الفصل الأول

مقدمة

INTRODUCTION

نقدم في هذا الفصل بعض أسس الرياضيات المطلوبة لدراسة فرع التحليل العددي مثل الجبر الخطي، والتحليل، والتفاضل، والتكامل، وغيرها ويمكن التوسع في مراجع أخرى، ولكن نعرض جزءاً بسيطاً للاستفادة منها خلال الفصول التالية.

(١,١) الجبر الخطي

Linear Algebra

معروف في علم الجبر الخطي Linear Algebra أنه يمكن كتابة أي نظام خطي Linear system من m معادلة في n من المجاهيل unknowns على الصورة التالية:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_{1,}\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_{2,}\\
&\vdots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

ويمكن كتابة هذا النظام على الصورة المصفوفية Matrix form التالية:

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

حيث إن A مصفوفة المعاملات و $\underline{b}$ متجه الحدود المطلقة و $\underline{x}$ متجه المجاهيل. وسوف نقوم الآن باستعراض بعض النظريات لدراسة وجود وحدانية الحل للنظام الخطي.

نظرية (١،١) نظرية وجود الحل Existence of the solution

لحل النظام الخطي يجب أن نجد رتبة rank المصفوفة A ونرمز لها بالرمز $r(A)$ ، ورتبة المصفوفة الموسعة augmented matrix $(A:b)$ نرمز لها بالرمز $r(A:b)$ ، وحينئذ يكون لدينا الاحتمالان التاليان :

أ) النظام الخطي $A\underline{x}=\underline{b}$ يكون نظاماً متآلفاً consistent إذا كان :

$$r(A)=r(A:b)$$

ب) النظام الخطي $A\underline{x}=\underline{b}$ يكون نظاماً غير متآلف inconsistent إذا كان :

$$r(A)<r(A:b)$$

وفي حالة وجود حل للنظام الخطي هل هذا الحل وحيد أو يوجد أكثر من حل؟ والإجابة على هذا السؤال في النظرية التالية.

نظرية (١،٢) وحدانية الحل Uniqueness of the solution

النظام الخطي $A\underline{x}=\underline{b}$ المكون من m معادلة في n مجهول يكون له حل وحيد unique solution إذا تحقق الشرط التالي :

$$r(A)=n$$

وله عدد لا نهائي من الحلول إذا تحقق الشرط التالي :

$$r(A)<n$$

(١,٢) التحليل الدالي

Functional Analysis

إذا كان $\underline{x}$ متجه vector في الفضاء الأقليدي Euclidean space $\Re^n$ فإن معيار المتجة $\underline{x}$ norm of vector ويكتب على الصورة $\|\underline{x}\|$ هو دالة من $\Re^n$ إلى $\Re$ ويحقق الشروط التالية:

١- $\|\underline{x}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$ و $\|\underline{x}\| \geq 0$.

٢- لكل $\lambda \in \Re$ فإن $\|\lambda \underline{x}\| = |\lambda| \|\underline{x}\|$.

٣- $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$

حيث إن $\underline{x}, \underline{y} \in \Re^n$. وهناك تعريفات مختلفة لمعيار المتجه التي تحقق الشروط السابقة ومن أهمها:

١- $\|\underline{x}\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

٢- $\|\underline{x}\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$.

٣- $\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2}$ ويعرف بالمعيار الأقليدي Euclidean norm.

مثال (١,١)

إذا كان $\underline{x} \in \Re^3$ حيث إن $\underline{x} = (-1, 1, -2)$ فإن:

$$\|\underline{x}\|_\infty = 2, \ \|\underline{x}\|_1 = 4, \ \|\underline{x}\|_2 = \sqrt{6}$$

وفي النظرية التالية سوف نعطي العلاقة بين $\|\underline{x}\|_\infty$ ، $\|\underline{x}\|_2$.

