الفصل الثاني

حلول المعادلات غير الخطية في متغير واحد

SOLUTIONS OF NONLINEAR EQUATIONS IN ONE VARIABLE

(٢,١) مقدمة

Introduction

سوف ندرس في هذا الفصل كيفية إيجاد حلول المعادلات غير الخطية في متغير واحد المتواجدة بكثرة في فروع العلوم المختلفة وأكثرها كعلوم الفيزياء والكيمياء والهندسة وغيرها. والصورة العامة للمعادلات غير الخطية في متغير واحد هي :

$$f(x) = 0$$

ومن أمثلة المعادلات غير الخطية :

$$e^{x} + \sin x = 0, \quad \tan x + x - e^{x} = 0, \quad e^{x^2} + \cot x = 0$$

والمعادلة غير الخطية $f(x) = 0$ يكون لها حل صحيح وليكن $x = \alpha$ إذا تحقق أن $f(\alpha) = 0$ وفي هذه الحالة يقال أن α جذر أو حل للمعادلة. في الحالة العامة يكون من الصعب إيجاد الحلول الصحيحة للمعادلات غير الخطية ؛ ولذلك يجب علينا دراسة كيفية إيجاد الحلول التقريبية. وعلى وجه العموم، يمكن الحصول على حلول

تقريبية باستخدام الطرق الحسابية والتي أصبحت مهمة جداً بعد ظهور لغات الحاسب الآلي وتطورها. ومعنى أننا نستطيع إيجاد القيمة التقريبية $\bar{x}$ التي تجعل المقدار $f(\bar{x})$ صغيراً جداً بدرجة كافية وفي هذه الحالة يكون $\bar{x}$ تقترب من القيمة الصحيحة x التي تجعل $f(x)=0$. لذا نعرض بعض الطرق العددية التي تفيد في حل المعادلات غير الخطية في الفقرة التالية.

(٢,٢) طريقة التنصيف

The Bisection Method

وطريقة التنصيف تعتمد على أنه إذا كانت الدالة متصلة وتغير إشارتها في الفترة [a, b] فلابد أن لها على الأقل جذراً داخل هذه الفترة. ثم يتم تنصيف الفترة بالنقطة $c_1=\dfrac{a+b}{2}$ وبذلك يكون لدينا فترتان هما $[a, c_1], [c_1, b]$. وفي حالة $f(a)f(c_1)<0$ يعني أن للدالة جذراً في الفترة $[a, c_1]$ والتقريب الثاني يكون على الصورة $c_2=\dfrac{a+c_1}{2}$ وفي حالة $f(a)f(c_1)>0$ ؛ ولذلك يكون $f(b)f(c_1)<0$ يعني أن للدالة جذراً في الفترة $[c_1, b]$ والتقريب الثاني يكون على الصورة $c_2=\dfrac{b+c_1}{2}$ وبفرض الاحتمال الأول مثلاً ثم نختبر ما إذا كانت $f(a)f(c_2)<0$ أم لا. ففي حالة الإجابة بنعم نكرر الخطوة السابقة ونحسب جذراً جديداً $c_3=\dfrac{a+c_2}{2}$ وفي حالة الإجابة بلا نحسب الجذر الجديد ما بين c_1, c_2 في الصورة $c_3=\dfrac{c_1+c_2}{2}$ وهكذا حتى نحصل على متتابعة من الجذور $\{c_1, c_2, ...\}$ تتقارب إلى جذر من جذور المعادلة داخل الفترة. مع ملاحظة وجود بعض من مساوىء هذه الطريقة منها يمكن وجود أكثر من جذر أو جذر مكرر في نفس الفترة. وهناك بعض العيوب الأخرى لطريقة التنصيف منها ممكن المتتابعة الناتجة $\{c_1, c_2, ...\}$ تتمتع بخاصية كون الفرق بين

أي تقريبين متتالين متقارب من الصفر على الرغم من أنها تباعدية ومثال لذلك المتتابعة $\left\{1,\frac{3}{2},\frac{11}{6},\frac{25}{12},....\right\}$ الحد العام لهذه المتتابعة معرف بالعلاقة $c_n = 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$.

والمثال التالي يوضح طريقة التنصيف لحل المعادلات غير الخطية، وعلى الرغم من ذلك فإنها طريقة عددية بسيطة في التطبيق.

مثال (٢.١)

المعادلة $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ لها جذر في الفترة $[1,2]$ حيث إن $f(1) = -5, \quad f(2) = 14$ يعني أنها تغير إشارتها داخل الفترة ؛ ولذلك لها على الأقل جذر واحد داخل هذه الفترة.

نجد التقريب الأول للجذر

$$c_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

$f(c_1) = 2.375 > 0$ إذن الجذر في الفترة $[1,1.5]$

نجد التقريب الثاني للجذر

$$c_2 = \frac{1+1.5}{2} = 1.25$$

$f(c_2) = -1.79687$ إذن الجذر في الفترة $[1.25,1.5]$

نجد التقريب الثالث للجذر

$$c_3 = \frac{1.25+1.5}{2} = 1.373$$

$f(c_3) = 0.16211$ إذن الجذر في الفترة [1.25,1.373] .

ونكرر هذه العملية حتى يتم الحصول على حل قريب من الحل الصحيح كما هو موضح في الجدول رقم (٢،١).

الجدول رقم (٢،١).

n	a_n	b_n	c_n	$f(c_n)$
1	1.0	2.0	1.5	2.375
2	1.0	1.5	1.25	-1.79687
3	1.25	1.5	1.375	0.16211
4	1.25	1.375	1.3125	-0.84839
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
13	1.364990235	1.365234375	1.365112305	-0.00149

ومما هو جدير بالاهتمام من كل من يدرس التحليل العددي هو عمل البرامج ونضيف هنا برنامج طريقة التنصيف باستخدام برنامج الفورتران وهو من أشهر البرامج استخداماً عند متخصصي ودارسي التحليل العددي.

