الفصل الرابع

الاستكمال

INTERPOLATION

تعتبر كثيرات الحدود هي المصدر الرئيس للتقريب في كل مجالات التحليل العددي تقريباً. وتستخدم كثيرات الحدود في حل المعادلات وفي تقريب دوال التكامل والتفاضل، ودوال حلول المعادلات التكاملية والتفاضلية، ...إلخ. يهتم هذا الفصل بوصف بعض الطرق العددية المستخدمة في نظرية التقريب والتي تعتمد على استبدال الدوال المعقدة بدوال بسيطة وهي كثيرات الحدود.

(٤,١) توافق المنحنيات

Fitting of Curves

في كثير من الأحيان نجد أمامنا عدة قراءات معينة، على سبيل المثال:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$$

وللحصول على أفضل منحنى يمر بتلك النقاط بشرط أن يكون مجموع مربعات الأخطاء في القيم y_i أقل ما يمكن فإننا نستخدم طريقة التقريب بالمربعات الصغرى least square approximation.

بفرض أن التقريب في الصورة التالية:

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$$

ويكون المطلوب في هذه الحالة هو تعيين المعاملات $a_0, a_1, \cdots, a_m$ بشرط أن يكون منحنى y(x) بين النقاط (x_i, y_i) $i = 0,1,\cdots,n,$ وتكون على النحو التالي :

$$S = \sum_{i=0}^{n} [y(x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=0}^{n} [\sum_{j=0}^{m} a_j x^j - y_i]^2$$

أصغر ما يمكن ولذلك فإن :

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 2\sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{m} a_j x^j - y_i \right] x^j = 0, \qquad j = 0,1,\cdots,m$$

ومنها نحصل على المعادلات القياسية لطريقة المربعات الصغرى standard least square equations كما هي موضحة في الصورة :

$$(1+n)a_0 + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + \cdots + a_m \sum_{i=0}^{n} x_i^m = \sum_{i=0}^{n} y_i,$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^3 + \cdots + a_m \sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1} = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i,$$

.

.

.

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i^m + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1} + \cdots\cdots + a_m \sum_{i=0}^{n} x_i^{2m} = \sum_{i=0}^{n} x_i^m y_i,$$

وبحل المعادلات السابقة نحصل على قيم المعاملات $a_0, a_1, \cdots, a_m$.

مثال (٤،١)

أوجد معادلة أفضل خط مستقيم يلائم البيانات التالية :

x	1	3	4	6	7
y	-2.1	-0.9	-0.6	0.6	0.9

الحل

نفرض معادلة الخط المستقيم على الصورة التالية :

$$y = a_0 + a_1 x$$

إذن :

$$\sum y = 5a_0 + a_1 \sum x$$
$$\sum xy = a_0 \sum x + a_1 \sum x^2$$

حيث إن : $\sum x = 21, \quad \sum y = -2.1, \; \sum x^2 = 111, \; \sum xy = 2.7$

وبحل المعادلتين نحصل على التالي :

$$a_0 = -2.542, \qquad a_1 = 0.5053$$

وتصبح معادلة الخط المستقيم في الصورة التالية :

$$y = -25.42 + 0.5053x$$

مثال (٤,٢)

أوجد معادلة أفضل منحنى من الدرجة الثانية يلائم البيانات الموجودة في الجدول التالي :

x	-2	-1	0	1	2
y	-5.1	2.9	3	3.1	3.9

الحل

نفرض معادلة الدرجة الثانية كما هو موضح في الصورة التالية :

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

إذن :

$$\sum y = 5a_0 + a_1\sum x + a_2\sum x^2,$$
$$\sum xy = a_0\sum x + a_1\sum x^2 + a_3\sum x^3,$$
$$\sum x^2 y = a_0\sum x^2 + a_1\sum x^3 + a_2\sum x^4,$$

ونحصل على نظام من المعادلات الخطية بحل هذا النظام نجد أن :

$$y = 3.62 + 1.82x - 1.03x^2$$

حالات خاصة

١- في حالة $y = a + bx^2$ بوضع $X = x^2$ تتحول المعادلة إلى الصورة $y = a + bX$ ، ثم نحصل على a, b.

٢- في حالة $y = a + b\left(\frac{1}{x}\right)$ بوضع $X = \frac{1}{x}$ تتحول المعادلة إلى الصورة $y = a + bX$ ثم نحصل على a, b.

