الفصل الخامس

التفاضل والتكامل العددي

NUMERICAL DIFFERENTIATION AND INTEGRATION

(٥,١) مقدمة

Introduction

من الموضوعات المهمة في التحليل العددي إيجاد قيمة تقريبية لتكامل دالة يصعب تكاملها بالطرق العادية. مثال لذلك:

$$\int_0^1 \sin x^2 dx$$

ولكن في التفاضل العددي ليس هذا هو الهدف حيث إن جميع الدوال من السهل إيجاد تفاضلتها، ولكن في بعض الأحيان يكون لدينا قيم الدالة عند نقاط محدودة ومطلوب التفاضل عند هذه النقاط، وحالات أخرى تتطلب التفاضل العددي للحصول على صيغ للتفاضل يمكن استعمالها لحل المعادلات التفاضلية.

(٥,٢) التفاضل العددي

Numerical Differentiation

بفرض أن النقاط التالية $(x_i, y_i),\ \ i = 0,1,.....,n$ معلومة والمطلوب إيجاد أي من التفاضلات $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=x_i}$ ، $i = 0,1,.....,n$. نبدأ باستخدام طريقة لاجرانج لإيجاد الدالة $P_n(x)$ كما هو مذكور في الفصل الرابع:

$$P_n(x) = \ell_0(x)y_0 + \ell_1(x)y_1 + \ldots\ldots + \ell_n(x)y_n + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

وبالتفاضل بالنسبة إلى x من رتب صحيحة وليست كسرية.

$$\therefore P_n'(x) = \sum_{i=0}^{n}\ell_i'(x)y_i + D_x\left[\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right]$$

$$\therefore P_n'(x) = \sum_{i=0}^{n}\ell_i'(x)y_i + D_x\left(\frac{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}{(n+1)!}\right)f^{(n+1)}(\xi(x)) + \frac{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}{(n+1)!}D_x f^{(n+1)}(\xi(x))$$

وحيث إن $\xi(x)$ غير محددة تحديداً تاماً فلذلك يصعب تحديد $P_n'(x)$ إلا عند النقاط $x_0, x_1, \ldots\ldots, x_n$ فقط حيث يتلاشى الحد الأخير من المعادلة السابقة وتصبح على الصورة التالية :

$$P_n'(x_j) = \sum_{i=0}^{n}\ell_i'(x_j)y_i + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x_j))}{(n+1)!}\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n}(x_j - x_i)$$

ولتوضيح الصيغة السابقة نأخذ حالات خاصة ونبدأ بثلاث نقاط $(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ (x_2, y_2)$ ومن ثم تكون دالة لاجرانج كالتالي :

$$P_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}y_2$$
$$+ \frac{f^{(3)}(\xi(x))}{6}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

بالتفاضل بالنسبة إلى x نجد أن:

$$P_2'(x_j)=\left[\frac{2x_j-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\right]y_0+\left[\frac{2x_j-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\right]y_1+\left[\frac{2x_j-x_0-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\right]y_2$$
$$+\frac{f^{(3)}(\xi(x_j))}{6}\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{2}(x_j-x_i)$$

بوضـــع $j=0,1,2$ ويفـــرض أن x_0,x_1,x_2 علـــى مـــسافات متـــساوية أي أن $x_2-x_1=x_1-x_0=h\neq 0$ فإننا نحصل على التالي:

$$P_2'(x_0)=-\frac{3}{2h}y_0+\frac{2}{h}y_1-\frac{1}{2h}y_2+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_0),$$
$$P_2'(x_1)=-\frac{1}{2h}y_0+\frac{1}{2h}y_1\qquad-\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_1),$$
$$P_2'(x_2)=\frac{1}{2h}y_0-\frac{2}{h}y_1+\frac{3}{2h}y_2+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_2)$$

وحيث إن $P_2'(x)\cong f'(x)$, فإن:

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_0+h)-f(x_0+2h)]+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_0),$$
$$f'(x_1)=\frac{1}{2h}[-f(x_1-h)+f(x_1+h)]-\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1),$$
$$f'(x_2)=\frac{1}{2h}[f(x_2-2h)-4f(x_2-h)+3f(x_2)]+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_2)$$

وتسمى بصيغ الثلاث نقاط ويتم أخذ الصيغة الأولى في حالة إيجاد التفاضل عند نقطة والدالة معلومة بعدها بنقطتين، وتؤخذ الصيغة الثانية في إيجاد التفاضل عند نقطة والدالة معلومة قبلها بنقطة وبعدها بنقطة، أما الصيغة الثالثة فتؤخذ في حالة إيجاد التفاضل عند نقطة والدالة معلومة قبلها بنقطتين. وأيضاً يمكن استخدام أي عدد من