نظرية (١،٣)

لكل $\underline{x} \in \Re^n$ فإن : $\|\underline{x}\|_\infty \le \|\underline{x}\|_2 \le \sqrt{n}\,\|\underline{x}\|_\infty$

البرهان: حيث إن $\underline{x} \in \Re^n$ فإن :

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

نفرض أن x_j مركبة من $\underline{x}$ حيث إن $\|\underline{x}\|_\infty = x_j$

$$\therefore \|\underline{x}\|_\infty^2 = x_j^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_j^2 = n\,x_j^2 = n\|\underline{x}\|_\infty$$

إذن :

$$\|\underline{x}\|_\infty^2 \le \|\underline{x}\|_2^2 \le n\,\|\underline{x}\|_\infty^2$$

ومنها نحصل على : $\|\underline{x}\|_\infty \le \|\underline{x}\|_2 \le \sqrt{n}\,\|\underline{x}\|_\infty$ وهو المطلوب.

وإذا كانت A,B مصفوفتين فإن معيار المصفوفة له الشروط :

١- $\|A\| \ge 0, \|A\| = 0 \Leftrightarrow f \quad A = 0$.

٢- لكل $\lambda \in \Re$, $\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|$.

٣- $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$.

٤- $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$.

ومن أهم تعريفات المعيار المصفوفة :

١- $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

٢- $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

٣- $\|A\|_F = \sqrt{\sum\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}|^2}$.

٤- $\|A\|_\Theta = \sum\limits_{i,j} |a_{ij}|$.

٥- $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda}$.

حيث إن λ أكبر قيمة مميزة Eigen value للمصفوفة A^*A , $A^* = (\bar{A})^T$.

(١,٣) التحليل الرياضي
Calculus

نستعرض بعض النظريات في التحليل الرياضي والتي لها أهمية في التحليل العددي والتي من المفترض أن الطالب درسها في مقرر سابق.

نظرية (١,٤) نظرية القيمة المتوسطة للتفاضل Mean-value theorem for derivatives

إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة فى الفترة المغلقة $[a,b]$ وقابلة للتفاضل في الفترة (a,b) ، فإنه توجد قيمة وحيدة على الأقل $c \in (a,b)$ حيث إن :

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

نظرية (١,٥) نظرية رول Roll's theorem

إذا كانت الدالة $f(x)$ دالة متصلة في الفترة $[a,b]$ وقابلة للتفاضل في الفترة (a,b) حيث إن $f(a)=f(b)$ ، فإنه توجد نقطة وحيدة على الأقل $c \in (a,b)$ بحيث إن :

$$f'(c) = 0$$

تعريف: تكامل ريمان Riemann integral

تكامل ريمان لدالة $f(x)$ في الفترة (a,b) هو عبارة عن وجود النهاية التالية :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\,\Delta x_i$$

حيث إن :

$$z_i \in [x_i, x_{i+1}], a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i=1}, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

وفي حالة $\Delta x_i = h$ يصبح تكامل ريمان على الصورة :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

حيث إن : $x_i = a + ih, \quad h = \dfrac{b-a}{n}$.

نظرية (١،٦) نظرية القيمة المتوسطة للتكاملات Mean -value theorem for integrals

إذا كانت $f(x) \in C[a,b]$ والدالة $g(x)$ قابلة للتكامل ولا تغير إشارتها في الفترة $[a,b]$ فإنه موجود $c \in (a,b)$ حيث إن :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

نظرية (١،٧) نظرية رول المعممة

بفرض أن $f(x) \in C[a,b], f^{(n)}(x) \in C(a,b)$ وإذا كان $f(x) = 0$ عند $(n+1)$ من النقاط المختلفة $x_0, x_1, \cdots, x_n \in (a,b)$ فإنه موجود عند $c \in (a,b)$ حيث إن :

$$f^{(n)}(c) = 0$$

نظرية (١,٨) نظرية القيمة البينية للدوال المتصلة Intermediate – value theorem for continuous functions

إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة في الفترة المغلقة $[a,b]$ وكان K عدداً واقعاً بين $f(a), f(b)$ فإنه توجد قيمة وحيدة على الأقل $c \in (a,b)$ حيث إن :

$$f(c) = K$$

(١,٤) المتسلسلات اللانهائية

Infinite Series

إذا كانت $\{a_n\}$ متتابعة Sequence من الأعداد فإن التعبير الرياضي في الصورة :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

يسمى متسلسلة لانهائية ويمكن تكوين متتابعة من المتسلسلة $\{S_n\}$ حيث إن :

$$\begin{aligned} &S_1 = a_1, \\ &S_2 = S_1 + a_2, \\ &\cdots \\ &S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \end{aligned}$$

وهـي متتابعـة المجمـوع الجزئـي Partial sums للمتسلسلة ، وتكـون المتسلسلة $\sum_1^\infty a_n$ تقاربية Convergent إذا كانت المتتابعة $\{S_n\}$ تقاربية وأيضاً تكون المتسلسلة $\sum_1^\infty a_n$ تباعدية Divergent إذا كانت المتتابعة $\{S_n\}$ تباعدية. ومن أهم أنواع المتسلسلات ، المتسلسلة الهندسية والتي لها الصورة التالية :

$$\sum_{1}^{\infty} a_n = \sum_{1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots,$$

حيث إن a,r ثابتان ومجموع n من الحدود S_n يُعطى بالعلاقة التالية:

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \ r \neq 1$$

ومجموع عدد لانهائي من الحدود S_∞ يُعطى بالعلاقة:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}, \qquad r \neq 1$$

وهناك بعض النظريات تفيد في التقارب والتباعد للمتسلسلات ومن أهمها ما يلي.

نظرية (١,٩) اختبار التباعد Divergent test

إذا كان $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ فإن المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} a_n$ تكون تباعدية.

نظرية (١,١٠) اختبار المقارنة الأول 1st Comparison test

بفرض أن المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} a_n$ ذات حدود موجبة، فإن:

أ) المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} a_n$ تكون تقاربية إذا كانت $a_n \leq d_n$ لكل $n_n > n_0$ و $\sum_{1}^{\infty} d_n$ متسلسلة تقاربية.

ب) المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} a_n$ تكون تباعدية إذا كانت $a_n \geq d_n$ لكل $n_n > n_0$ و $\sum_{1}^{\infty} d_n$ متسلسلة تباعدية.

نظرية (١,١١) اختبار التكامل Integral test

إذا كان $a_n = f(n)$ حيث $f(x)$ دالة متصلة وموجبة وتناقصية في المجال $x \geq 1$ إذن المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} a_n$ والتكامل $\int_{1}^{\infty} f(x)dx$ يكونان تقاربيان أو تباعديان معاً.

نظرية (١,١٢)

إذا كان $a_n \geq 0 \quad n \geq n_0, \quad \sum_{1}^{\infty} c_n$ متسلسلة تقاربية حيث إن $c_n > 0, \ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} < \infty$ فإن المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} a_n$ تكون تقاربية. وإذا كان $\sum_{1}^{\infty} d_n$ متسلسلة تباعدية $d_n > 0, \ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{d_n} > 0$ فإن المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} a_n$ تكون تباعدية.

نظرية (١,١٣) اختبار المقارنة الثاني Second comparisons test

إذا كانت $\sum_{1}^{\infty} a_n, \sum_{1}^{\infty} b_n$ ذات حدود موجبة حيث $n \geq n_0$ وإذا كان $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \neq 0$ محدوداً فإما تكون المتسلسلتين تقاربيتين معاً أو تباعديتين معاً.

نظرية (١,١٤) اختبار دالمبرت Dalmbert's test

إذا كان $\sum_{1}^{\infty} a_n$ ذات الحدود الموجبة عندما يكون $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = p$ فإنه هناك ثلاثة احتمالات كما يلي:

أ) $\sum_{1}^{\infty} a_n$ تقاربية إذا كان $\rho < 1$.

ب) $\sum_{1}^{\infty} a_n$ تباعدية إذا كان $\rho > 1$.