٣- في حالة $y = \frac{1}{a + bx}$ بوضع $Y = \frac{1}{y}$ تتحول المعادلة إلى الصورة $Y = a + bx$.

٤- في حالة $y = ax^b$ نقوم بأخذ لوغاريتم الطرفين فنحصل على $\ln y = \ln a + b\ln x$. وبوضع $Y = \ln y,\ X = \ln x$ تتحول المعادلة إلى الصورة $Y = A + bX$ ثم نجد A, b من $A = \ln a$.

٥- في حالة $y = ae^{bx}$ أذن $\ln y = \ln a + bx$ وبوضع $Y = \ln y,\ \ A = \ln a$ نحصل على التالي $Y = A + bx$ ثم نجد A, b.

تمارين (٤,١)

أوجد أفضل منحنى في الصور المرفقة للبيانات المعطاة.

١- $y = a + bx$

x	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
y	0.31	0.82	1.29	1.85	2.51	3.02

٢- $y = a + x^b$

x	1	2	4	6	10
y	2.6	5.6	13.3	21.2	40.1

٣- $y = a + bx^3$ ، $y = ae^{bx}$ و $y = ab^x$

x	2	4	6	7
y	160	640	2560	5170

٤- $y = a + \frac{b}{x}$

x	1	2	4	5	10
y	3	5	2	4	-6

(٤,٢) استكمال المنحنيات بكثيرات الحدود

Polynomial Interpolation

في طريقة توافق المنحنيات يتم إيجاد أفضل منحنى بشرط أن يكون مجموع مربعات الانحرافات أقل ما يمكن. ولكن إيجاد كثيرة حدود من درجة n على الأكثر

والتي تمر بجميع النقاط تسمى عملية استكمال كثيرة الحدود. وعن طريق كثيرة الحدود الناتجة يمكن الحصول على قيمة الدالة عند أي نقطة بينية.

(٤,٢,١) طريقة استكمال لاجرانج **Lagrange interpolation**

في حالة وجود الأزواج المرتبة $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$ نحتاج إلى إيجاد كثيرة الحدود $P_n(x)$ من الدرجة n على الأكثر والتي تمر بالنقاط المعطاة. أي أن:

$$P_n(x_i)=y_i \quad \forall\ i=0,1,\cdots,n$$

نبدأ بتعريف كثيرات الحدود:

$$\ell_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)},$$

$$\ell_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)},$$

$$\vdots$$

$$\ell_n(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})},$$

والمطلوب هنا هو إيجاد المعاملات $c_0,c_1,c_2,\cdots,c_n$ بحيث تمر بكثيرات الحدود التالية:

$$P_n(x)=c_0\,\ell_0(x)+c_1\,\ell_1(x)+\cdots+c_n\,\ell_n(x)$$

أي أن:

$$P_n(x_0)=y_0,\ P_n(x_1)=y_1,\cdots,\ P_n(x_n)=y_n$$

ومن خواص كثيرات الحدود $\ell_i(x),\ i=0,1,\ldots,n$

$$\ell_0(x_0)=1,\ \ell_0(x_1)=0,\cdots,\ell_0(x_n)=0,$$
$$\ell_1(x_0)=0,\ \ \ell_1(x_1)=1,\cdots,\ell_1(x_n)=0,$$
$$\vdots$$
$$\ell_n(x_0)=0,\quad \ell_n(x_1)=0,\cdots,\ell_n(x_n)=1$$

ومن ثم فإن:

$$c_i=y_i,\qquad i=0,1,2,\cdots,n$$

أي أن كثيرة الحدود التي تستكمل النقاط (x_i,y_i) تكون على الصورة التالية:

$$P_n(x)=\ell_0(x)y_0+\ell_1(x)y_1+\cdots+\ell_n(x)y_n$$

مثال (٤،٣)

أوجد كثيرة الحدود لاستكمال النقاط في الجدول التالي بطريقة لاجرانج:

x	0	1	3	4
y	-9	-8	18	55

الحل

يتم إيجاد $\ell_0(x),\ \ell_1(x),\ \ell_2(x),\ \ell_3(x)$ كما هو موضح على النحو التالي:

$$\ell_0(x) = -\frac{1}{12}(x-1)(x-3)(x-4),\ \ \ell_1(x) = \frac{1}{6}x(x-3)(x-4),$$
$$\ell_2(x) = -\frac{1}{6}x(x-1)(x-3),\ \ \ell_3(x) = \frac{1}{12}x(x-1)(x-3)$$

ومن ثم فإن:

$$P_3(x) = \ell_0(x)y_0 + \ell_1(x)y_1 + \ell_2(x)y_2 + \ell_3(x)y_3$$
$$P_3(x) = \frac{3}{4}(x-1)(x-3)(x-4) + \frac{4}{3}x(x-3)(x-4)$$
$$-3x(x-1)(x-4) + \frac{55}{12}x(x-1)(x-3)$$

وهو المطلوب.