البرنامج رقم (٢،١)

```
***********************************************************************
C              BISECTION
***********************************************************************
C    TO FIND A SOLUTION TO F(X)=0 GIVEN THE CONTINOUS      C C
CCCFUNCTION
C    F ON THE INTERVAL <A,B>, WHERE F(A) AND F(B) HAVE
C    OPPOSITE SIGNS:
C    INPUT:   ENDPOINTS A,B; TOLERANCE TOL;
C    MAXIMUM INTERATIONS N0.
C    OUTPUT:  APPROXIMATE SOLUTION P OR A
C    MESSAGE THAT THE ALGORITHM FAILS.
     CHARACTER NAME1*14,AA*1
```

```
      INTEGER OUP,FLAG
      LOGICAL OK
      REAL A,B,FA,FB,X,TOL
      INTEGER N0
C     DEFINE F
      F(X)=(X+4)*X*X-10
      OPEN(UNIT=5,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
      OPEN(UNIT=6,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
      WRITE(6,*) 'This is the Bisection Method.'
      WRITE(6,*) 'Has the function F been created in the program? '
      WRITE(6,*) 'Enter Y or N '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*)  AA
      IF(( AA .EQ. 'Y' ) .OR. ( AA .EQ. 'y' )) THEN
      OK = .FALSE.
10    IF (OK) GOTO 11
      WRITE(6,*) 'Input endpoints A < B  separated by blank '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) A, B
      IF (A.GT.B) THEN
      X = A
      A = B
      B = X
      ENDIF
      IF (A.EQ.B) THEN
      WRITE(6,*) 'A cannot equal B '
      WRITE(6,*) ' '
      ELSE
      FA = F( A )
      FB = F( B )
      IF ( FA * FB .GT. 0.0 ) THEN
      WRITE(6,*) 'F(A) and F(B) have same sign '
      WRITE(6,*) ' '
      ELSE
      OK = .TRUE.
      ENDIF
      ENDIF
      GOTO 10
11    OK = .FALSE.
12    IF (OK) GOTO 13
      WRITE(6,*) 'Input tolerance '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) TOL
      IF (TOL.LE.0.0) THEN
```

```
   WRITE(6,*) 'Tolerance must be positive '
   WRITE(6,*) ' '
   ELSE
   OK = .TRUE.
   ENDIF
   GOTO 12
13 OK = .FALSE.
14 IF (OK) GOTO 15
   WRITE(6,*) 'Input maximum number of iterations '
   WRITE(6,*) '- no decimal point '
   WRITE(6,*) ' '
   READ(5,*) N0
   IF ( N0 .LE. 0 ) THEN
   WRITE(6,*) 'Must be positive integer '
   WRITE(6,*) ' '
   ELSE
   OK = .TRUE.
   ENDIF
   GOTO 14
15 CONTINUE
   ELSE
   WRITE(6,*) 'The program will end so that the function F '
   WRITE(6,*) 'can be created '
   OK = .FALSE.
   ENDIF
   IF (.NOT.OK) GOTO 40
   WRITE(6,*) 'Select output destination: '
   WRITE(6,*) '1. Screen '
   WRITE(6,*) '2. Text file '
   WRITE(6,*) 'Enter 1 or 2 '
   WRITE(6,*) ' '
   READ(5,*) FLAG
   IF ( FLAG .EQ. 2 ) THEN
   WRITE(6,*) 'Input the file name in the form - '
   WRITE(6,*) 'drive:name.ext'
   WRITE(6,*) 'with the name contained within quotes'
   WRITE(6,*) 'as example:   "A:OUTPUT.DTA" '
   WRITE(6,*) ' '
   READ(5,*) NAME1
   OUP = 3
   OPEN(UNIT=OUP,FILE=NAME1,STATUS='NEW')
   ELSE
   OUP = 6
   ENDIF
```

```
      WRITE(6,*) 'Select amount of output '
      WRITE(6,*) '1. Answer only '
      WRITE(6,*) '2. All intermediate approximations '
      WRITE(6,*) 'Enter 1 or 2 '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) FLAG
      WRITE(OUP,*) 'BISECTION METHOD'
      IF (FLAG.EQ.2) THEN
      WRITE(OUP,004)
004   FORMAT(3X,'I',15X,'P',12X,'F(P)')
      ENDIF
C     STEP 1
      I=1
C     STEP 2
016   IF (I.GT.N0) GOTO 020
C     STEP 3
C     COMPUTE P(I)
      P=A+(B-A)/2
      FP=F(P)
      IF (FLAG.EQ.2) THEN
      WRITE(OUP,005) I,P,FP
005   FORMAT(1X,I3,2X,E15.8,2X,E15.8)
      ENDIF
C     STEP 4
      IF( ABS(FP).LE.1.0E-20 .OR. (B-A)/2 .LT. TOL) THEN
C     PROCEDURE COMPLETED SUCCESSFULLY
      WRITE(OUP,002) P, I, TOL
      GOTO 040
      ENDIF
C     STEP 5
      I=I+1
C     STEP 6
C     COMPUTE A(I) AND B(I)
      IF( FA*FP .GT. 0) THEN
      A=P
      FA=FP
      ELSE
      B=P
      FB=FP
      ENDIF
      GOTO 016
020   CONTINUE
C     STEP 7
C     PROCEDURE COMPLETED UNSUCCESSFULLY
```

```
      IF(OUP.NE.6) WRITE(6,3) N0,P,TOL
      WRITE(OUP,3) N0,P,TOL
040   CLOSE(UNIT=5)
      CLOSE(UNIT=OUP)
      IF (OUP.NE.6) CLOSE(UNIT=6)
      STOP
002   FORMAT(1X,'THE APPROXIMATE SOLUTION IS',/,1X
     *,E15.8,1X,'AFTER',1X,I2,1X,'ITERATIONS, WITH TOLERANCE'
     * ,1X,E15.8)
003   FORMAT(1X,'ITERATION NUMBER',1X,I3,1X,'GAVE
     *APPROXIMATION',
     */,E15.8,1X,'NOT WITHIN TOLERANCE',1X,E15.8)
      END
```

ونتائج هذا البرنامج كما يلي :

BISECTION METHOD

I	P	F(P)
1	.15000000E+01	.23750000E+01
2	.12500000E+01	-.17968750E+01
3	.13750000E+01	.16210940E+00
4	.13125000E+01	-.84838870E+00
5	.13437500E+01	-.35098270E+00
6	.13593750E+01	-.96408840E-01
7	.13671880E+01	.32355790E-01
8	.13632810E+01	-.32149970E-01
9	.13652340E+01	.72024760E-04
10	.13642580E+01	-.16046690E-01
11	.13647460E+01	-.79892630E-02
12	.13649900E+01	-.39591020E-02
13	.13651120E+01	-.19436590E-02
14	.13651730E+01	-.93584730E-03

THE APPROXIMATE SOLUTION IS

.13651730E+01 AFTER 14 ITERATIONS, WITH TOLERANCE .10000000E-03.

الآن نعرض بعض الدراسات النظرية الخاصة بطريقة التنصيف.

نظرية (٢,١) تقارب طريقة التنصيف Convergence of bisection method

بفـــرض أن الدالـــة $f(x)$ دالـــة متـــصلة في الفـــترة $[a, b]$ حيـــث إن $f(a)f(b) < 0$ فإن طريقة التنصيف تولد متتابعة $\{p_n\}$ تكون متتابعة تقاربية إلى الجذر الحقيقي للمعادلة $f(x) = 0$ ويكون أيضاً:

$$|p_n - p| \le \frac{1}{2^n}(b-a), \quad n \ge 1$$

البرهان:

لكل $n \ge 1$ فإن:

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b-a), \qquad p \in (a_n, b_n)$$

وحيث إن:

$$p_n = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad n \ge 1$$

ولأن المسافة بين الجذر p_n والجذر الحقيقي p يكون أقل من نصف الفترة $[a_n, b_n]$.

$$\therefore |p_n - p| \le \frac{1}{2}(b-a) = \frac{b-a}{2^n}$$

وفي حالة $n \to \infty$ فإن $p_n \to p$ ومعدل التقارب $O(\frac{1}{2^n})$

$$\therefore \quad p_n = p + O(\frac{1}{2^n})$$

نظرية (٢,٢) عدد التكــرارات في طريقــة التنــصيف Number of iterations in bisection method

عـدد التكـرارات اللازمـة للحـصول علـى خطـأ لا يتجـاوز ε في حـل المعادلـة $f(x)=0$ بطريقة التنصيف يعطى من حل المتباينة :

$$n \geq \frac{\ell n(b-a)-\ell n\varepsilon}{\ell n 2}$$

البرهان:

من النظرية (٢,١)

$$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

$$\therefore \ \varepsilon \leq \frac{b-a}{2^n}$$

$$\therefore \ \ell n\varepsilon \leq \ell n(b-a) - n\ \ell n 2$$

ومنها نحصل على:

$$n \geq \frac{\ell n(b-a)-\ell n\varepsilon}{\ln 2}$$

وهو المطلوب.