ج) يفشل الاختبار إذا كان $\rho = 1$.

نظرية (١,١٥) اختبار كوشي Cauchy's test

بفرض أن $\sum_{1}^{\infty} a_n$ حيث إن $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho,\ a_n \ge 0$ فإن الاحتمالات الثلاث تكون كالتالي :

أ) $\sum_{1}^{\infty} a_n$ تقاربية إذا كان $\rho < 1$.

ب) $\sum_{1}^{\infty} a_n$ تباعدية إذا كان $\rho > 1$.

ج) يفشل الاختبار إذا كان $\rho = 1$.

نظرية (١,١٦) اختبار ليبتز Libentz test

وهذا الاختبار خاص بالمتسلسلات التذبذبية أي التي على الصورة $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ وتكون تقاربية إذا تحققت الشروط الآتية :

١- $a_n > 0$ لجميع قيم n .

٢- $a_n \ge a_{n+1}$ لجميع قيم n .

٣- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

نظرية (١.١٧)

المتسلسلة التذبذبية $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ والتي تحقق شروط النظرية (١.١٦) فإن الحد الأعلى للفرق بين مجموع $A=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ وتقريبها S_n لها هو $|a_{n+1}|$ أي أن:

$$|A-S_n|\le|a_{n+1}|$$

تعريف: التقارب المطلق Absolute convergent

المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty}a_n$ تتقارب تقارباً مطلقاً إذا كانت المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty}|a_n|$ تتقارب.

تعريف: متسلسلة القوى Power series

هي متسلسلة على الصورة $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ حيث إن $c_1,c_2,\cdots$ ثوابت.

نظرية (١.١٨)

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n}^{\infty}a_nx^n$ تتقارب عند $x=c$ إذن تتقارب مطلقاً لكل $|x|<|c|$ ، وإذا كانت تتباعد عند $x=d$ فإنها تتباعد عند كل $|x|>|d|$.

نظرية (١.١٩)

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ تتقارب في الفترة $a-h<x<a+h,\ h>0$ وعرفنا الدالة $f(x)$ بالصورة التالية:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$$

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(x-a)^{n-1}$$

فإن :

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n(x-a)^{n-2}$$

و $f'(x),\ f''(x)$ يكونان تقاربيين في نفس فترة تقارب $f(x)$.

نظرية (١,٢٠)

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ تتقارب عندما تكون $a-h<x<a+h,\ h>0$ وعرفنا الدالة $f(x)$ بالصورة التالية :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$$

فإن :

$$\int f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}+\beta$$

تتقارب في الفترة $a-h<x<a+h$.

تعريف

إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للتفاضل لأي رتبة خلال فترة ما ولتكن I، $a\in I$ فإن متسلسلة تايلور المولدة بالدالة $f(x)$ عند a هي :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

وإذا كانت $a=0$ فتسمى بمتسلسلة ماكلورين.

تعريف

إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للتفاضل من الرتبة k حيث $k=0,1,...N$ خلال الفترة I ، $a\in I$ فإن كثيرة حدود تايلور من الرتبة n حيث $n=0,1,..N$ المولدة بالدالة $f(x)$ عند $x=a$ هي :

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(x-a)^i}{i!}f^{(i)}(a)$$

ومن أهم خواص كثيرة حدود تايلور أن الدالة وتفاضلاتها النونية n لها نفس القيم للدالة $f(x)$ عند $x=a$.

تعريف: صيغة تايلور Taylor form

إذا كان للدالة $f(x)$ تفاضلات من كل الرتب في الفترة المفتوحة I حيث $a\in I$ فإنه لكل $n\in Z^+$ ، $x\in I$.

$$f(b)=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}+R_n(x)$$

حيث إن الحد الباقي له الصورة التالية :