نظرية (٤.١)

إذا كانت $x_0, x_1, \cdots, x_n$ أعداداً مختلفةً عددها $(n+1)$ وكانت $f(x)$ دالة قيمتها عند النقاط المعطاة موجودة فإنه يوجد كثيرة حدود وحيدة $P_n(x)$ من الدرجة n على الأكثر، حيث إن:

$$f(x_k) = P_n(x_k),\ k = 0,1,2,\cdots,n$$

وتعطى $P_n(x)$ بالعلاقة التالية:

$$P_n(x) = \ell_0(x)f(x_0) + \ell_1(x)f(x_1) + \cdots + \ell_n(x)f(x_n)$$

حيث إن:

$$\ell_i(x_j) = \frac{\prod\limits_{\substack{s=0 \\ s\neq i}}^{n}(x - x_s)}{\prod\limits_{\substack{s=0 \\ s\neq i}}^{n}(x_j - x_s)}, \qquad i = 0,1,2,\cdots,n$$

نظرية (٤،٢)

بفرض أن $x_0, x_1, \cdots, x_n$ أعداد مختلفة عددها $(n+1)$ في الفترة $[a,b]$ حيث إن $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$ ، فلكل $x \in [a,b]$ يوجد $\xi(x) \in (a,b)$ حيث إن:

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

و $P_n(x)$ هي كثيرة حدود لاجرانج.

البرهان:

في حالة $x = x_k$ حيث إن $k = 0,1,\cdots,n$ نجد أن $f(x_k) = P_n(x_k)$ وبذلك تتحقق المعادلة من تعريفات $\ell_0(x),\ \ell_1(x),\cdots,\ell_n(x)$. والخطأ في هذه الحالة يساوي صفراً، ولكن في حالة $x \neq x_k$ لأي من $k = 0,1,2,\cdots,n$ نعرف الدالة $g(t)$ بالصورة التالية:

$$g(t) = f(t) - P_n(t) - K(x)\frac{(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)}{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}$$

والمطلوب تحديد $K(x)$ وحيث إن:

$$f \in C^{n+1}[a,b], \quad P_n(x) \in C^{\infty}[a,b]$$

إذن:

$$g \in C^{n+1}[a,b]$$

مع ملاحظة أن:

$$g(x_k) = 0, \qquad k = 0,1,2,\cdots,n$$
$$g(x) = 0$$

أي أن $g(t)$ لها $(n+2)$ من الجذور وهي $x_0, x_1, \cdots, x_n, x$. ومن نظرية رول يوجد $\xi \in (a,b)$ حيث إن:

$$g^{(n+1)}(\xi) = 0$$

$$\therefore 0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - 0 - [K(x)] \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left[\prod_{i=0}^{n} \left(\frac{(t-x_i)}{(x-x_i)} \right) \right]_{t=\xi}$$

إذن:

$$K(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \left(\frac{1}{\prod_{i=0}^{n} (x-x_i)} \right)$$

إذن:

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x-x_i)$$

وهذا هو المطلوب.

ولعدم الحصول مسبقاً على شكل تحليلي للدوال $f(x)$, $f^{(n+1)}(x)$ وأيضاً قيمة ξ فلا يمكن معرفة الخطأ بالتحديد، ولتلافي تلك الصعوبة يمكننا إذا كانت تفاضلات الدالة $f(x)$ محدودة الحصول على حد أعلى للخطأ كما في النظرية التالية.

نظرية (٤،٣)

إذا كانت $\left|f^{(n+1)}(x)\right| < M$ ، $M > 0$ ولكل $x \in [a,b]$ ، فإن القيمة المطلقة للخطأ في طريقة لاجرانج تحدد بالصورة التالية:

$$|e(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^{n} (x-x_i) \right|$$

مثال (٤،٤)

من جدول اللوغاريتمات وجد أن $\ell n(3.2)=1.1632$, $\ell n(3.1)=1.1314$.