مثال (٢,٢)

المعادلـة $f(x)=x^3+4x^2-10$ لهـا جـذر في الفـترة $[1,2]$ ، مـا هـو عـدد التكرارات اللازمة للحصول على خطأ لا يتجاوز 10^{-3} ؟

الحل: من النظرية (٢,٢) :

$$n \geq \frac{\ell n(2-1)-\ell n 10^{-3}}{\ell n 2} \approx 9.96$$

إذن عدد الخطوات اللازمة للحصول على خطأ لا يتجاوز 10^{-3} هو 10 تكرارات على الأقل.

تمارين (٢,١)

١- استخدام طريقة التنصيف لإيجاد التقريب الثالث p_3 للدالة:

$f(x)=\sqrt{x}-\cos x$ في الفترة $[0,1]$.

٢- إذا كانت $f(x)=3(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-1)$ ، استخدم طريقة التنصيف في الفترات التالية لإيجاد التقريب الثالث p_3 .

أ) $[-2,-1.5]$ ب) $[-1.25,2.5]$

٣- استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلول ذات دقة 10^{-2} للمعادلة $x^3-7x^2+14x-6=0$ خلال كلٍ من الفترات التالية:

أ) $[0,1]$ ب) $[1,3.2]$ ج) $[3.2,4]$.

٤- أوجد تقريبية لـ $\sqrt{3}$ صحيحة حتى خطأ لا يتجاوز 10^{-4} باستخدام طريقة التنصيف.

٥- أوجد عدد الخطوات اللازمة للحصول على خطأ لا يتجاوز 10^{-4} لحل المعادلة $x^3-x-1=0$ في الفترة $[1,2]$ بطريقة التنصيف.

(٢,٣) طريقة التقريب المتتالي

Iteration Method

تعريف: النقطة الثابتة Fixed Point

يقال للنقطة p أنها ثابتة للدالة $g(x)$ إذا كان:

$$g(p) = p$$

وهناك دوال لها عدد لا نهائي من النقاط الثابتة ودوال لها نقطة ثابتة وحيدة ودوال ليس لها نقاط ثابتة، وسنعطي أمثلةً لتوضيح الأنواع الثلاثة.

مثال (٢,٣)

الدالة $g(x) = x^2 - 2$ في الفترة $-2 \le x \le 3$ لها نقطتان ثابتتان وهما $2, -1$ حيث إن:

$$g(p) = p$$
$$\therefore p^2 - 2 = p$$
$$\therefore p = -1, p = 2$$
$$g(-1) = -1, \qquad g(2) = 2$$

مثال (٢,٤)

الدالة $g(x) = x$ في الفترة $0 \le x \le 1$ لها عدد لا نهائي من النقاط الثابتة حيث إن $g(p) = p$ لها عدد لا نهائي من الحلول في الفترة $[0,1]$.

مثال (٢,٥)

الدالة $g(x) = x$ في الفترة $1 < x < 2$ ليس لها أي نقطة ثابتة حيث إن المعادلة $g(p) = p$ ليس لها حل في الفترة $(1,2)$.

ولذلك نعرض نظرية تحدد شروط وجود وحدانية النقطة الثابتة.

نظرية (٢.٣) نظرية النقطة الثابتة Fixed point theorem

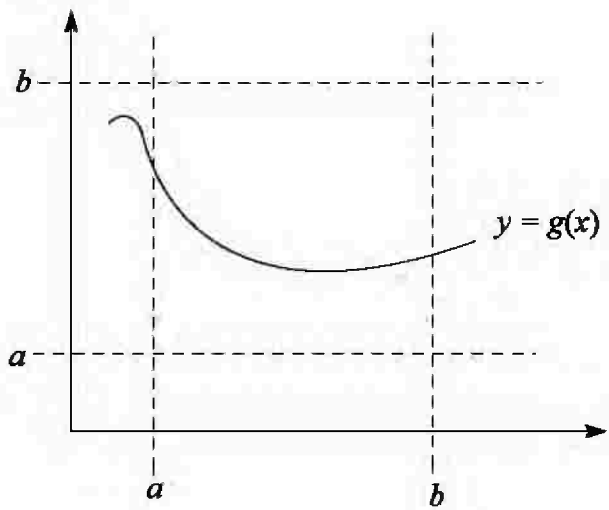
أ) إذا كانت $g(x)\in C[a,b]$، $g(x)\in[a,b]$ لجميع قيم $x\in[a,b]$ فإن الدالة $g(x)$ لها نقطة ثابتة في الفترة $[a,b]$.

ب) وإذا كانت $g'(x)$ موجودة في (a,b) و $k\in\Re^+$ و $k<1$ ، حيث إن:

$$|g'(x)|\le k,\quad \forall x\in(a,b)$$

فإن النقطة الثابتة في [a, b] تكون وحيدة.

البرهان:



أ) إذا كان $g(a)=a$ أو $g(b)=b$ فهذا هو المطلوب وإن لم يكن متحققاً فإن $g(b)<b$ و $g(a)>a$ ونعرف الدالة $h(x)$ بالصورة:

$$h(x)=g(x)-x$$

و $h(x)$ دالة متصلة لأن $g(x)$ دالة متصلة في الفترة [a, b] ،

$$h(a)=g(a)-a>0,\qquad h(b)=g(b)-b<0$$

من طريقة التنصيف $h(x)$ لها جذر في الفترة [a, b] وليكن p أي أن:

$$h(p) = g(p) - p = 0$$

$$\therefore g(p) = p, \quad p \in (a,b)$$

$\therefore$ $g(x)$ لها نقطة ثابتة في الفترة [a, b].