النقاط أكثر من ثلاثة ، ثم إيجاد صورة مختلفة لحدود الخطأ في التقريب. وفي حالة خمس نقاط بمعنى يكون لدينا $(x_0,y_0),\ (x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\ (x_3,y_3),(x_4,y_4)$ فإن الصيغة تصبح كالتالي:

$$f'(x_2)=\frac{1}{12h}\left[f(x_0-2h)-8f(x_0-h)+8f(x_0+h)-f(x_0+2h)\right]+\frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi)$$

$$\begin{aligned}f'(x_0)=\frac{1}{12h}[&-25f(x_0)+48f(x_0+h)-36f(x_0+2h)+16f(x_0+3h)\\&-3f(x_0+4h)]+\frac{h^4}{5}f^{(5)}(\xi)\end{aligned}$$

مثال (٥،١)

لتقريب الدالة $f(x)=xe^x$ حيث إن:

x	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2
$f(x)$	10.88	12.7	14.78	17.15	19.86

الحل

في حالة $h=0.2$

$$\begin{aligned}f'(2.0)&=\frac{1}{2(0.2)}[-10.88+19.86]-\frac{(0.2)^2}{6}f^{(3)}(\xi)\\&=22.45-0.0067f^{(3)}(\xi)\end{aligned}$$

في حالة $h=0.1$

$$\begin{aligned}f'(2.0)&=\frac{1}{2(0.1)}[-12.7+17.15]-\frac{(0.1)^2}{6}f^{(3)}(\xi)\\&=22.25-0.0017f^{(3)}(\xi))\end{aligned}$$

أو :

$$f'(2.0)=\frac{1}{2(0.2)}[-10.88-8(12.7)+8(17.15)+19.86]-\frac{(0.2)^4}{30}f'''(\xi)$$
$$=26.62+0.0000033f^{(4)}(\xi)$$

ملحوظة

يمكن إيجاد تقريبات أخرى للتفاضل باستخدام طريقة نيوتن للاستكمال بدلاً من طريقة لاجرانج. ولتوضيح ذلك نأخذ حالة خاصة عند ثلاث نقاط $(x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2)$ نجد التالي :

$$\begin{array}{cccc} x_0 & y_0 & & \\ & & f[x_0,x_1] & \\ x_1 & y_1 & & f[x_0,x_1,x_2] \\ & & f[x_1,x_2] & \\ x_2 & y_2 & & \end{array}$$

إذن :

$$P_2(x)=y_0+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$+f[x_0,x_1,x_2,x](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),$$

إذن :

$$P_2'(x)=f[x_0,x_1]+f[x_0,x_1,x_2](2x-x_0-x_1)+E'(x),$$

مثال (٥,٢)

أوجد $f'(x)$ بطريقة نيوتن حيث إن :

x	2.0	2.1	2.2
$f(x)$	4.0	4.41	4.89

الحل

2.0	4		
		4.1	
2.1	4.41		1
		4.3	
2.2	4.81		

إذن :

$$P_2(x) = 4 + 4.1(x-2) + 1(x-2)(x-2.1) + E(x),$$
$$P_2'(x) = 4.1 + 2x - 4.1 + E'(x),$$
$$P_2'(x) = 2x + E'(x),$$
$$P_2'(x) = 2x + E'(x),$$
$$\therefore\ P_2'(2) \approx 4,\ P_2'(2.1) \approx 4.2, P'_2(2.2) \approx 4.4$$

تمارين (٥,١)

١ - إذا كانت $f(1.5) = 0.197$ $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{16}, f(1) = 1,$ فأوجد قيمة تقريبية لـ $f'(0.6)$.

٢ - أوجد القيم التقريبية لـ $f'(1.1)$ و $f'(1)$ إذا كانت $f(1) = 1, f(1.1) = \frac{10}{11}, f(1.2) = \frac{5}{6}$ ثم قارن مع الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$.

٣- أوجد $f'(x)$ للدالة

x	0.5	0.6	0.7
$f(x)$	-0.34	-0.18	0.01

عند النقاط المعلومة.

وهناك طرق أخرى لحساب التفاضل العددي ولكن نكتفي بهذا القدر لأنه يؤدي الغرض من هذا الكتاب.

(٥,٣) التكامل العددي
Numerical Integration

إن صور (صيغ) نيوتن كوتس Newton Cotes formulas تُعدُّ من الطرق الأساسية للحصول على قيم تقريبية للتكامل $\int_a^b f(x)dx$ وتعتمد على استبدال الدالة $f(x)$ بكثيرة الحدود الناتجة عن الاستكمال في الفترة $[a,b]$ باستخدام النقاط $x_0,x_1,....,x_n$ داخل الفترة $[a,b]$ وقيم الدالة $f(x)$ عند هذه النقاط وهي موضحة فيما يلي:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (P_n(x)+E(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b E(x)dx$$

$$= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} \ell_i(x) y_i(x)dx + \int_a^b E(x)dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} y_i \int_a^b \ell_i(x)dx + \int_a^b E(x)dx$$

وتسمى بطريقة نيوتن كوتس للتكامل ومنها ما يلي.

