I,1)=Z
C     STEP 16
     Z=(-H*H*F(X(NN),Y(1))+V*G(X(NN),C)+G(B,Y(1))+W(NN-1,1)+V*W(NN,2))/VV
      IF(ABS(W(NN,1)-Z).GT.E) E=ABS(W(NN,1)-Z)
      W(NN,1)=Z
C     STEP 17
      IF(E.LE.TOL) THEN
      WRITE(OUP,2) L
C     STEP 18
      DO 80 I=1,NN
      DO 80 J=1,MM
80    WRITE(OUP,3) I,J,X(I),Y(J),W(I,J)
C     STEP 19
      GOTO 400
      END IF
C     STEP 20
      L=L+1
      GOTO 100
C     STEP 21
200   WRITE(OUP,1) LBOUND
400   CLOSE(UNIT=5)
      CLOSE(UNIT=OUP)
      IF(OUP.NE.6) CLOSE(UNIT=6)
      STOP
1     FORMAT(1X,'METHOD FAILS AFTER ITERATION NO. ',I4)
2     FORMAT(1X,'NO. OF ITERATIONS IS',I4,3X,'ORDER OF OUTPUT IS
     *I,J,X(I),Y(J),W(I,J)')
3     FORMAT(1X,2(I3,2X),3(E15.8,3X))
      END
```

تمارين (٩,١)

باستخدام طريقة الفروق المنتهية حل معادلة بواسون على الصورة التالية :

$$u_{xx} + u_{yy} = xe^{y}, \qquad 0 \le x \le 2, \qquad 0 \le y \le 1$$

مع الشروط الحدية :

$$u(0,y) = 0, \qquad u(2,y) = 2e^{y},$$

$$u(x,0) = x, \qquad u(x,1) = xe$$

وبأخذ $n=6, m=5$.

(٩,٣) معادلات تفاضلية جزئية من النوع المكافئ

Parabolic Partial Differential Equations

نأخذ من هذا النمط معادلة الحرارة heat equation والتي لها الصورة:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \qquad 0 < x < \ell, \qquad t > 0$$

بالشروط الحدية: $u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \qquad t > 0$

والشروط الابتدائية $u(x,0) = f(x), \qquad 0 \le x \le \ell$

باستخدام مفكوك تايلور نحصل على التالي:

$$\frac{\partial u(x_i,t_j)}{\partial t} = \frac{u(x_i,t_{j+1}) - u(x_i,t_j)}{k} - \frac{k}{2} u_{tt}(x_i,\mu_j), \quad \mu_j \in (t_j,t_{j+1})$$

وكذلك:

$$u_{xx}(x_i,t_i) = \frac{u(x_{i+1},t_j) - 2u(x_i,t_j) + u(x_{i-1},t_i)}{h^2} - \frac{h^2}{12} u_{4x}(\xi_i,t_j), \ \xi_j \in (x_{i-1},x_{i+1})$$

وبالتعويض في المعادلة نحصل على معادلة الفروق:

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0, \quad i = 1,2,\ldots,m-1, \quad j = 1,2,\ldots$$

وخطأ الاقتطاع لها هو $\tau_{i,j} = \frac{k}{2} u_{tt}(x_i,\mu_j) - \frac{\alpha^2 h^2}{12} u_{4x}(\xi_i,t_j)$ وتسمى بطريقة الفروق الأمامية Forward difference method ويمكن صياغتها على الصورة التالية:

$$w_{i,i+1} = (1-\frac{2\alpha^2 k}{h^2})w_{i,j} + \frac{\alpha^2 k}{h^2}(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}), \quad i = 1,2,...,m-1, \quad j = 1,2,...$$

$$w_{0,i} = w_{m,j} = 0, \qquad w_{i,0} = f(x_i)$$

ويمكن وضع النظام على الصورة التالية :

$$w^{(j)} = A w^{(j-1)}, j = 1,2,...$$

حيث إن :

$$A = \begin{pmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & & \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & & \\ & & & & \\ & & \lambda & 1-2\lambda & \lambda \\ & & 0 & \lambda & 1-2\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda = \frac{\alpha^2 k}{h^2}$$

وهذه الطريقة من الرتبة $O(k+h^2)$. ومن أجل دراسة استقرار طريقة الفروق الأمامية لابد أن يكون :

$$\rho(A) \le 1$$

وبحساب القيم الذاتية للمصفوفة نجد أن :

$$\rho(A) = \max_{1 \le i \le m-1} \left| 1 - 4\lambda (\sin(\frac{i\pi}{2m}))^2 \right| \le 1$$

ومنها نحصل على شرط الاستقرار التالي :

$$\alpha^2 \frac{k}{h^2} \le \frac{1}{2}$$

مثال (٩,٢)

أوجد حل معادلة الحرارة التي لها الصورة التالية :

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, \ t \geq 0$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \ t \geq 0$$
$$u(x,0) = \sin \pi x, \ 0 \leq x \leq 1$$

والحل الحقيقي هو : $u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$

بوضع $k = 0.0005$ $h = 0.1$, واستخدام معادلات الفروق السابقة سوف نحصل على النتائج المسجلة في الجدول رقم (٩,١).

الجدول رقم (٩,١).