أوجد باستخدام صيغة لاجرانج لاستكمال $\ell n(3.16)$ ثم أوجد حدود الخطأ.

الحل

$$P_1(x)=\ell_0(x)y_0+\ell_1(x)y_1=1.1314\left(\frac{x-3.2}{-0.1}\right)+1.1632\left(\frac{x-3.1}{0.1}\right)$$

$$\therefore P_1(3.16)=1.15045$$

$$e(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2}f''(\xi)=\frac{(x-3.1)(x-3.2)}{2}f''(\xi)$$

حيث إن $f''(\xi)=\dfrac{-1}{\xi^2}$ ، $\xi\in[3.1,3.2]$ ولذلك فإن الخطأ هو :

$$\therefore\ e(x)=\frac{(x-3.1)(x-3.2)}{2}\left(\frac{-1}{\xi^2}\right)$$

$$\therefore\ |e(x)|\le\frac{|x-3.1||x-3.2|}{2}\frac{1}{\xi^2}=\frac{|x-3.1||x-3.2|}{2}\frac{1}{(3.1)^2}$$

وعند $x=3.16$:

$$\therefore\ |e(3.16)|\le\frac{|3.16-3.1||3.16-3.2|}{2}\frac{1}{(3.1)^2}=0.00012486992$$

وهو المطلوب.

تمارين (٤،٢)

١- من جدول اللوغاريتمات وجد أن: $\ell n(2) = 0.693147$, $\ell n(2.1) = 0.741937$, $\ell n(2.2) = 0.788457$. أوجد كثيرة الحدود من الدرجة الثانية بطريقة لاجرانج للاستكمال، ثم أوجد $\ell n(2.15)$ وقدر حدود الخطأ.

٢- أوجد الحد الأعلى للخطأ في استكمال $\sin(1.1)$ من $\sin(1)$ و $\sin(1.2)$ بكثيرة حدود من الدرجة الأولى.

٣- أوجد الحد الأقصى للخطأ في استكمال $\cos(0.55)$ من:

أ) $\cos(0.5)$ و $\cos(0.6)$.

ب) $\cos(0.5)$ و $\cos(0.6)$ و $\cos(0.7)$.

٤- أوجد كثيرة الحدود من الدرجة الثانية التي تلتقي مع الدالة $f(x) = \sin x$ عند $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$.

(٤،٢،٢) الفروق المقسمة Divided differences

في طريقة لاجرانج إذا كانت عدد النقاط المعطاة كبيرة، فإن العمليات الحسابية تكون معقدة جداً وعند إضافة نقطة جديدة للبيانات نحتاج إلى إعادة جميع الحسابات مرة أخرى، ولذا نلجأ إلى طريقة نيوتن حيث يتم فرض كثيرة الحدود التي تمر بالنقاط $(x_0, y_0), \cdots, (x_n, y_n)$ على الصورة التالية:

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + c_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

ومن الخاصية $P_n(x_i) = y_i$ ، $i = 0,1,2,\cdots,n$ يمكن الحصول على قيم $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n$ كما يلي :

- حيث إن كثيرة الحدود تمر بالنقطة (x_0, y_0) إذن :

$$P(x_0) = y_0 = c_0$$

- إذا كانت كثيرة الحدود تمر بالنقطتين (x_0, y_0) و (x_1, y_1) إذن :

$$P_1(x) = y_0 + = c_1(x - x_0)$$

$$P_1(x_1) = y_0 + = c_1(x_1 - x_0) = y_1$$

$$\therefore c_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

- إذا كانت كثيرة الحدود تمر بالنقاط (x_0, y_0) ، (x_1, y_1) و (x_2, y_2) إذن :

$$P_2(x) = y_0 + \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$\therefore P_2(x_2) = y_0 + \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)(x - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2$$

$$\therefore c_2 = \frac{\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) - \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)}{x_2 - x_0}$$

وهكذا نحصل على $c_3, c_4, \cdots, c_n$. ولتسهيل هذه العملية نعرف الفروق المقسمة الصفرية :

$$f[x_i] = f(x_i), \qquad i = 0,1,\cdots,n$$

والفروق المقسمة الأولى:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}; \quad i = 0,1,\cdots,n-1$$

والفروق المقسمة الثانية:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}; \quad i = 0,1,\cdots,n-2$$