(٥,٣,١) طريقة شبه المنحرف Trapezoidal method

تعتمد طريقة شبه المنحرف على تقريب الدالة $f(x)$ إلى $P_1(x)$ حيث إن $P_1(x)$ هي كثيرة الحدود من الدرجة الأولى:

$$\therefore P_1(x) = -\frac{1}{h}(x-x_1)f(x_0) + \frac{1}{h}(x-x_0)f(x_1) + \frac{1}{2}(x-x_0)(x-x_1)f''(\xi_0),$$

$$x_1 - x_0 = h, \quad a = x_0 \le x_1 = b$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)] + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1)dx$$

باستخدام نظرية القيمة المتوسطة في الجزء الأخير وحيث إن $(x-x_0)(x-x_1)$ لا تغير إشارتها في الفترة $[x_0, x_1]$ نجد أن :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)] + \frac{f''(\xi)}{2}\int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1)dx$$

$$= \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)] - \frac{h^3}{12}f''(\xi)$$

$$= \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)] - \frac{(x_1-x_0)^3}{12}f''(\xi)$$

لاحظ أنه في حالة التكامل من x_0 إلى x_2 بحيث إن x_1 في المنتصف بينهما بمعنى أن :

$$x_2 - x_1 = x_1 - x_0 = h$$

فإن المعادلة السابقة تصبح كالتالي :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)] - \frac{h^3}{12}f''(\xi_1) + \frac{h}{2}[f(x_1)+f(x_2)] - \frac{h^3}{12}f''(\xi_2)$$

$$= \frac{h}{2}[f(x_0)+2f(x_1)+f(x_2)] - \frac{h^3}{12}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]$$

ويصورة عامة، يمكن التكامل من x_0 إلى x_n ، وذلك بتقسيم الفترة $[a,b]$ إلى n من الفترات المتساوية طول كل منها h بحيث تكون:

$$h=\frac{x_n-x_0}{n},\ \ x_{i+1}-x_i=h,\ \ i=0,1,\ldots,n-1$$

وبذلك يصبح التكامل على الصورة التالية:

$$\int_a^b f(x)dx \ =\frac{h}{2}[f(x_0)+2f(x_1)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]-\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n}f''(\xi_i)$$

وإذا كانت $f''(x)\in C[a,b]$ فإنه في هذه الحالة يوجد قيمة واحدة على الأقل $\eta\in(a,b)$ بحيث إن:

$$f''(\xi_1)+f''(\xi_2)+\ldots+f''(\xi_n)=nf''(\eta)$$

إذن:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx \ &=\frac{h}{2}[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(x_n)]-\frac{h^3}{12}n\,f''(\eta)\\ &=\frac{h}{2}[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(x_n)]-\frac{(b-a)}{12}h^2f''(\eta)\end{aligned}$$

مثال (٥،٣)

قرب التكامل التالي $I=\int_2^3\frac{1}{x}dx$ بطريقة شبه المنحرف:

أ) في حالة فترة واحدة.

ب) في حالة فترتين.

الحل

أ) $h=1, a=2, b=3, n=1$

$$\therefore I=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}]-\frac{1}{12}(\frac{2}{\eta^2})=0.4167-\frac{1}{6\eta^2}, \quad 2<\eta<3$$

ب) $h=0.5, a=2, b=3, n=2$

$$\therefore I=\frac{0.5}{2}[\frac{1}{2}+2(\frac{1}{2.5})+\frac{1}{3}]-\frac{(0.5)^2}{12}f''(\eta)$$
$$=0.40833-0.02083(\frac{2}{\eta^3})$$
$$=0.40833-\frac{0.04167}{\eta^3}, \quad 2<\eta<3$$

(٥،٣،٢) طريقة سمسن Simpson's method

إن طريقة سمسن تعتمد على تقريب الدالة $f(x)$ بواسطة $P_2(x)$ حيث إن $P_2(x)$ هي كثيرة الحدود من الدرجة الثانية :

$$P_2(x)=-\frac{1}{2h^2}(x-x_1)(x-x_2)f(x_0)-\frac{1}{h^2}(x-x_0)(x-x_2)f(x_1)$$
$$+\frac{1}{2h^2}(x-x_0)(x-x_1)f(x_2)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{6}f'''(\xi(x)),$$
$$\therefore \int_a^b f(x)dx=\int_{x_0}^{x_2}P_2(x)dx$$
$$=\frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_i)+f(x_n)]-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi), \; x_0<\xi<x_2$$