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\ \ c\in(a,x)$$

نظرية (١,٢١) الحد الباقي

إذا كانت M,r ثوابت موجبة حيث إن $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \le M\, r^{n+1}$ لكل t تقع بين (a,x) فإن الحد الباقي $R_n(x)$ يحقق المتباينة التالية :

$$\left|R_n(x)\right| \le M \frac{r^{n+1}\left|x-a\right|^{n+1}}{(n+1)!}$$

تعريف: متسلسلة ذات الحدين Binomials series

إذا كانت $f(x)=(1+x)^m$ فإن مفكوك ماكلوريين لها هو :

$$(1+x)^m = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{m}{k}x^k$$

حيث إن :

$$\binom{m}{1}=m, \binom{m}{2}=\frac{m(m-1)}{2!}, \binom{m}{k}=\frac{m(m-1)\cdots k(m-k+1)}{k!};\ k\ge 3$$

$$\binom{-1}{k}=\frac{-1(-2)(-3)\cdots(-1-k+1)}{k!}=(-1)^k$$

(١,٥) المعادلات التفاضلية

Differential Equations

إذا كانت $f(x,y)$ دالة متصلة في المجال D فإن المعادلة التفاضلية ذات الصورة التالية :

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y), \quad y(x_0)=y_0$$

تسمى بمسألة القيمة الابتدائية.

تعريف: شرط لبشتز Lipschitz condition

يقال أن الدالة $f(x,y)$ تحقق شرط لبشتز في المتغير y داخل المجال D حيث إن $D=\{(x,y): a\le x\le b, c\le y\le d\}$ إذا وجد أن ثابت $K>0$ ، حيث إن:

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\le K|y_2-y_1|,\quad \forall \quad c\le y_1\le y_2\le d$$

حيث إن النقطتين $(x,y_1),(x,y_2)$ تقعان في المنطقة D. ويسمى الثابت K بثابت لبشتز للدالة $f(x,y)$.

(١,٦) الأخطاء
Errors

تنشأ الأخطاء في علم التحليل العددي من خمسة مصادر رئيسة للأخطاء التي تظهر في حسابات المسائل الرياضية وهي: خطأ المسألة، وخطأ الطريقة، وخطأ الباقي، والخطأ الإبتدائي، وخطأ نظام الأعداد المستخدم، وخطأ العمليات الحسابية.

تعريف: الخطأ Error

يعرف الخطأ Error بأنه الفرق بين القيمة الصحيحة والقيمة التقريبية:

Error = True value – Approximate value

$$E=T-A$$

والخطأ المطلق Absolute error هو القيمة المطلقة للخطأ:

$$AE = \text{Absolute error} = |T-A|$$

والخطأ النسبي Relative error

$$\rho = \frac{AE}{T} \cong \frac{AE}{A} = \frac{\text{الخطأ المطلق}}{\text{القيمة التقريبية}}$$

والخطأ المئوي $\% \rho =$ Percentage error $\%$

إذا كانت a هي القيمة الصحيحة و a^* والقيمة التقريبية فإن:

$$AE \geq |T - A| = |a - a^*|$$

ومن خواص المتباينات:

$$a^* - AE \leq a \leq a^* + AE$$

والخطأ النسبي:

$$\rho(a^*) = \frac{AE(a^*)}{a^*} = \frac{|a - a^*|}{a^*}$$

$$\therefore AE(a^*) = a^* \rho(a^*)$$

إذن:

$$a^*(1 - \rho(a^*)) \leq a \leq a^*(1 + \rho(a^*))$$

الأخطاء المتراكمة من العمليات الحسابية البسيطة

بفرض أن $\bar{x}, \bar{y}$ قيمتان تقريبيتان للقيمتين x, y وأن $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ قيمتا الخطأ في x, y على الترتيب أي أن:

$$\varepsilon_x = x - \bar{x}, \quad \varepsilon_y = y - \bar{y}$$

فإن الخطأ في حالة إجراء عمليات حسابية قد يزيد وقد ينقص كما يلي:

أ) الخطأ في حالة الجمع والطرح

$$x \pm y = \bar{x} + \varepsilon_x + \bar{y} + \varepsilon_y = (\bar{x} \pm \bar{y}) + (\varepsilon_x \pm \varepsilon_y)$$

أي أن:

$$\varepsilon_{x\pm y} = \varepsilon_x \pm \varepsilon_y$$
$$\therefore \left|\varepsilon_{x\pm y}\right| \le \left|\varepsilon_x\right| + \left|\varepsilon_y\right|$$

أي أن عملية الجمع والطرح تكون القيمة المطلقة للخطأ أقل من أو تساوي مجموع القيم المطلقة للخطأ في الأعداد الداخلة في عمليتي الجمع أو الطرح.