والجدول رقم(٤.١). يسمى بجدول الفروق Difference Table:

الجدول رقم (٤.١).

x	$f(x)$	1st D.D	2nd D.D	3rd D.D		
x_0	$f[x_0]$					
		$f[x_0,x_1]$				
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]$			
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$		
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]$		....	
		$f[x_2,x_3]$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$		...
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4]$		...	
		$f[x_3,x_4]$		$f[x_2,x_3,x_4,x_5]$		
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3,x_4,x_5]$			
		$f[x_4,x_5]$				
x_5	$f[x_5]$					

ونلاحظ أن:

$$c_0 = f[x_0],\ c_1 = f[x_0, x_1],\ \cdots, c_n = f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

وتصبح معادلة نيوتن للفروق المقسمة على الصورة التالية:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots.$$
$$+ f[x_0, x_1, \ldots., x_n](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots.(x - x_{n-1})$$

مثال (٤,٥)

باستخدام طريقة نيوتن للفروق المقسمة أوجد كثيرة الحدود التي تمر بالنقاط (1,0), (-1,-3), (2,4).

الحل

نكون جدول الفروق التالي :

$$\begin{array}{cccc}
1 & 0 & & \\
 & & 1.5 & \\
-1 & -3 & & -\frac{5}{6} \\
 & & \frac{7}{3} & \\
2 & 4 & &
\end{array}$$

$$\therefore P_2(x) = 0 + 1.5(x-1) - \frac{5}{6}(x-1)(x+1)$$

$$= \frac{1}{6}(-5x^2 + 9x - 4)$$

نظرية (٤,٤)

بفرض أن $f(x) \in C^n[a,b]$ و $x_0, x_1, ..., x_n$ نقاط مختلفة في الفترة $[a,b]$ فإنه يوجد $\xi \in (a,b)$ حيث إن :

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

البرهان:

نفرض أن $g(x)=f(x)-P_n(x)$ وحيث إن $f(x_i)=P_n(x_i),\ i=0,1,\ldots n$

إذن الدالة $g(x)$ لها $(n+1)$ من الجذور المختلفة في الفترة $[a,b]$. ومن نظرية رول يوجد $\xi\in(a,b)$ حيث إن:

$$g^{(n)}(\xi)=0$$
$$\therefore 0=f^{(n)}(\xi)-P_n^{(n)}(\xi)$$

وحيث إن $P_n(x)$ كثيرة الحدود من الدرجة n فإن:

$$P_n^{(n)}(x)=f[x_0,x_1,\ldots,x_n]n!$$

إذن:

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

وهذا هو المطلوب.

(٤,٢,٣) الاستكمال على مسافات متساوية

إذا كانت النقاط $x_0,x_1,\ldots,x_n$ على مسافات متساوية أي أن:

$$x_{i+1}-x_i=h,\quad i=0,1,\ldots,n-1$$

نفرض أن $x=x_0+sh$ ومنه نحصل على:

$$x-x_i=(x_0+sh)-(x_0+ih)=(s-i)h$$

إذن:

$$x-x_0=sh,\quad x-x_1=(s-1)h,\ldots\ldots$$

وبذلك تصبح معادلة نيوتن للفروق المقسمة على الشكل التالي :

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1]sh + f[x_0, x_1, x_2]s(s-1)h^2 + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n]s(s-1)\dots(s-n+1)h^n$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} s(s-1)\dots(s-k+1)h^k f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

ولكن :

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\dots(s-k+1)}{k!}$$

إذن تصبح المعادلة السابقة كالتالي :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} k!\, h^k f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

وتسمى هذه المعادلة بصيغة نيوتن الأمامية للفروق المقسمة Newton forward divided-difference formula ، وبالمثل يمكن إيجاد صيغة نيوتن الخلفية للفروق المقسمة كالتالي :

$$P_n(x) = f[x_n] + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + f[x_n, \dots, x_0](x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_1)$$

وإذا كانت x_i's على مسافات متساوية فإن :

$$x = x_n - sh, \quad x_i = x_n - (n-i)h, \quad i = 0,1,\dots,n$$

إذن :

$$P_n(x) = f[x_n] + s\,h\,f[x_n, x_{n-1}] + s(s+1)h^2 f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] + \dots + s(s+1)\dots s(s+n+1)h^n f[x_n, \dots, x_0]$$

أو :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{-s}{k} k!\, h^k\, f[x_{n-k},\dots,x_n]$$

حيث إن :

$$\binom{-s}{k} = (-1)^k \frac{s(s+1)\dots(s+k-1)}{k!}$$

وتسمى بصيغة نيوتن الخلفية للفروق المقسمة.