x	$u(x,0.5)$	$w_{i,1000}$	$\lvert u(x,0.5)-w_{i,1000}\rvert$
0.0	0	0	0
0.2	0.00422728	0.00434922	1.219E-4
0.4	0.00383989	0.00703719	1.973E-4
0.6	0.00383989	0.00703719	1.973E-4
0.8	0.00422728	0.00434922	1.219E-4
1.0	0	0	0

البرنامج رقم (٩,٢)

```
C*****************************************************************
C       HEAT EQUATION BACKWARD-DIFFERENCE
C*****************************************************************
c   TO APPROXIMATE THE SOLUTION TO THE PARABOLIC PARTIAL-cDIFFERENTIAL
C     EQUATION SUBJECT TO THE BOUNDARY CONDITIONS
C           U(0,T) = U(L,T) = 0, 0 < t < T = MAX t
C     AND THE INITIAL CONDITIONS
C           U(X,0) = F(X), 0 <= X <= L:
C     INPUT:  ENDPOINT L; MAXIMUM TIME T; CONSTANT ALPHA;
c INTEGERS
C     OUTPUT:  APPROXIMATIONS W(I,J) TO U(X(I),T(J)) FOR EACH
```

```
C          I=1,...,M-1 AND J=1,...,N.
C     INITIALIZATION
C     DIMENSTION W(M), XL(M-1), XU(M-1), Z(M-1)
      DIMENSION W(10),XL( 9),XU( 9),Z( 9)
C     FT IS CAPITAL T AND FX IS L
      CHARACTER NAME1*30,AA*1
      INTEGER OUP,FLAG
      LOGICAL OK
      F(XZ)=SIN(PI*XZ)
      PI=4*ATAN(1.0)
      OPEN(UNIT=5,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
      OPEN(UNIT=6,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
      WRITE(6,*) 'This is the Backward-Difference Method'
      WRITE(6,*) 'for the Heat Equation.'
      WRITE(6,*) 'Has the function F been created in the program? '
      WRITE(6,*) 'Enter Y or N '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*)  AA
      IF(( AA .EQ. 'Y' ) .OR. ( AA .EQ. 'y' )) THEN
      OK = .FALSE.
      WRITE(6,*) 'The lefthand endpoint on the X-axis is 0.'
19    IF (OK) GOTO 11
      WRITE(6,*) 'Input righthand endpoint on the X-axis.'
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) FX
      IF (FX.LE.0.0) THEN
      WRITE(6,*) 'Must be a positive number.'
      ELSE
      OK = .TRUE.
      ENDIF
      GOTO 19
11    OK = .FALSE.
12    IF (OK) GOTO 13
      WRITE(6,*) 'Input the maximum value of the time'
      WRITE(6,*) 'variable T.'
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) FT
      IF ( FT .LE. 0.0 ) THEN
      WRITE(6,*) 'Must be positive number.'
      ELSE
      OK = .TRUE.
      ENDIF
      GOTO 12
13    WRITE(6,*) 'Input the constant alpha.'
```

```
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) ALPHA
15    OK = .FALSE.
14    IF (OK) GOTO 16
      WRITE(6,*) 'Input integer m = number of intervals'
      WRITE(6,*) 'on X-axis and N = number of time intervals.'
      WRITE(6,*) 'Note: m must be 3 or larger.'
      WRITE(6,*) 'Separate by blank. '
      READ(5,*) M,N
      IF ((M.LE.2).OR.(N.LE.0)) THEN
      WRITE(6,*) 'Numbers not within correct range.'
      ELSE
      OK = .TRUE.
      ENDIF
      GOTO 14
16    CONTINUE
      ELSE
      WRITE(6,*) 'The program will end so that the function F '
      WRITE(6,*) 'can be created '
      OK = .FALSE.
      ENDIF
      IF(.NOT.OK) GOTO 400
      WRITE(6,*) 'Select output destination: '
      WRITE(6,*) '1. Screen '
      WRITE(6,*) '2. Text file '
      WRITE(6,*) 'Enter 1 or 2 '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) FLAG
      IF ( FLAG .EQ. 2 ) THEN
      WRITE(6,*) 'Input the file name in the form - '
      WRITE(6,*) 'drive:name.ext'
      WRITE(6,*) 'with the name contained within quotes'
      WRITE(6,*) 'as example:   "A:OUTPUT.DTA" '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) NAME1
      OUP = 3
      OPEN(UNIT=OUP,FILE=NAME1,STATUS='NEW')
      ELSE
      OUP = 6
      ENDIF
    WRITE(OUP,*) 'BACKWARD-DIFFERENCE METHOD FOR HEAT EQUATION'
      MM=M-1
      MMM=MM-1
      NN=N-1
```

```
C     STEP 1
      H=FX/M