والخطأ النسبي $\rho_x = \dfrac{\varepsilon_x}{x},\ \rho_y = \dfrac{\varepsilon_y}{y}$

في حالة الجمع

$$\rho_{x+y} = \frac{\varepsilon_{x+y}}{x+y} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{x+y} = \frac{\varepsilon_x}{x+y} + \frac{\varepsilon_y}{x+y}$$
$$\rho_{x+y} = \frac{x}{x+y}\rho_x + \frac{y}{x+y}\rho_y$$

وكذلك:

$$\rho_{x-y} = \frac{x}{x+y}\rho_x - \frac{y}{x+y}\rho_y$$

ب) لحساب الخطأ في عمليتي الضرب والقسمة

$$\therefore xy = (\bar{x} + \varepsilon_x)(\bar{y} + \varepsilon_y)$$
$$xy = \bar{x}\,\bar{y} + \bar{x}\,\varepsilon_y + \bar{y}\,\varepsilon_x$$

ونهمل المقدار $\varepsilon_x \varepsilon_y$ لأنه صغير.

$$\therefore \varepsilon_{xy} = \varepsilon_x \bar{y} + \varepsilon_y\,\bar{x}$$

والخطأ النسبي :

$$\rho_{xy} = \frac{\varepsilon_{xy}}{xy} \approx \frac{\varepsilon_x \bar{y} + \varepsilon_y \bar{x}}{\bar{x}\,\bar{y}} = \rho_x + \rho_y$$

وفي حالة القسم :

$$\frac{x}{y} = \frac{\bar{x} + \varepsilon_x}{\bar{y} + \varepsilon_y} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}}(1 + \frac{\varepsilon_x}{\bar{x}})(1 + \frac{\varepsilon_y}{\bar{y}})^{-1}$$

$$= \frac{\bar{x}}{\bar{y}}(1 + \frac{\varepsilon_x}{\bar{x}} - \frac{\varepsilon_y}{\bar{y}} + \cdots)$$

وبإهمالنا حدود الدرجات العليا للخطأ نجد أن :

$$\frac{x}{y} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} + \frac{\varepsilon_x}{\bar{y}} - \varepsilon_y \frac{\bar{x}}{\bar{y}^2}$$

$$\therefore \varepsilon_{\frac{x}{y}} = \frac{\varepsilon_x}{\bar{y}} - \varepsilon_y \frac{\bar{x}}{\bar{y}^2}$$

والخطأ النسبي هو :

$$\rho_{\frac{x}{y}} \approx \frac{\bar{y}}{\bar{x}}(\frac{\varepsilon_y}{\bar{y}} - \varepsilon_y \frac{\bar{x}}{\bar{y}^2}) = \frac{\varepsilon_x}{\bar{x}} - \frac{\varepsilon_y}{\bar{y}} = \rho_x - \rho_y$$

أي أن الخطأ النسبي في حالة الضرب أو القسمة أقل من أو يساوي مجموع الأخطاء النسبية المطلقة أي أن :

$$|\rho_{xy}| \le |\rho_x| + |\rho_y|, \qquad |\rho_{x/y}| \le |\rho_x| + |\rho_y|,$$

تعريف: الأرقام المؤثرة في أي عدد Significant digits of a number

أي رقم غير صفري رقم معنوي والصفر يكون معنوياً إذا وقع بين أرقام معنوية أخرى ولا يكون رقماً معنوياً إذا سبق كل الأرقام المعنوية غير الصفرية.