مثال (٤،٦)

أوجد كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة للنقاط التالية :

$$(0,3),(1,3),(2,7),(3,21)$$

الحل

0	3			
		0		
1	3		2	
		4		1
2	7		5	
		14		
3	21			

$$P_3(x) = 3 + 0(x-0) + 2(x)(x-1) + 1(x)(x-1)(x-2)$$

$$P_3(x) = 3 + 2x(x-1) + x(x-1)(x-2)$$

البرنامج رقم (٤.١)

```
C*************************************************************
C  NEWTON'S INTERPOLATORY DIVIDED-DIFFERENCE FORMULA
C*************************************************************
C    TO OBTAIN THE DIVIDED-DIFFERENCE COEFFICIENTS OF THE
INTERPOLATORY
C    POLYNOMIAL P ON THE (N+1) DISTINCT NUMBERS X(0), X(1),...,
CX(N)
C    FOR THE FUNCTION F:
C    INPUT NUMBERS X(0),X(1),...,X(N); VALUES F(X(0)),F(X(1)),...,
C         F(X(N)) AS THE FIRST COLUMN Q(0,0),Q(1,0),...,Q(N,0) OF Q.
C    OUTPUT THE NUMBERS Q(0,0),Q(1,1),...,Q(N,N) WHERE
C         P(X) = Q(0,0)+Q(1,1)*(X-X(0))+Q(2,2)*(X-X(0))*(X-X(1))+
C              ...+Q(N,N)*(X-X(0))*(X-X(1))*...*(X-X(N-1)).
      DIMENSION X(25),Q(25,25)
      CHARACTER NAME*30,NAME1*30,AA*1
      INTEGER INP,OUP,FLAG
      LOGICAL OK
      F(Z) = 1/Z
      OPEN(UNIT=5,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
      OPEN(UNIT=6,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
      WRITE(6,*) 'Newtons form of the Interpolation Polynomial'
      OK = .FALSE.
10     IF ( .NOT. OK) THEN
       WRITE(6,*) 'Choice of input method: '
       WRITE(6,*) '1. Input entry by entry from keyboard '
       WRITE(6,*) '2. Input data from a text file '
       WRITE(6,*) '3. Generate data using a function F '
       WRITE(6,*) 'Choose 1, 2, or 3 please '
       WRITE(6,*) ' '
       READ(5,*)  FLAG
       IF( ( FLAG .GE. 1 ) .AND. ( FLAG .LE. 3 )) OK = .TRUE.
       GOTO 10
       ENDIF
       IF (FLAG .EQ. 1) THEN
       OK = .FALSE.
20     IF (.NOT. OK ) THEN
       WRITE(6,*) 'Input number N '
       WRITE(6,*) ' '
       READ(5,*) N
       IF (N .GT. 0 ) THEN
       OK = .TRUE.
       N=N+1
```

```
      DO 30 I = 1, N
      J=I-1
      WRITE(6,*) 'Input X(',J,') and F(X(',J,')) '
      WRITE(6,*) 'separated by space  '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) X(I), Q(I,1)
30    CONTINUE
      ELSE
      WRITE(6,*) 'Number must be a positive integer '
      ENDIF
      GOTO 20
      ENDIF
      ENDIF
      IF (FLAG .EQ. 2) THEN
      WRITE(6,*) 'Has a text file been created with data in two '
      WRITE(6,*) 'columns? '
      WRITE(6,*) 'Enter Y or N - letter within quotes '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*)  AA
      IF (( AA .EQ. 'Y' ) .OR.( AA .EQ. 'y' )) THEN
      WRITE(6,*) 'Input the file name in the form - '
      WRITE(6,*) 'drive:name.ext  contained in quotes'
      WRITE(6,*) 'as example:   "A:DATA.DTA" '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*)  NAME
      INP = 4
      OPEN(UNIT=INP,FILE=NAME,ACCESS='SEQUENTIAL')
      OK = .FALSE.
40    IF (.NOT. OK) THEN
      WRITE(6,*) 'Input number N '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) N
      IF ( N .GT. 0) THEN
      OK = .TRUE.
      N=N+1
      DO 50 I = 1, N
      READ(4,*) X(I) , Q(I,1)