C     USE TK FOR K
      TK=FT/N
C     USE VV FOR LAMBDA
      VV=ALPHA*ALPHA*TK/(H*H)
C     STEP 2
      DO 10 I=1,MM
C     INITIAL VALUES
10    W(I)=F(I*H)
C     STEP 3
C     STEPS 3 THROUGH 11 SOLVE A TRIDIAGONAL LINEAR SYSTEM
C     USING ALGORITHM 6.7
C     USE XL FOR L, XU FOR U
      XL(1)=1+2*VV
      XU(1)=-VV/XL(1)
C     STEP 4
      DO 20 I=2,MMM
      XL(I)=1+2*VV+VV*XU(I-1)
20    XU(I)=-VV/XL(I)
C     STEP 5
      XL(MM)=1+2*VV+VV*XU(MMM)
C     STEP 6
      DO 30 J=1,N
C     STEP 7
C     CURRENT T(J)
      T=J*TK
      Z(1)=W(1)/XL(1)
C     STEP 8
      DO 40 I=2,MM
40    Z(I)=(W(I)+VV*Z(I-1))/XL(I)
C     STEP 9
      W(MM)=Z(MM)
C     STEP 10
      DO 50 II=1,MMM
      I=MMM-II+1
50    W(I)=Z(I) -XU(I)*W(I+1)
30    CONTINUE
C     STEP 11 IS CHANGED TO OUTPUT ONLY THE FINAL TIME VALUES
C     OUTPUT FINAL TIME VALUE
      WRITE(OUP,1) FT
      WRITE(OUP,3)
      DO 60 I=1,MM
      X=I*H
```

```
60      WRITE(OUP,2) I,X,W(I)
C       STEP 12
400     CLOSE(UNIT=5)
        CLOSE(UNIT=OUP)
        IF(OUP.NE.6) CLOSE(UNIT=6)
        STOP
1       FORMAT(1X,'FINAL TIME VALUE IS',1X,E15.8)
2       FORMAT(1X,I3,2(1X,E15.8))
3       FORMAT(3X,T',12X,'T(I)',12X,'W(I)')
        END
```

ولدراسة استقرار stability معادلات الفروق المنتهية نعوض عن $u_{i,j} = \hat{\varepsilon}^{j} e^{I k x_i}$ ونحصل على التالي:

$$\hat{\varepsilon}^{j+1} = \hat{\varepsilon}^{j} [(1-2\lambda) + \lambda(e^{Ikh} + e^{-Ikh})]$$

وحيث إن $\hat{\varepsilon}^{j+1} = g\hat{\varepsilon}^{j}$ إذن:

$$g = 1 - 2\lambda(1 - \cos kh)$$

وشرط التقارب هو: $|g| \le 1$

$$-1 \le 1 - 2\lambda(1 - \cos kh) \le 1$$

$$0 \le \lambda \le \frac{1}{2}$$

أي أن:

$$\frac{k}{h^2} \le \frac{1}{2}$$

وهو شرط الاستقرار لحل نظام معادلات الفروق المنتهية، ويقال أن هذا النظام مستقر شرطياً Conditionally stable. ولإيجاد نظام مستقر دون شرط Unconditionally stable فإننا نستخدم طريقة الفروق الخلفية بالنسبة للزمن أي أن:

$$\frac{\partial u(x_i,t_j)}{\partial t} = \frac{u(x_i,t_j) - u(x_i,t_{j-1})}{k} + \frac{k}{2} u_{tt}(x_i,\mu_j),\ \mu_j \in (t_{j-1},t_j)$$

ونحصل على معاملات الفروق المنتهية :

$$(1+2\lambda)w_{i,j} - \lambda w_{i+1,j} - \lambda w_{i-1,j} = w_{i,j-1},$$

$$i = 1,2,\ldots,m-1, \qquad j = 1,2,\ldots$$

حيث إن : $w_{i,0} = f(x_i), \qquad w_{i,0} = w_{m,j} = 0$

نجد أن هذا النظام مستقر استقراراً غير مشروط. أي أن $|g| \le 1$ متحقق وهذه الطريقة من الرتبة $O(k+h^2)$ ونتائج المثال السابق مدونة في الجدول رقم (٩.٢).

الجدول رقم (٩.٢).

x	$u(x_i,0.5)$	$w_{i,50}$	$\lvert u(x_i,0.5)-w_{i,50}\rvert$
0.0	0	0	0
0.2	0.00422728	0.00551236	1.285E-3
0.4	0.00683989	0.00891918	2.079E-3
0.6	0.00683989	0.00891918	2.079E-3
0.8	0.00422728	0.00551236	1.285E-3
1.0	0	0	0

ونلاحظ أن النتائج مأخوذة عند $h = 0.1, \ k = 0.01$. ونذكر الآن طريقة كرانك نيكلسون Crank-Nicolson ومن أهم خواص هذه الطريقة أنها من الرتبة $O(k^2+h^2)$ وفيها يتم استبدال التفاضلات كما يلي :

$$(u_t)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}$$

$$(u_{xx})_{i,j} = \frac{1}{2}[(u_{xx})_{i,j+1} + (u_{xx})_{i,j}]$$

وتصبح المعادلة على الصورة التالية :

$$Aw^{(j+1)} = Bw^{(j)}, \qquad j = 1,2,.....$$

حيث إن كلاً من A, B مصفوفة قطرية و $\lambda = \frac{\alpha^2 k}{h^2}$

$$A = \begin{bmatrix} 1+2\lambda & -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & & & \\ 0 & & & 0 \\ & & & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 1+2\lambda \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1-2\lambda & \frac{\lambda}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & & & \\ 0 & & & 0 \\ & & & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{2} & 1-2\lambda \end{bmatrix}$$

وهذه الطريقة غير مشروطة الاستقرار ونتائج طريقة كرانك نيكلسون معروضة في الجدول رقم (٩,٣).

الجدول رقم (٩,٣).