(ب) إذا كـان $|g'(x)| \le k < 1$ والمطلـوب هـو إثبـات أن النقطـة الثابتـة للدالـة $g(x)$ وحيدة فإننا نفرض عكس ذلك وهو أن توجد نقطتان ثابتتان وهما p, q أي أن:

$$g(p) = p, \quad g(q) = q, \quad p \ne q$$

وحيـث إن الدالـة $g(x)$ دالـة متـصلة إذن باسـتخدام نظريـة القيمـة المتوسـطة يوجـد $\xi \in (p,q)$ حيث إن:

$$g'(\xi) = \frac{g(p) - g(q)}{p - q}$$

$$\therefore |p - q| = |g(p) - g(q)| = |g'(\xi)||p - q|$$

$$\le k|p - q| < |p - q|$$

$$\therefore (1 - k)|p - q| \le 0$$

$1 - k > 0$ إذن $|p - q| \le 0$ إذن $p = q$

وهو المطلوب.

مع ملاحظة أنه في حالة $|g'(x)| \ge 1$ يمكـن أن يكـون لـها نقطـة ثابتـة ولكـن غـير وحيدة.

مثال (٢,٦)

أ) الدالـة $g(x)=\frac{x^3-1}{3}$ في الفـترة [-1,1] ونجـد أن $g(x)$ دالـة متـصلة في الفترة [-1,1] و $g(x)\in[-1,1]$ و

$$|g'(x)|=\left|\frac{2x}{3}\right|\le\frac{2}{3}\qquad\forall\quad x\in[-1,1]$$

إذن $g(x)$ لها نقطة ثابتة وحيدة ولإيجادها نتبع التالي :

$$g(p)=p\qquad\therefore p^2-3p-1=0$$

$$p=\frac{3-\sqrt{13}}{2}\in[-1,1]$$

ب) الدالة $g(x)=3^{-x}$ في الفترة $[0,1]$

$$g'(x)=-3^{-x}\ln 3\qquad\therefore |g'(0)|=|-\ln 3|>1$$

$\therefore g(p)$ يمكن أن يكون لها نقطة ثابتة ولكن غير وحيدة. عند وجود نقطة ثابتة لأي دالـة $g(p)=p$ فإننـا نختـار تقريبـاً ابتـدائياً p_0 وتكـون المتتابعـة $\{p_n\}_{n=o}^{\infty}$ مـن العلاقة : $p_n=g(p_{n-1})$ حيث $n\ge 1$. إذا كانت المتتابعة تقاربية إلى p و $g(x)$ دالة متصلة فإن :

$$p=\lim_{n\to\infty}g(p_{n-1})=g(p)$$

وبذلك يكون قد وجد حل للمعادلة $x=g(x)$.

مثال (٢,٧)

المعادلة $x^3+4x^2-10=0$ لها جذر وحيد في الفـترة[1,2]. ويوجـد أكثر مـن اختيار لوضع المعادلة على الصورة $x=g(x)$ كما يلي :

أ) $$x = g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$$

ب) $$x = g_2(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}$$

ج) $$x = g_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$$

د) $$x = g_4(x) = \sqrt{\frac{10}{4+x}}$$

هـ) $$x = g_5(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$$

باختيار $p_0 = 1.5$ نجد أنه كما بالجدول رقم (٢,٢) أن (أ) و(ب) تكونان متتابعتين تباعديتين ولكن كلاً من (ج) و (د) و (هـ) تكون متتابعة تقاربية إلى الحل الصحيح ولدراسة السبب في اختلاف التقارب والتباعد نجده في نظرية (٢,٤).

الجدول رقم (٢,٢).

n	أ	ب	ج	د	هـ
0	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
1	-0.875	0.8165	1.286953768	1.348399725	1.373333333
2	6.732	2.9969	1.402540804	1.367376372	1.365262015
3	-4.697	$\sqrt{-8.65}$	1.345458374	1.364957015	1.365230014
4	1.03×10^8	?	1.375170253	1.365264748	1.365230013

البرنامج رقم (٢.٢)

```
C**************************************************************C
FIXED-POINT
C**************************************************************C
TO FIND A SOLUTION TO P=G(P) GIVEN AN
C    INITIAL APPROXIMATION PO:
C    INPUT:  INITIAL APPROXIMATION PO; TOLERANCE TOL;
C            MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS N0.
C    OUTPUT:  APPROXIMATE SOLUTION P OR MESSAGE THAT
C            THE METHOD FAILS.
     REAL TOL,P0,P
     INTEGER I,N0,FLAG
     CHARACTER NAME1*30,AA*1
     INTEGER OUP
     LOGICAL OK
C   DEFINE FUNCTION G
     G(X)=SQRT(10/(4+X))
     OPEN(UNIT=5,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
     OPEN(UNIT=6,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
     WRITE(6,*) 'This is the Fixed-Point Method.'
     WRITE(6,*) 'Has the function G been created in the program? '
     WRITE(6,*) 'Enter Y or N '
     WRITE(6,*) ' '
     READ(5,*)  AA
     IF(( AA .EQ. 'Y' ) .OR. ( AA .EQ. 'y' )) THEN
     WRITE(6,*) 'Input initial approximation '
     WRITE(6,*) ' '
     READ(5,*) P0
     OK = .FALSE.
12   IF (OK) GOTO 13
     WRITE(6,*) 'Input tolerance '
     WRITE(6,*) ' '
     READ(5,*) TOL
     IF (TOL.LE.0.0) THEN
     WRITE(6,*) 'Tolerance must be positive '
     WRITE(6,*) ' '
     ELSE
     OK = .TRUE.
     ENDIF
     GOTO 12
13   OK = .FALSE.
14   IF (OK) GOTO 15
     WRITE(6,*) 'Input maximum number of iterations '
```

```
      WRITE(6,*) '- no decimal point '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) N0
      IF ( N0 .LE. 0 ) THEN
      WRITE(6,*) 'Must be positive integer '
      WRITE(6,*) ' '
      ELSE
      OK = .TRUE.
      ENDIF
      GOTO 14
15    CONTINUE
      ELSE
      WRITE(6,*) 'The program will end so that the function F '
      WRITE(6,*) 'can be created '
      OK = .FALSE.
      ENDIF
      IF (.NOT.OK) GOTO 040
      WRITE(6,*) 'Select output destination: '
      WRITE(6,*) '1. Screen '
      WRITE(6,*) '2. Text file '
      WRITE(6,*) 'Enter 1 or 2 '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) FLAG
      IF ( FLAG .EQ. 2 ) THEN
      WRITE(6,*) 'Input the file name in the form - '
      WRITE(6,*) 'drive:name.ext'
      WRITE(6,*) 'with the name contained within quotes'
      WRITE(6,*) 'as example:   "A:OUTPUT.DTA" '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) NAME1
      OUP = 3
      OPEN(UNIT=OUP,FILE=NAME1,STATUS='NEW')
      ELSE
      OUP = 6
      ENDIF
      WRITE(6,*) 'Select amount of output '
      WRITE(6,*) '1. Answer only '
      WRITE(6,*) '2. All intermediate approximations '
      WRITE(6,*) 'Enter 1 or 2 '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) FLAG
      WRITE(OUP,*) 'FIXED-POINT METHOD'
      IF (FLAG.EQ.2) THEN
      WRITE(OUP,004)
```

```
004 FORMAT(3X,'I',16X,'P')
    ENDIF
C   STEP 1
    I=1
C   STEP 2
010 IF ( I .GT. N0 ) GOTO 020
C   STEP 3
C   COMPUTE P(I)
    P=G(P0)
    IF (FLAG.EQ.2) THEN
    WRITE(OUP,006) I,P
006 FORMAT(1X,I3,2X,E15.8)
    ENDIF
C    STEP 4
     IF( ABS(P-P0) .LT. TOL ) THEN
C    PROCEDURE COMPLETED SUCCESSFULLY
     WRITE(OUP,2) P, I, TOL
     GOTO 040
     END IF
C    STEP 5
     I=I+1
C    STEP 6
C    UPDATE P0
     P0=P
     GOTO 010
020  CONTINUE
C    STEP 7
C    PROCEDURE COMPLETED UNSUCCESSFULLY
     IF(OUP.NE.6) WRITE(6,3) N0,P,TOL
     WRITE(OUP,3) N0,P,TOL
040  CLOSE(UNIT=5)
     CLOSE(UNIT=OUP)
     IF(OUP.NE.6) CLOSE(UNIT=6)
     STOP
2    FORMAT(1X,'APPROXIMATE SOLUTION IS',1X,E15.8,1X
    *,'AFTER',1X,I2,1X,'ITERATIONS,',/,' WITH TOLERANCE',1X,E15.8)
3    FORMAT(1X,'ITERATION NUMBER',1X,I3,1X,'GAVE
    * APPROXIMATION',
    */,E15.8,1X,'NOT WITHIN TOLERANCE',1X,E15.8)
     END
```