0.03045	له	4	أرقام معنوية.
0.030450000	له	8	أرقام معنوية.
30.5	له	3	أرقام معنوية.
30.0500	له	6	أرقام معنوية.

تعريف: الأعداد الدقيقة حتى n من الأرقام العشرية.

يقال أن العدد الذي يحتوي على d من الأرقام العشرية صحيح حتى d من الأرقام العشرية إذا كان الخطأ في إيجاد هذا العدد لا يتجاوز 0.5×10^{-d}.

مثال رقم (١,١)

إذا وجد أن القيمة التقريبية لطول خط مستقيم هي 18.4 مع خطأ 0.05 فأوجد حدود الطول الصحيح.

الحل

$$\bar{x}=18.4,\quad \varepsilon_x=0.05$$

$$\bar{x}-\varepsilon_x\le x\le\bar{x}+\varepsilon_x$$

$$18.35\le x\le18.45$$

مثال رقم (١،٢)

أوجد الخطأ النسبي إذا كانت القيمة التقريبية 35.148 والخطأ المطلق هو 0.00074.

الحل

$$\rho = \frac{\varepsilon_x}{\overline{x}} = \frac{0.00074}{35.148} = 0.000022$$

تعريف

إذا كانت $\{\beta_n\}$ متتالية متقاربة إلى الصفر، و$\{\alpha_n\}$ متتالية متقاربة إلى α. إذا وجد عدد موجب K بحيث:

$$|\alpha_n - \alpha| \le K|\beta_n|$$

لقيم n الكبيرة فإنه يقال أن المتتالية $\{\alpha_n\}$ تتقارب إلى α ومعدل تقاربها $O(\beta_n)$ وتكتب:

$$\alpha_n = \alpha + O(\beta_n)$$

أو $\alpha_n \rightarrow \alpha$ بمعدل تقارب $O(\beta_n)$.

في نهاية هذا الفصل نعرض سؤالاً يجب أن يدركه الطالب قبل الانطلاق في الفصول القادمة وهو لماذا التحليل العددي؟ ونعرض أيضاً بعض أفكار الإجابة ويمكن للطالب القياس عليها وإيجاد إجابات متنوعة. كثيراً ما يظهر نموذج رياضي به مثلاً تكامل لا يمكن حله بالطرق العادية ؛ لذلك نستخدم التحليل العددي لإيجاد قيمة هذا

التكامل، ويمكن وجود نموذج من المعادلات التفاضلية يصعب حلها بالطرق العادية فنستخدم التحليل العددي لحل هذا النموذج ، وهكذا ومن الملاحظ أننا في حالة دراسة الطرق العددية مثلاً في حلول المعادلات نستخدم نماذج لها حل معلوم لنؤكد صحة الطريقة وحينئذ نستخدمها في حالة نماذج غير معروفة الحل.

تمارين (١,١)

١- في نظم المعادلات الخطية التالية حدد ما إذا كان له حل وحيد أو عدد لانهائي من الحلول أو لا يوجد حل.

(أ)
$$\begin{aligned} x+y&=1 \\ x-y&=3 \end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned} x+y+z&=3 \\ 2x+3y+4z&=9 \\ 3x+4y+5z&=12 \end{aligned}$$

(ج)
$$\begin{aligned} x+y&=1 \\ 2x+2y&=3 \end{aligned}$$

٢- أوجد $\|A\|_\infty$ و $\|A\|_1$ و $\|A\|_F$ و $\|A\|_\Theta$ و $\|A\|_2$ بالنسبة للمصفوفة $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$.

٣- أوجد جذور المعادلة $x^2-40x+1=0$ في صورة خمسة أرقام معنوية.

٤- إذا علمت أن جذر معادلة ما يجب أن يكون $x=2.55$ وبإيجاد الحل العددي للمعادلة تم إيجاد قيمة تقريبية 2.49 فأوجد الخطأ المطلق والخطأ النسبي.

٥- وضح بفكرك الخاص أهمية دراستك للتحليل العددي.