x	$u(x_i,0.5)$	$w_{i,50}$	$\lvert u(x_i,0.5)-w_{i,50}\rvert$
0.0	0	0	0
0.2	0.00422728	0.00438461	1.573E-4
0.4	0.00683989	0.00709444	2.546E-4
0.6	0.00683989	0.00709444	2.546E-4
0.8	0.00422728	0.00438461	1.573E-4
1.0	0	0	0

البرنامج رقم (٩.٣)

```
C*****************************************************************
C              CRANK-NICOLSON
C*****************************************************************
C       TO APPROXIMATE THE SOLUTION TO THE PARABOLIC PARTIAL-
CDIFFERENTIAL
C   EQUATION SUBJECT TO THE BOUNDARY CONDITIONS
C          U(0,T) = U(L,T) = 0, 0 < t < T = MAX t
C   AND THE INITIAL CONDITIONS
C          U(X,0) = F(X), 0 <= X <= L:
C     INPUT:   ENDPOINT L; MAXIMUM TIME T; CONSTANT ALPHA;
cINTEGERS
C          M,N:
C   OUTPUT:  APPROXIMATIONS W(I,J) TO U(X(I),T(J)) FOR EACH
C          I=1,...,M-1 AND J=1,...,N.
C   INITIALIZATION
C   DIMENSION V(M),XL(M-1),XU(M-1),Z(M-1)
    DIMENSION V( 10),XL( 9),XU( 9),Z( 9)
C   V IS USED FOR W, FT FOR CAPITAL T, FX FOR L
    CHARACTER NAME1*30,AA*1
    INTEGER OUP,FLAG
    LOGICAL OK
    F(XZ)=SIN(PI*XZ)
    PI=4*ATAN(1.0)
    OPEN(UNIT=5,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
    OPEN(UNIT=6,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
    WRITE(6,*) 'This is the Crank-Nicolson Method'
    WRITE(6,*) 'for the Heat Equation.'
    WRITE(6,*) 'Has the function F been created in the program? '
    WRITE(6,*) 'Enter Y or N '
    WRITE(6,*) ' '
    READ(5,*)  AA
    IF(( AA .EQ. 'Y' ) .OR. ( AA .EQ. 'y' )) THEN
    OK = .FALSE.
    WRITE(6,*) 'The lefthand endpoint on the X-axis is 0.'
19  IF (OK) GOTO 11
    WRITE(6,*) 'Input righthand endpoint on the X-axis.'
    WRITE(6,*) ' '
    READ(5,*) FX
    IF (FX.lE.0.0) THEN
    WRITE(6,*) 'Must be a positive number.'
    ELSE
    OK = .TRUE.
```

```
      ENDIF
      GOTO 19
11    OK = .FALSE.
12    IF (OK) GOTO 13
      WRITE(6,*) 'Input the maximum value of the time'
      WRITE(6,*) 'variable T.'
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) FT
      IF ( FT .LE. 0.0 ) THEN
      WRITE(6,*) 'Must be positive number.'
      ELSE
      OK = .TRUE.
      ENDIF
      GOTO 12
13    WRITE(6,*) 'Input the constant alpha.'
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) ALPHA
15    OK = .FALSE.
14    IF (OK) GOTO 16
      WRITE(6,*) 'Input integer m = number of intervals'
      WRITE(6,*) 'on X-axis and N = number of time intervals.'
      WRITE(6,*) 'Note: m must be 3 or larger.'
      WRITE(6,*) 'Separate by blank. '
      READ(5,*) M,N
      IF ((M.LE.2).OR.(N.LE.0)) THEN
      WRITE(6,*) 'Numbers not within correct range.'
      ELSE
      OK = .TRUE.
      ENDIF
      GOTO 14
16    CONTINUE
      ELSE
      WRITE(6,*) 'The program will end so that the function F '
      WRITE(6,*) 'can be created '
      OK = .FALSE.
      ENDIF
      IF(.NOT.OK) GOTO 400
      WRITE(6,*) 'Select output destination: '
      WRITE(6,*) '1. Screen '
      WRITE(6,*) '2. Text file '
      WRITE(6,*) 'Enter 1 or 2 '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) FLAG
      IF ( FLAG .EQ. 2 ) THEN
```

```
      WRITE(6,*) 'Input the file name in the form - '
      WRITE(6,*) 'drive:name.ext'
      WRITE(6,*) 'with the name contained within quotes'
      WRITE(6,*) 'as example:  "A:OUTPUT.DTA" '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) NAME1
      OUP = 3
      OPEN(UNIT=OUP,FILE=NAME1,STATUS='NEW')
      ELSE
      OUP = 6
      ENDIF
      WRITE(OUP,*) 'CRANK-NICOLSON METHOD FOR HEAT EQUATION'
      MM=M-1
      MMM=MM-1
      NN=N-1
C     STEP 1
      H=FX/M
C     TK IS USED FOR K