ونتائج هذا البرنامج هي كما يلي :

FIXED-POINT METHOD

I	P
1	.13484000E+01
2	.13673760E+01
3	.13649570E+01
4	.13652650E+01
5	.13652260E+01
6	.13652310E+01

APPROXIMATE SOLUTION IS .13652310E+01 AFTER 6 ITERATIONS,
WITH TOLERANCE .10000000E-04

نظرية (٢،٤) نظرية النقطة الثابتة Fixed point theorem

بفرض أن $g(x) \in C[a,b]$ حيث إن $g(x) \in [a,b]$ لكل $x \in [a,b]$ ، $|g'(x)| \le k < 1$ فإنه لأي نقطة $p_0 \in [a,b]$ والمتتابعة المعرفة بالعلاقة $p_n = g(p_{n-1}), n \ge 1$ تكون تقاربية إلى نقطة ثابتة وحيدة في الفترة [a, b].

البرهان:

من شرط النظرية فإن $g(x)$ لها نقطة ثابتة وحيدة في الفترة [a, b] ولدراسة التقارب نقوم بإجراء التالي:

$$|p_n - p| = |g(p_{n-1}) - g(p)|$$

من نظرية القيمة المتوسطة
$$= g'(\xi)|p_{n-1} - p|$$

$$\le k\,|p_{n-1} - p|$$

$$\therefore |p_n - p| \le k^n\,|p_0 - p|$$

وحيث إن $k < 1$ وبأخذ نهاية الطرفين:

$$\lim_{n\to\infty}|p_n - p| \le 0$$

$\therefore \{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب إلى p في حالة $n \to \infty$.

وهذا هو المطلوب.

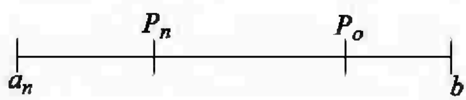
نتيجة (٢,١)

إذا كانت $g(x)$ تحقق شروط النظرية (٢,٤) فإن :

$$|p_n - p| \le k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\}$$

وأيضاً
$$|p_n - p| \le \frac{k^n}{1-k}|p_1 - p_0|, \quad n \ge 1$$

البرهان:



من النظرية (٢,٤) نجد أن :

$$|p_n - p| \le k^n |p_1 - p_0|$$
$$\le k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\}$$

حيث إن $p \in [a,b]$. وهو المطلوب الأول .

في حالة $n \ge 1$ فإن :

$$|p_{n+1} - p| = |g(p_n) - g(p_{n-1})| \le k|p_n - p_{n-1}|$$

.

.

$$\le k^n |p_1 - p_0|$$

وفي حالة $m > n \ge 1$ فإن:

$$\begin{aligned}|p_m - p_n| &= |p_m - p_{m-1} + p_{m-1} - p_{m-2} + \cdots + p_{n+1} - p_n| \\ &\le |p_m - p_{m-1}| + |p_{m-1} - p_{m-2}| + \cdots + |p_{n+1} - p_n| \\ &\le k^n |p_1 - p_0| \{1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-n-1}\}\end{aligned}$$

$$\because \lim_{m\to\infty} P_m = p$$

إذن:

$$|p - p_n| \le k^n |p_1 - p_0| \{1 + k + k^2 + \cdots\}$$

حيث إن $1+k+k^2+....$ متتابعة هندسية ومجموعها إلى مالانهاية:

$$1+k+k^2+.... = \frac{1}{1-k},\ k<1$$

$$\therefore |p_n - p| \le \frac{k^n}{1-k} |p_1 - p_0|$$

وهذا هو المطلوب الثاني.

مثال (٢,٨)

باستخدام طريقة النقطة الثابتة أوجد الجذر الأصغر للمعادلة $x^3 - 7x + 1 = 0$ وذلك لثلاثة أرقام عشرية والجذر الأكبر لرقمين عشريين وحينئذ أوجد الجذر الثالث.

الحل

$$f(x) = x^3 - 7x + 1$$

$$f(0) = 1,\quad f(1) = -5,\quad f(2) = -5,\quad f(3) = 7$$

ولذلك يكون للمعادلة جذر موجب أصغر في الفترة $[0,1]$ والآخر في الفترة $[2,3]$.

$$\therefore x = \frac{x^3+1}{7} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{7}(x^3+1)$$

$$\therefore g'(x) = \frac{3x^3}{7} \Rightarrow |g'(x)| < 1, \quad \forall x \in [0,1]$$

إذن :
$$p_{n+1} = \frac{p_n^3+1}{7}, \quad p_0 = 0$$

$$p_1 = 0.143, \; p_2 = 0.1433, \; .....$$

إذن الجذر الموجب الأصغر يساوي $p = 0.143$ ولإيجاد الجذر الثاني :

$$x = \sqrt[3]{7x-1}$$

$$\therefore g(x) = \sqrt[3]{7x-1}$$

$$\therefore |g'(x)| < 1, \; \forall \; x \in [2,3]$$

$$p_{n+1} = \sqrt[3]{7P_n - 1}, \qquad p_0 = 2$$

$$\therefore p_1 = 2.3515, \; \mathrm{p}_2 = 2.4911, \; \mathrm{p}_3 = 2.5426$$

$$p_4 = 2.5611, \; \mathrm{p}_5 = 2.5675, \; \mathrm{p}_6 = 2.5699 \approx 2.57$$

إذن الجذر الموجب الأكبر يساوي تقريباً 2.57. ومجموع جذور معادلة لكثيرة الحدود من الدرجة الثالثة = - معامل x^2 إذن الجذر الثالث يساوي -2.713 ، هو المطلوب.