50    CONTINUE
      CLOSE(UNIT=4)
      ELSE
      WRITE(6,*) 'Number must be a positive integer '
      ENDIF
      GOTO 40
      ENDIF
```

```
      ELSE
      WRITE(6,*) 'Please create the input file in two column '
      WRITE(6,*) 'form with the '
      WRITE(6,*) 'X values and F(X) values in the '
      WRITE(6,*) 'corresponding columns '
      WRITE(6,*) 'The program will end so the input file can '
      WRITE(6,*) 'be created. '
      OK = .FALSE.
      ENDIF
      ENDIF
      IF (FLAG .EQ. 3) THEN
      WRITE(6,*) 'Has the function F been created in the program '
      WRITE(6,*) 'immediately proceding the INPUT procedure? '
      WRITE(6,*) 'Enter Y or N - letter within quotes'
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*)  AA
      IF (( AA .EQ. 'Y' ) .OR. ( AA .EQ. 'y' )) THEN
      OK = .FALSE.
60    IF (.NOT. OK) THEN
      WRITE(6,*) 'Input number N '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) N
      IF ( N .GT. 0 ) THEN
      OK = .TRUE.
      N=N+1
      DO 70 I = 1, N
      J=I-1
      WRITE(6,*) 'Input X(',J,') '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*)  X(I)
      Q(I,1) = F( X(I) )
70    CONTINUE
      ELSE
      WRITE(6,*) 'Number must be a positive integer '
      ENDIF
      GOTO 60
      ENDIF
      ELSE
      WRITE(6,*) 'The program will end so that the function F '
      WRITE(6,*) 'can be created '
      OK = .FALSE.
      ENDIF
      ENDIF
      IF(.NOT.OK) GOTO 400
```

```
      WRITE(6,*) 'Select output destination: '
      WRITE(6,*) '1. Screen '
      WRITE(6,*) '2. Text file '
      WRITE(6,*) 'Enter 1 or 2 '
      WRITE(6,*) ' '
       READ(5,*) FLAG
       IF ( FLAG .EQ. 2 ) THEN
      WRITE(6,*) 'Input the file name in the form - '
      WRITE(6,*) 'drive:name.ext'
      WRITE(6,*) 'with the name contained within quotes'
      WRITE(6,*) 'as example:   "A:OUTPUT.DTA" '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) NAME1
      OUP = 3
      OPEN(UNIT=OUP,FILE=NAME1,STATUS='NEW')
      ELSE
      OUP = 6
      ENDIF
      WRITE(OUP,3)
      WRITE(OUP,6)
      WRITE(OUP,4) (X(I),Q(I,1),I=1,N)
C    STEP 1
     DO 11 I=2,N
     DO 21 J=2,I
21   Q(I,J)=(Q(I,J-1)-Q(I-1,J-1))/(X(I)-X(I-J+1))
11   CONTINUE
C    STEP 2
     WRITE(OUP,5) (Q(I,I),I=1,N)
400   CLOSE(UNIT=5)
      CLOSE(UNIT=OUP)
       IF(OUP.NE.6) CLOSE(UNIT=6)
       STOP
3    FORMAT(1X,'NEWTONS FORM OF THE INTERPOLATION POLYNOMIAL')
6     FORMAT(1X,'INPUT DATA FOLLOWS')
4     FORMAT(1X,E15.8,1X,E15.8)
5     FORMAT(1X,'Q(0,0),...,Q(N,N)'/4(1X,E15.8))
      END
```

تمارين (٤,٣)

١- باستخدام طريقة نيوتن أوجد كثيرة الحدود التي تمر بالنقاط التالية:

أ) (-3,2), (-2,7), (-1,4), (0,-1), (1,-2), (2,7), (3,32).

ب) (0,0), (1,2), (3,6), (4,10), (5,20).

ج) (0,0), (2,1), (4,3), (6,10), (8,18), (10,30). أوجد P(10.5).

٢- كون جدول الفروق الأمامية للدالة

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+5)}{(x+2)(x+1)}$$

حيث إن: $x_0 = 0(0.1)0.8$.

٣- من الجدول في التمرين السابق احسب $P_4(0.12)$ باستخدام صيغة نيوتن الأمامية.

٤- من الجدول في التمرين السابق احسب $P_4(0.66)$ باستخدام صيغة نيوتن الخلفية.