      TK=FT/N
C     VV IS USED FOR LAMBDA
      VV=ALPHA*ALPHA*TK/(H*H)
C     SET V(M)=0
      V(M)=0
C     STEP2
C     INITIAL VALUES
      DO 10 I=1,MM
10    V(I)=F(I*H)
C     STEP 3
C     STEPS 3 THROUGH 11 SOLVE A TRIDIAGONAL LINEAR SYSTEM
C     USING ALGORITHM 6.7
C     USE XL FOR L, XU FOR U
      XL(1)=1+VV
      XU(1)=-VV/(2*XL(1))
C     STEP 4
      DO 20 I=2,MMM
      XL(I)=1+VV+VV*XU(I-1)/2
20    XU(I)=-VV/(2*XL(I))
C     STEP 5
      XL(MM)=1+VV+VV*XU(MMM)/2
C     STEP 6
      DO 30 J=1,N
C     STEP 7
C     CURRENT T(J)
      T=J*TK
```

```
      Z(1)=((1-VV)*V(1)+VV*V(2)/2)/XL(1)
C     STEP 8
      DO 40 I=2,MM
40    Z(I)=((1-VV)*V(I)+VV/2*(V(I+1)+V(I-1)+Z(I-1)))/XL(I)
C     STEP 9
      V(MM)=Z(MM)
C     STEP 10
      DO 50 II=1,MMM
      I=MMM-II+1
50    V(I)=Z(I) -XU(I)*V(I+1)
30    CONTINUE
C     STEP 11--OUTPUT WILL BE ONLY FOR T=FT
      WRITE(OUP,1) FT
      WRITE(OUP,3)
      DO 60 I=1,MM
      X=I*H
60    WRITE(OUP,2) I,X,V(I)
C     STEP 12
C     PROCEDURE IS COMPLETE
400   CLOSE(UNIT=5)
      CLOSE(UNIT=OUP)
      IF(OUP.NE.OUP) CLOSE(UNIT=6)
      STOP
1     FORMAT(1X,'OUTPUT FOR TIME = ' ,1X,E15.8)
2     FORMAT(1X,I3,2(1X,E15.8))
3     FORMAT(3X,'I',12X,'T(I)',12X,'V(I)')
      END
```

ولدراسة استقرار stability حالة كرانك نيكلسون نجد أنه في نظام مخطط الفروق

difference scheme أن :

$$-\frac{\lambda}{2}w_{i+1}^{j+1}+(1+\lambda)w_i^{j+1}-\frac{\lambda}{2}w_{i-1,j}^{j+1}=-\frac{\lambda}{2}w_{i+1}^{j}+(1-\lambda)w_i^{j}+\frac{\lambda}{2}w_{i-1,j}^{j}$$

بوضع : $w_{i,j}^{j}=\hat{\varepsilon}^{j}e^{Ikx_i}$ ثم نجد أن : $\hat{\varepsilon}^{j+1}=g\hat{\varepsilon}^{j}$

$$g=\frac{1-\lambda(1-\cos kh)}{1+\lambda(1-\cos kh)}$$

ومنها نجد أن $|g| \le 1$ دائماً ولذلك فإن طريقة كرانك نيكلسون غير مشروطة الاستقرار ورتبة التقارب هي $O(k^2 + h^2)$.

تمارين (٩,٢)

١- حل المعادلة التفاضلية الجزئية باستخدام الفروق الخلفية مع دراسة الاستقرار.

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = u(2,t) = 0,$$
$$u(x,0) = \sin\frac{\pi x}{2}$$

وقارن الحل عند T=0.1 بالحل الفعلي:

$$u(x,t) = e^{\frac{-\pi^2 t}{4}} \sin\frac{\pi x}{2}$$

٢- أعد التمرين السابق باستخدام طريقة كرانك نيكلسون.

(٩,٤) معادلات تفاضلية جزية من النوع الزائدي

Hyperbolic Partial Differential Equations

في هذه الفقرة ندرس معادلة الموجة كمثال للمعادلات التفاضلية الجزئية من النوع الزائدي ذي الصيغة التالية:

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < \ell, \quad t > 0$$

مع الشروط

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \qquad t > 0$$
$$u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x), \qquad 0 \le x \le \ell$$

و α ثابت. نفرض أن:

$$x_i = ih, \quad i = 0,1,....,m \qquad t_j = jk, \quad j = 0,1,2.....$$

وعند أي نقطة (x_i,t_i) فإن معادلة الموجة تأخذ الصورة التالية:

$$u_{tt}(x_i,t_j) - \alpha^2 u_{xx}(x_i,t_j) = 0$$

ونأخذ الفرق الممركز Centered-difference بالنسبة للزمن في الصورة:

$$u_{tt}(x_i,t_j) = \frac{u(x_i,t_{j+1}) - 2u(x_i,t_j) + u(x_i,t_{j-1})}{k^2} - \frac{k^2}{12} u_{4t}(x_i,\eta_j), \eta_j \in (t_{i-1},t_{i+1})$$

وبالنسبة إلى x :

$$u_{xx}(x_i,t_j) = \frac{u(x_{i+1},t_j) - 2u(x_i,t_j) + u(x_{i-1},t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12} u_{4x}(\xi_i,t_j), \xi_j \in (x_{i-1},x_{i+1})$$

وبالتعويض في المعادلة نحصل على التالي:

$$\frac{u(x_i,t_{j+1}) - 2u(x_i,t_j) + u(x_i,t_{j-1})}{k^2} - \alpha^2 \frac{u(x_{i+1},t_j) - 2u(x_i,t_j) + u(x_{i-1},t_j)}{h^2} = 0$$

حيث مقدار خطأ الاقتطاع لها هو:

$$\tau_{i,i} = \frac{1}{12}[k^2 u_{tttt}(x_i,\mu_j) - \alpha^2 h^2 u_{xxxx}(\xi_i,t_j)]$$

وتصبح معادلة الفروق على النحو التالي:

$$w_i^{j+1} = \lambda^2 w_{i+1}^j + 2(1-\lambda^2) w_i^j + \lambda^2 w_{i-1}^j - w_i^{j-1},$$