ملحوظة:

١- من الشرط $|g'(x)| < 1$ في الحالة الأولى يفيد أن :

$$\left|\frac{3}{7}x^2\right| < 1 \Rightarrow |x^2| < \frac{7}{3} \Rightarrow |x| < 1.528$$

إذن
$$-1.528 < x < 1.528$$

وهذا الشرط محقق حيث إن $0 \le x \le 1$.

٢- كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة على الصورة التالية :

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

ولها الجذور α, β, γ فإن :

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = 0$$

$$\therefore x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\beta\gamma + \alpha\beta + \alpha\gamma)x - \alpha\beta\gamma = 0$$

إذن :

$$\alpha + \beta + \gamma = -a$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b$$

$$\alpha\beta\gamma = -c$$

مثال (٢,٩)

باستخدام طريقة النقطة الثابتة أوجد الجذر الموجب للمعادلة $\cos x - 3x = 0$ إلى أربعة أرقام عشرية.

الحل

$$f(0) = 1,\ f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{3\pi}{2}$$

إذن الدالة لها جذر في الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$ ونجد أن :

$$\because x = \frac{\cos x}{3} \qquad \therefore g(x) = \frac{\cos x}{3}$$

$$\therefore g'(x) = -\frac{\sin x}{3} \qquad \therefore |g'(x)| < 1$$

لكل $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. وبوضع $p_0 = 0$ نجد أن :

$$p_1 = 0.333,\ p_2 = 0.31498,\ ...,\ p_5 = 0.31675$$

ولكن إذا أخذنا $x = \cos^{-1}(3x)$ أي أن $g(x) = \cos^{-1}(3x)$

$$\therefore g'(x) = \frac{-3}{\sqrt{1-9x^2}}, \therefore |g'(x)| > 1$$

ولذلك فإن هذه الصيغة غير مناسبة.

تمارين (٢،٢)

١- إذا كانت $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$ و

$$g_1(x) = \sqrt[4]{3 + x - 2x^2},\ g_2(x) = \sqrt{\frac{x+3-x^4}{2}},\ g_3(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x^2+2}}$$

$$g_4(x) = \frac{3x^4 + 2x^2 + 3}{4x^4 + 4x - 1},\ \ P_0 = 1,\ \ P_{n+1} = g(P_n),\ \ n = 0,1,2,3$$

أوجد أربعة تكرارات في كل حالة وأي منها تعتقد أن يعطي أحسن تقريب.

٢- باستخدام طريقة النقطة الثابتة عين حلاً ذا دقة 10^{-2} للمعادلة $x^4 - 3x^2 - 3 = 0$ في الفترة $[1, 2]$ و $p_0 = 1$.

٣- برهن على أن الدالة $g(x) = \pi + \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$ لها نقطة ثابتة وحيدة في الفترة $[0, 2\pi]$ وباستخدام طريقة النقطة الثابتة أوجد تقريباً للنقطة الثابتة بدقة 10^{-2} وحدد عدد الخطوات اللازمة لإيجاد حل ذي دقة لا تتجاوز 10^{-2}.

٤- باستخدام طريقة النقطة الثابتة عين حلاً ذا دقة 10^{-2} للمعادلة $2\sin \pi x + x = 0$ في الفترة $[1, 2]$ و $p_0 = 1$.

(٢،٤) طريقة نيوتن- رافسون

Newton-Raphson Method

ما زلنا نحاول إيجاد حلول تقريبية للمعادلة $f(x) = 0$ وبفرض أن $f \in C^2[a,b]$ و $\bar{x}$ هو حل تقريبي إلى الحل الصحيح p حيث إن $f'(\bar{x}) \neq 0$ ، $|\bar{x} - p|$ تكون صغيرة جداً. وبإيجاد مفكوك تايلور للدالة $f(x)$ حول $\bar{x}$ نجد أن:

$$f(x)=f(\bar{x})+(x-\bar{x})f'(\bar{x})+\frac{(x-\bar{x})^2}{2}f''(\xi(x))$$

وحيث إن p هو الحل الصحيح نجد أن:

$$0=f(\bar{x})+(p-\bar{x})f'(\bar{x})+\frac{(p-\bar{x})^2}{2}f''(\xi(p))$$

وبفرض أن $|p-\bar{x}|$ كمية صغيرة فيمكن إهمال $|p-\bar{x}|^2$ إذن:

$$p\approx\bar{x}-\frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$$

ولذلك فإن طريقة نيوتن- رافسون تجد متتابعة $\{p_n\}$ بالصورة:

$$p_n=p_{n-1}-\frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})},\qquad n\geq 1$$

وتكون متتابعة تقاربية إلى الحل الصحيح. ومن الملاحظات المهمة أن طريقة نيوتن-رافسون تفشل في حالة $f'(\bar{x})=0$ وظهرت معالجات حديثة لهذه الحالة وإحدى هذه المعالجات تأخذ الصورة

$$p_n=p_{n-1}-\frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})+\alpha\, f(p_{n-1})},\quad n\geq 1$$

حيث إن α ثابت غير صفري.

مثال (٢,١٠)

إذا كانت $f(x)=\cos x-x$ معادلة لها جذر في الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$ وباستخدام طريقة نيوتن-رافسون نجد أن:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{\cos p_{n-1} - p_{n-1}}{-\sin p_{n-1} - 1}, \qquad n \geq 1$$

وباختيار $p_0 = \frac{\pi}{4}$ نجد أن:

$$\begin{aligned} p_0 &= 0.7853981635, \\ p_1 &= 0.7395361337, \\ p_2 &= 0.7390851781, \\ p_3 &= 0.7390851332, \\ p_4 &= 0.7390851332, \ldots \end{aligned}$$