$$\lambda = \frac{\alpha\lambda}{h}, \quad i = 1,2,.....m, \qquad j = 1,2,.....$$

ومن الشروط الحدية $w_0^j = w_m^j = 0, \qquad j = 1,2,.....$

والشرط الابتدائي الأول نحصل على:

$$w_i^0 = f(x_i), \qquad i = 1,2,.....,m, \quad (١)$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \\ \\ w_m \end{bmatrix}^{j+1} = \begin{bmatrix} 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & 0 & & \\ \lambda^2 & & & & \\ 0 & & & & \\ & & & \lambda^2 & \\ & & 0 & \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \\ \\ w_m \end{bmatrix}^j - \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \\ \\ w_m \end{bmatrix}^{j-1}$$

أو

$$\underline{w}^{j+1} = A\underline{w}^j - \underline{w}^{j-1}, \quad (٢)$$

ولحل هذا النظام يجب علينا معرفة: w_i^0, w_i^1 لكل قيم i وأحدها من الشرط الابتدائي الأول $w_i^0 = f(x_i)$ والآخر من الشرط الابتدائي الثاني:

$$u_t(x,0) = g(x), \qquad 0 \le x \le \ell.$$

$$\therefore \frac{u(x_i,t_1) - u(x_i,t_0)}{k} = g(x_i)$$

$$\therefore w_i^1 = w_i^0 + k\,g(x_i), \qquad i = 1,2,.....,m-1 \quad (٣)$$

وفي هذه الحالة يكون الخطأ من الرتبة $O(k)$ بسبب الشرط الابتدائي الثاني ويمكن عمل تحسين له كما يلي:

$$u_{tt}(x_i,0)=\alpha^2 u_{xx}(x,0)=\alpha^2 f''(x_i)$$

$$\therefore u(x_i,t_1)=u(x_i,0)+k u_t(x_i,0)+\frac{k^2}{2}u_{tt}(x_i,0)+\frac{k^3}{6}u_{ttt}(x_i,\hat{\mu}_i),\ 0<\hat{\mu}_i<t_1$$

$$\therefore u(x_i,t_1)=u(x_i,0)+k\,g(x_i)+\frac{\alpha^2k^2}{2}f''(x_i)$$

$$\therefore w_i' = w_i^0+k\,g(x_i)+\frac{\alpha^2k^2}{2}f''(x_i),\quad i=1,2,.....,m-1$$

والخطأ من الرتبة $O(k^2)$ ولكن $f''(x_i)$ غير متاحة ولذلك نعوض عنها بالصورة:

$$f''(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-2f(x_i)+f(x_{i-1})}{h^2}-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi_i^*),\ x_{i-1}\le\xi_i^*\le x_{i+1}$$

$$\therefore w_i' = (1-\lambda^2)f(x_i)+\frac{\lambda^2}{2}f(x_{i+1})+\frac{\lambda^2}{2}f(x_{i-1})+k\,g(x_i),\ i=1,2,.....,m-1$$

مثال (٩,٣)

إذا كان لمعادلة الموجة الصورة التالية:

$$u_{tt}-4u_{xx}=0,\qquad 0<x<1,\quad t>0,$$

$$u(x_i,0)=\sin\pi x,\qquad 0\le x\le 1,$$

$$u_t(x,0)=0,\qquad 0\le x\le 1$$

ومن المعادلات (١) ، (٢) ، (٣) وأخذ

$i=0,1,.....,10,\ h=0.1,\ k=0.05,\ \lambda=1$ فسوف نحصل على النتائج في الجدول رقم (٩,٤).

الجدول رقم (٩,٣).

x	$w_{i,20}$
0.0	0
0.2	0.587785
0.4	0.951056
0.6	0.951056
0.8	0.587785
1.0	0

البرنامج رقم (٩,٣)

```
C*****************************************************************
C          WAVE EQUATION FINITE-DIFFERENCE
C*****************************************************************
C    TO APPROXIMATE THE SOLUTION TO THE WAVE EQUTION:
C    SUBJECT TO THE BOUNDARY CONDITIONS
C          U(0,t) = U(L,t) = 0, 0 < t < T = MAX t
C    AND THE INITIAL CONDITIONS
C       U(X,0) = F(X) AND DU(X,0)/DT = G(X), 0 <= X <= L:
C       INPUT:   ENDPOINT L; MAXIMUM TIME T; CONSTANT ALPHA;
cINTEGERS M,N.
C    OUTPUT:  APPROXIMATIONS W(I,J) TO U(X(I),T(J)) FOR EACH I=0,...M
C          AND J=0,..,N.
C    INITIALIZATION
C    DIMENSION W(M+1,N+1)
     DIMENSION W(11,21)
C    FT IS CAPITAL T AND FX IS L
     CHARACTER NAME1*30,AA*1
     INTEGER OUP,FLAG
     LOGICAL OK
     F(XZ)=SIN(PI*XZ)
     G(XZ)=0
     PI=4*ATAN(1.0)
     OPEN(UNIT=5,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
     OPEN(UNIT=6,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
     WRITE(6,*) 'This is the Finite-Difference Method'
     WRITE(6,*) 'for the Wave Equation.'
     WRITE(6,*) 'Have the functions F and G been created?'
     WRITE(6,*) 'Enter Y or N '
     WRITE(6,*) ' '
```

```
      READ(5,*)  AA
      IF(( AA .EQ. 'Y' ) .OR. ( AA .EQ. 'y' )) THEN
      OK = .FALSE.
      WRITE(6,*) 'The lefthand endpoint on the X-axis is 0.'
10    IF (OK) GOTO 11
      WRITE(6,*) 'Input righthand endpoint on the X-axis.'
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) FX
      IF (FX.IE.0.0) THEN
      WRITE(6,*) 'Must be a positive number.'
      ELSE
      OK = .TRUE.
      ENDIF
      GOTO 10
11    OK = .FALSE.
12    IF (OK) GOTO 13
      WRITE(6,*) 'Input the maximum value of the time'
      WRITE(6,*) 'variable T.'
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) FT
      IF ( FT .LE. 0.0 ) THEN
      WRITE(6,*) 'Must be positive number.'
      ELSE
      OK = .TRUE.
      ENDIF
      GOTO 12
13    WRITE(6,*) 'Input the constant alpha.'
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) ALPHA
15    OK = .FALSE.
14    IF (OK) GOTO 16
      WRITE(6,*) 'Input integer m = number of intervals'
      WRITE(6,*) 'on X-axis and N = number of time intervals.'
      WRITE(6,*) 'Note: must be 3 or larger. Separate by blank.'
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) M,N
      IF ((M.LE.2).OR.(N.LE.0)) THEN
      WRITE(6,*) 'Numbers not within correct range.'
      ELSE
      OK = .TRUE.
      ENDIF
      GOTO 14
16    CONTINUE
      ELSE
```

```
      WRITE(6,*) 'The program will end so that the functions'
      WRITE(6,*) 'F and G can be created.'
      OK = .FALSE.
      ENDIF
      IF(.NOT.OK) GOTO 400
      WRITE(6,*) 'Select output destination: '
      WRITE(6,*) '1. Screen '
      WRITE(6,*) '2. Text file '
      WRITE(6,*) 'Enter 1 or 2 '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) FLAG
      IF ( FLAG .EQ. 2 ) THEN
      WRITE(6,*) 'Input the file name in the form - '
      WRITE(6,*) 'drive:name.ext'
      WRITE(6,*) 'with the name contained within quotes'
      WRITE(6,*) 'as example:   "A:OUTPUT.DTA" '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) NAME1
      OUP = 3
      OPEN(UNIT=OUP,FILE=NAME1,STATUS='NEW')
      ELSE
      OUP = 6
      ENDIF
      WRITE(OUP,*) 'FINITE DIFFERENCE METHOD FOR WAVE EQUATION'
      M1=M+1
      N1=N+1
      MM=M-1
      NN=N-1
C     STEP 1
C     TK IS USED FOR K, V FOR LAMBDA
      H=FX/M
      TK=FT/N
      V=TK*ALPHA/H
C     STEP 2
C     THE SUBSCRIPTS ARE SHIFTED TO AVOID ZERO SUBSCRIPTS
      DO 20 J=2,N1
      W(1,J)=0
20    W(M1,J)=0
C     STEP 3
      W(1,1)=F(0.0)
      W(M1,1)=F(FX)
C     STEP 4
      DO 30 I=2,M
      W(I,1)=F((I-1)*H)
```

```
30    W(I,2)=(1-V*V)*F((I-1)*H)+V*V*(F(I*H)+F((I-2)*H))/2+TK*G((I-1)*H)
C     STEP 5
      DO 40 J=2,N
      DO 40 I=2,M
40    W(I,J+1)=2*(1-V*V)*W(I,J)+V*V*(W(I+1,J)+W(I-1,J))-W(I,J-1)
C     STEP 6
C     OUTPUT ONLY FOR TIME VALUE T=FT
      WRITE(OUP,1) FT
      WRITE(OUP,3)
      DO 50 I=1,M1
      X=(I-1)*H
50    WRITE(OUP,2) I,X,W(I,N1)
C     STEP 7
C     PROCEDURE IS COMPLETE
400   CLOSE(UNIT=5)
      CLOSE(UNIT=OUP)
      IF(OUP.NE.6) CLOSE(UNIT=6)
      STOP
1     FORMAT(1X,'FINAL TIME VALUE IS',1X,E15.8)
2     FORMAT(1X,I3,2(1X,E15.8))
3     FORMAT(3X,'I',12X,'T(I)',10X,'W(I,N)')
      END
```

عرضنا في هذا الفصل طريقة الفروق المنتهية للأنواع الثلاثة من المعادلات التفاضلية الجزئية وهو عرض سريع وبسيط على أمل إن شاء الله تعالى بأن نعمل دراسة كاملة على الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الجزئية في جزء مستقل، وخاصة لوجود أبحاث متعددة في هذا المجال.

تمارين (٩,٣)

١ - أوجد الحل العددي لمعادلة الموجة الصورة التالية :

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = \sin x, \qquad 0 \le x \le \pi,$$

$$u_t(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le \pi$$

وقارن حلك مع الحل الفعلي عند T=0.2

$$u(x,t) = \cos t \sin x$$

المراجـــع

REFERENCES

Atkinson, K. E. and Han, W. *An Introduction to Numerical Analysis*. 3rd ed., John Wiley, New York, 2004.

Ames, W. F. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 2nd ed., Academic Press, New York, 1977.

Burden, R. L. and Faires, J. D. *Numerical Analysis*. 8th ed., Brooks/Cole Pub. Comp, Boston, 2005.

Butcher, J. *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations*. John Wiley, New York, 1987.