البرنامج رقم (٢،٣)

```
C***********************************************************
C            NEWTON-RAPHSON
C***********************************************************
C    TO FIND A SOLUTION TO F(X)=0 GIVEN AN
C    INITIAL APPROXIMATION PO:
C    INPUT:   INITIAL APPROXIMATION PO;  TOLERANCE TOL;
C    MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS N0.
C    OUTPUT:  APPROXIMATE SOLUTION P OR A MESSAGE
C    THAT THE ALGORITHM FAILS.
     REAL TOL,P0,D,F0,FP0
     INTEGER I,N0,FLAG,OUP
     CHARACTER NAME1*30,AA*1
     LOGICAL OK
C   DEFINE FUNCTIONS F AND F' (DENOTED FP)
     F(X)=COS(X)-X
     FP(X)=-SIN(X)-1
     OPEN(UNIT=5,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
     OPEN(UNIT=6,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
     WRITE(6,*) 'This is Newtons Method.'
     WRITE(6,*) 'Have the functions F and F'' been'
     WRITE(6,*) 'created in the program? '
     WRITE(6,*) 'Enter Y or N '
     WRITE(6,*) ' '
     READ(5,*)  AA
     IF(( AA .EQ. 'Y' ) .OR. ( AA .EQ. 'y' )) THEN
```

```
      WRITE(6,*) 'Input initial approximation '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) P0
      OK = .FALSE.
12    IF (OK) GOTO 13
      WRITE(6,*) 'Input tolerance '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) TOL
      IF (TOL.LE.0.0) THEN
      WRITE(6,*) 'Tolerance must be positive '
      WRITE(6,*) ' '
      ELSE
      OK = .TRUE.
      ENDIF
      GOTO 12
13    OK = .FALSE.
14    IF (OK) GOTO 15
      WRITE(6,*) 'Input maximum number of iterations '
      WRITE(6,*) '- no decimal point '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) N0
      IF ( N0 .LE. 0 ) THEN
      WRITE(6,*) 'Must be positive integer '
      WRITE(6,*) ' '
      ELSE
      OK = .TRUE.
      ENDIF
      GOTO 14
15    CONTINUE
      ELSE
      WRITE(6,*) 'The program will end so that the functions F '
      WRITE(6,*) 'and F" can be created '
      OK = .FALSE.
      ENDIF
      IF (.NOT.OK) GOTO 040
      WRITE(6,*) 'Select output destination: '
      WRITE(6,*) '1. Screen '
      WRITE(6,*) '2. Text file '
      WRITE(6,*) 'Enter 1 or 2 '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) FLAG
      IF ( FLAG .EQ. 2 ) THEN
      WRITE(6,*) 'Input the file name in the form - '
      WRITE(6,*) 'drive:name.ext'
```

```
      WRITE(6,*) 'with the name contained within quotes'
      WRITE(6,*) 'as example:   "A:OUTPUT.DTA" '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) NAME1
      OUP = 3
      OPEN(UNIT=OUP,FILE=NAME1,STATUS='NEW')
      ELSE
      OUP = 6
      ENDIF
      WRITE(6,*) 'Select amount of output '
      WRITE(6,*) '1. Answer only '
      WRITE(6,*) '2. All intermediate approximations '
      WRITE(6,*) 'Enter 1 or 2 '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) FLAG
      WRITE(OUP,*) 'NEWTONS METHOD'
      IF (FLAG.EQ.2) THEN
      WRITE(OUP,004)
004   FORMAT(3X,'I',16X,'P',13X,'F(P)')
      ENDIF
C     STEP 1
      I=1
      F0=F(P0)
C     STEP 2
010   IF ( I .GT. N0 ) GOTO 020
C     STEP 3
C     COMPUTE P(I)
      FP0=FP(P0)
      D=F0/FP0
C     STEP 6
      P0=P0-D
      F0=F(P0)
      IF (FLAG.EQ.2) THEN
      WRITE(OUP,005) I,P0,F0
005   FORMAT(1X,I3,2X,E15.8,2X,E15.8)
      ENDIF
C     STEP 4
      IF( ABS(D) .LT. TOL ) THEN
C     PROCEDURE COMPLETED SUCCESSFULLY
      WRITE(6,2) P0,I,TOL
      GOTO 040
      END IF
C     STEP 5
      I=I+1
```

```
    GOTO 010
020  CONTINUE
C    STEP 7
C    PROCEDURE COMPLETED UNSUCCESSFULLY
     IF(OUP.NE.6) WRITE(6,3) N0,P0,TOL
     WRITE(OUP,3) N0,P0,TOL
040  CLOSE(UNIT=5)
     CLOSE(UNIT=OUP)
     IF(OUP.NE.6) CLOSE(UNIT=6)
     STOP
2    FORMAT(1X,'APPROXIMATE SOLUTION IS',1X,E15.8,1X,'AFTER',
    *1X,I2,1X,'ITERATIONS,',/,' WITH TOLERANCE',1X,E15.8)
3    FORMAT(1X,'ITERATION NUMBER',1X,I3,1X,'GAVE  APPROXIMATION',
    */,E15.8,1X,'NOT WITHIN TOLERANCE',1X,E15.8)
     END
```

نظرية (٢,٥) شرط التقارب فى طريقة نيوتن-رافسون

طريقة نيوتن-رافسون تتقارب بشرط $|f(x)f''(x)| < (f'(x))^2$.

البرهان:

طريقة نيوتن-رافسون يمكن اعتبارها صورة من صور النقطة الثابتة حيث إن: $p_{n+1} = g(p_n)$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

وشرط تقارب النقطة الثابتة هو $|g'(x)| < 1$

إذن:
$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

إذن: $|f(x)f''(x)| < (f'(x))^2$ وهو المطلوب.

تعريف

خطأ الاقتطاع من الرتبة k في طريقة التقريب المتتالي :

يقال أن p من الرتبة k إذا تحقق :

$$g'(p) = g''(p) = \cdots = g^{(k-1)}(p) = 0, \qquad g^{(k)}(p) \neq 0$$

وحيث إن :

$$p_{n+1} = g(p_n), \quad n \geq 0 \ , \ \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

$$p = g(p) \ , \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

ومن المعادلتين (١) و (٢) نحصل على المعادلة التالية :

$$p_{n+1} - p = g(p_n) - g(p)$$

$$= g(p) + (p_n - p)g'(p) + \frac{1}{2}(p_n - p)^2 g''(p) + \cdots - g(p)$$

$$\therefore e_{n+1} = e_n\, g'(p) + \frac{1}{2}\, e_n^2\, g''(p) + \cdots + \frac{1}{k!}\, e_n^k\, g^k(p) + \cdots$$

إذن :

$$e_{n+1} \cong \frac{1}{k!} e_n^k g^{(k)}(p)$$

أنواع التقارب Types of convergence

١- يقال أن التقارب من الرتبة الأولى إذا كان :

$$g'(p) \neq 0, \quad e_{n+1} \cong g'(p)\, e_n$$

٢- والتقارب من الرتبة الثانية إذا كان :

$$g'(p) = 0, \quad g''(p) \neq 0 \quad e_{n+1} \cong \frac{1}{2}\, g''(p)\, e_n^2$$

٣- والتقارب من الرتبة الثالثة إذا كان :

$$g'(p) = 0, \quad g''(p) = 0, \quad g'''(p) \neq 0, \quad e_{n+1} \cong \frac{1}{6} g'''(p) e_n^3$$

نظرية (٢,٦) رتبة التقارب فى طريقة نيوتن-رافسون

طريقة نيوتن-رافسون تقاربية من الرتبة الثانية.

البرهان:

في حالة نيوتن-رافسون $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

إذن:

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$\because f(p) = 0 \therefore g'(p) = \frac{f(p)f''(p)}{(f'(p))^2} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$g''(x) = \frac{(f'(x))^2[f(x)f'''(x) + f'(x)f''(x)] - f(x)f''(x)[2f'(x)f''(x)]}{(f'(x))^4}$$

$$\therefore g''(p) \neq 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

من (١) و (٢) نجد أن طريقة نيوتن-رافسون تقاربية من الرتبة الثانية وتكون كما يلي:

$$\therefore e_{n+1} \cong \frac{1}{2}\frac{f''(p)}{f'(p)} e_n^2$$

وهو المطلوب.