Epperson, J. F. *An Introduction to Numerical Methods and Analysis*. John Wiley & Sons, Chichester, 2001.

Gerald, C. F. and Wheatley, P. O. *Applied Numerical Analysis*. 7th ed., Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 2004.

Leading, J. J. *Numerical Analysis and Scientific Computation*. Addison-Wesley, Reading, MA, 2004.

Smith, G. D. *Numerical Solution of Partial Differential Equation*. Oxford University Press, Oxford, 1965.

ثبت المصطلحات

أولاً: عربي – إنجليزي

أ

استقرار	Stability
استكمال	Interpolation
أسي	Exponential
اشتقاق عددي	Numerical differentiation
أصغر المربعات	Squares least
أصغر قيمة	Minimum
أمامي	Forward
أنظمة	System
أويلر	Euler
إيجاد	Finding

ب

برامج	Programs

ت

تجميع	Collection
تعويض خلف	Backward substitution
تقارب	Convergence
تقارب تربيعي	Quadratic convergence
تقريب	Approximating
تكامل	Integral
تكامل ثنائي	Double integral
تكرار	Iteration
تكرار النقطة الثابتة	Fixed point iteration
تنصيف	Bisection

ج

جاكوبي	Jacobi
جبر خطي	Linear Algebra

Algebraic	جبرية
Product	جداء (ضرب)
Remainder term	حد باقي
Error	خطأ
Local truncation error	خطأ الاقتطاع المحلي
Step	خطوة
Linear	خطي
Backward	خلفي
Algorithm	خوارازمية

د

Function	دالة
Accuracy degree	درجة الدقة

ر

Rank	رتبة

ش

Trapezium	شبة منحرف
Condition	شرط
Form	شكل

Explicit	صريحة

Implicit	ضمنية

Method	طريقة

Pivot element	عنصر محور

Nonlinear	غير خطي

Difference	فرق
Backward difference	فرق خلفي
Finite difference	فرق محدود
Space	فضاء

ق

Differentiable	قابلة للاشتقاق
Formula	قانون
Shooting	قذف
Linear shooting	قذف خطي
Nonlinear shooting	قذف غير خطي
Truncation	قطع
Power	قوي
Initial value	قيمة ابتدائية
Eigen value	قيمة ذاتية

ك

Polynomial	كثيرة حدود

م

Consistent	متآلف
Vector	متجه
Series	متسلسلة
Continuous	متصل
Unknowns	مجاهيل

Determinant	محدد
Local	محلي
Order of convergence	مرتبة تقارب
Initial value problem	مسألة القيمة الابتدائية
Boundary value problem	مسألة القيمة الحدية
Stable	مستقرة
Matrix	مصفوفة
Absolute	مطلق
Equation	معادلة
Norm	معيار
Closed	مغلق
Integration	مكاملة

ن

Theorem	نظرية
Modified theory	نظرية المعدلة
Point	نقطة

ثانياً: إنجليزي – عربي

A

Absolute	مطلق
Accuracy degree	درجة الدقة
Algebraic	جبرية
Algorithm	خوارازمية
Approximating	تقريب

B

Backward	خلفي
Backward difference	فرق خلفي
Backward substitution	تعويض خلف
Bisection	تنصيف
Boundary value problem	مسألة القيمة الحدية

C

Closed	مغلق
Collection	تجميع
Condition	شرط
Consistent	متآلف

Continuous	متصل
Convergence	تقارب

D

Determinant	محدد
Difference	فرق
Differentiable	قابلة للاشتقاق
Double integral	تكامل ثنائي

E

Eigen value	قيمة ذاتية
Equation	معادلة
Error	خطأ
Euler	أويلر
Explicit	صريحة
Exponential	أسي

F

Finding	إيجاد
Finite difference	فرق محدود
Fixed point iteration	تكرار النقطة الثابتة

Form	شكل
Formula	قانون
Forward	أمامي
Function	دالة

I

Implicit	ضمنية
Initial value	قيمة ابتدائية
Initial value problem	مسألة القيمة الابتدائية
Integral	تكامل
Integration	مكاملة
Interpolation	استكمال
Iteration	تكرار

J

Jacobi	جاكوبي

L

Linear	خطي
Linear Algebra	جبر خطي
Linear shooting	قذف خطي

Local	محلي
Local truncation error	خطأ الاقتطاع المحلي

M

Matrix	مصفوفة
Method	طريقة
Minimum	أصغر قيمة
Modified theory	نظرية المعدلة

N

Nonlinear	غير خطي
Nonlinear shooting	قذف غير خطي
Norm	معيار
Numerical differentiation	اشتقاق عددي

O

Order of convergence	مرتبة تقارب

P

Pivot element	عنصر محور
Point	نقطة

Polynomial	كثيرة حدود
Power	قوي
Product	جداء (ضرب)
Programs	برامج

Quadratic convergence	تقارب تربيعي

Rank	رتبة

Trapezium	شبة منحرف

Remainder term	حد باقي

Series	متسلسلة
Shooting	قذف

Space	فضاء
Squares least	أصغر المربعات
Stability	استقرار
Stable	مستقرة
Step	خطوة
System	أنظمة

T

Theorem	نظرية
Truncation	قطع

U

Unknowns	مجاهيل

V

Vector	متجه