مثال (٢,١١)

استخدم طريقة نيوتن-رافسون في إيجاد الجذر الموجب لثلاثة أرقام عشرية صحيحة للمعادلة $f(x) = x - 2\sin x$.

الحل

حيث إن $f(1)f(2) < 1$ وبفرض أن $p_0 = 2$ ، $p_{n+1} = p_n - \frac{p_n - 2\sin p_n}{1 - 2\cos p_n}, n \geq 0$

نجد أن :

$$\begin{aligned} p_1 &= 1.901 \\ p_2 &= 1.896 \\ p_3 &= 1.896, \\ &\vdots \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

مثال (٢,١٢)

استخدم طريقة نيوتن-رافسون لإيجاد جذر المعادلة $f(x)=x^3+x-1$ إلى أربعة أرقام عشرية.

الحل

حيث إن $f(0)\,f(1) < 0$ إذن لها جذر في الفترة $[0,1]$

$$f(x)=x^3+x-1, \quad f'(x)=3x^2+1$$

وصورة نيوتن- رافسون تكون كالتالي :

$$p_{n+1}=p_n-\frac{p_n^3+p_n-1}{3p_n^3+1}, \quad n\ge 0, \quad p_0=1$$

نجد أن :

$$\begin{aligned} p_0 &= 1.0, \\ p_1 &= 0.7500, \\ p_2 &= 0.68604 \\ p_3 &= 0.68233 \\ p_4 &= 0.68232, \ldots. \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

مثال (٢,١٣)

حل المعادلة $x^3 + 2e^x - 120 = 0$ بطريقة نيوتن-رافسون، وأوقف الدورات عندما تكون $|f(x_i)| < 10^{-4}$ $p_0 = 3.5,$

الحل

$$p_{n+1} = p_n - \frac{p_n^3 + 2e^{p_n} - 120}{3p_n^2 + 2e^{p_n}}, \ p_0 = 3.5$$

نجد أن:

$$\begin{aligned} &p_1 = 3.6057, \\ &p_2 = 3.6013237, \\ &p_3 = 3.6013155, \qquad f(p_3) = -0.000013 \end{aligned}$$

إذن $|f(p_3)| < 10^{-4}$ وبناءً على ذلك نتوقف.

مثال (٢,١٤)

أوجد الجذر التربيعي $\sqrt{a}$ للعدد $a > 0$ بطريقة نيوتن-رافسون، ثم أوجد $\sqrt{2}$.

الحل

نفرض أن $f(x) = x^2 - a$ ولذلك تكون صورة نيوتن- رافسون كالتالي:

$$p_{n+1} = p_n - \frac{p_n^2 - a}{2p_n}$$

وبفرض $a = 2, p_0 = 1$ فإننا نحصل على القيم التالية:

$$\begin{aligned} &p_1 = 1.5, \\ &p_2 = 1.4166667, \\ &p_3 = 1.4142157, \\ &p_4 = 1.4142136, \ldots\ldots \end{aligned}$$

ونلاحظ أن $|p_4 - p|_3 \le 10^{-5}$ وهي كمية صغيرة.

مثال (٢,١٥)

أوجد القيمة التقريبية للمعكوس الضربي للعدد $a \neq 0$ ، ثم أوجد $\frac{1}{7}$.

الحل

نفرض أن $f(x) = a - \frac{1}{x}$ وصورة نيوتن- رافسون تكون كما يلي:

$$p_{n+1} = p_n - \left(\frac{a - \frac{1}{p_n}}{\frac{1}{p_n^2}} \right), \quad n \ge 0$$

ويفرض أن $a = 7$ ، $p_0 = 0.2$ فإننا نجد أن:

$$\begin{aligned} p_1 &= 0.12, \\ p_2 &= 0.1392, \\ p_3 &= 0.1427635, \\ p_4 &= 0.142857, \\ p_5 &= 0.14285714,.... \end{aligned}$$

إذن $\frac{1}{7} \cong 0.14285714$.

(٢,٥) طريقة نيوتن لإيجاد الجذور المركبة

إذا كانت الدالة $f(z) = 0$ لها جذر مركب $z \in \mathbb{C}$ فإن $z = x + i\,y$,

$i = \sqrt{-1}$, $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ وطريقة نيوتن-رافسون تكون:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, \quad n \ge 0$$

$$f'(z)=\frac{df}{dz}=u_x+iv_x$$

ومن نظرية كوش-ريمان نجد أن :

$$u_x=v_y, \qquad u_y=-v_x$$

إذن :
$$f'(z)=u_x-iu_y, \quad \frac{f(z)}{f'(z)}=\frac{u+iv}{u_x-iu_y}$$

ونحصل على التالي :

$$x_{n+1}=x_n-\left(\frac{uu_x-vu_y}{u_x^2+u_y^2}\right)_n,$$

$$y_{n+1}=y_n-\left(\frac{vu_x+uu_y}{u_x^2+u_y^2}\right)_n$$

وحينئذ تكون : $z_{n+1}=x_{n+1}+iy_{n+1}$.

مثال (٢,١٦)

أوجد حل المعادلة $z^2+1=0$ بطريقة نيوتن رافسون.

الحل

بفرض $f(z)=z^2+1$ إذن : $u(x,y)=x^2-y^2+1,\ v(x,y)=2xy$

$$u_x=2x,\ u_y=-2y,\ v_x=2y,\ v_y=2x$$

ومن الصور السابقة نجد أن :

x_n	0.1	-0.95	-0.385588	-0.0797389	0.000576715	-1.85697×10^{-6}
y_n	0.2	2.1	1.24765	0.989638	0.996795	1.0

إذن : $$z_5 = -1.85697\times 10^{-6} + i$$

تمارين (٢,٣)

١- استعمل طريقة نيوتن-رافسون للحصول على حل تقريبي للمعادلة $x = \cos x$ مبتدءاً بالقيمة $p_0 = 1$ حتى $|f(p_n)| < 10^{-2}$.

٢- وضح أن طريقة نيوتن-رافسون لحل المعادلة $x^3 - 3 = 0$ تؤدي إلى الحل الصحيح في حال $p_0 = 2$ في الفترة $[\sqrt[3]{2}, 2]$.

٣- استعمل طريقة نيوتن-رافسون لحل المعادلة $x^3 + x\sin x = 2.85$ بأخذ $p_0 = 1$ وتوقف بعد ثلاث دورات.

٤- بين أن للدالة $g(x) = x^2 - \dfrac{4}{x}$ نقطة ثابتة عند $x = 2$. ثم وضح أن $x = 2$ حلاً للمعادلة $x^3 - x^2 - 4 = 0$.

وبين أن طريقة النقطة الثابتة لا تؤدي إلى الحل المطلوب لأي قيمة ابتدائية P_0 للدالة $g(x) = x^2 - \dfrac{4}{x}$. ثم وضح أيضاً أن طريقة نيوتن-رافسون لحل المعادلة $f(x) = 0$ تؤدي إلى التالي :

$$g(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 4}{3x^2 - 2x}.$$