ولتوضيح الجزء الأخير نقوم بما يلي. بفرض إمكانية إيجاد مفكوك الدالة $f(x)$ حول x_1 كما يلي :

$$f(x)=f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)+\frac{f''(x_1)}{2}(x-x_1)^2+\frac{f'''(x_1)}{6}(x-x_1)^3$$
$$+\frac{f^{(4)}(\xi(x))}{24}(x-x_1)^4$$

بالتكامل نحصل على :

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx=f(x_1)(x_2-x_0)+\left[\begin{array}{l}\frac{f'(x_1)}{2}(x-x_1)^2+\frac{f''(x_1)}{6}(x-x_1)^3\\+\frac{f'''(x_1)}{24}(x-x_1)^{43}\end{array}\right]_{x_0}^{x_2}$$
$$+\int_{x_0}^{x_2}\frac{f^{(4)}(\xi(x))}{24}(x-x_1)^4\,dx$$

وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة للتكامل نحصل على :

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx=f(x_1)(x_2-x_0)+\left[\begin{array}{l}\frac{f'(x_1)}{2}(x-x_1)^2+\frac{f''(x_1)}{6}(x-x_1)^3\\+\frac{f'''(x_1)}{24}(x-x_1)^{43}\end{array}\right]_{x_0}^{x_2}$$
$$+\left[\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{120}(x-x_1)^5\right]_{x_0}^{x_2},\quad \xi_1\in[x_0,x_2]$$

وفي حالة النقاط على مسافات متساوية نحصل على :

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx=2h\,f(x_1)+\frac{f''(x_1)}{3}h^3+\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{60}h^5,$$

ومنها نحصل على :

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx=\frac{h}{3}\left[f(x_0+4f(x_1)+f(x_2)\right]-\frac{h^5}{12}\left[\frac{1}{3}f^{(4)}(\xi_2)-\frac{1}{5}f^{(4)}(\xi_1)\right]$$

وبوضع $\xi=\xi_2=\xi_1$ نحصل على:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0 + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

أما إذا تم تقسيم فترة التكامل إلى n من الفترات وطول كل واحدة منها يساوي h نحصل على التالي:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_i) + 2f(x_2) + \ldots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$-\frac{h^5}{90}[f^{(4)}(\xi_1) + \ldots + f^{(4)}(\xi_n)]$$

إذا كانت $f^{(4)}(x) \in C[a,b]$ فإنه يوجد على الأقل قيمة واحدة $\eta \in (a,b)$ حيث إن:

$$f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2) + + \ldots + f^{(4)}(\xi_n) = n f^{(4)}(\eta)$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] - \frac{h^5 n}{90} f^{(4)}(\xi),$$

$$= \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] - \frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(\xi),$$

$$x_0 < \xi < x_n$$

وهناك شرط في طريقة سمسن هو أن يكون عدد الفترات زوجياً.

مثال (٥،٤)

باستخدام طريقة سمسن أوجد قيم التكامل $\int_1^2 e^x dx$ وذلك بتقسيم الفترة إلى أربع فترات.

الحل

$$a=1, b=2, n=4, h=0.25$$

$$\therefore I=\frac{0.25}{3}[f(1)+4f(1.25)+2f(1.5)+4f(1.75)+f(2)]-\frac{(0.25)^4}{180}e^{\xi}$$
$$=4.670875-0.000021701e^{\eta}, \quad 1<\xi<2$$

نلاحظ أن طريقة سمسن أدق من طريقة شبه المنحرف أي كلما ازداد عدد التقسيمات في الفترة الجزئية كانت الطريقة أدق.

(٥,٣,٣) طريقة $\frac{3}{8}$ سمسن Simpson's $\frac{3}{8}$ method

تعتمد طريقة $\frac{3}{8}$ سمسن على تقريب الدالة $f(x)$ بـ $P_3(x)$ حيث إن $P_3(x)$ كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة وكما هو موضح سابقاً نحصل على التالي:

$$\therefore \int_a^b f(x)dx=\frac{3h}{8}[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)]-\frac{3h^3}{80}f^{(4)}(\xi),$$

وأما إذا قسمنا فترة التكامل إلى n من الفترة الجزئية نجد أن:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx+\int_{x_3}^{x_6} f(x)dx+....+\int_{x_{n-3}}^{x_n} f(x)dx$$
$$=\frac{3h}{8}[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+2f(x_3)+...+3f(x_{n-1})+f(x_n)]$$
$$-\frac{3h^5}{80}nf^{(4)}(\eta), \qquad x_0<\eta<x_n$$
$$=\frac{3h}{8}[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+2f(x_3)+...+3f(x_{n-1})+f(x_n)]$$
$$-\frac{(b-a)h^4}{80}f^{(4)}(\eta), \qquad x_0<\eta<x_n$$

البرنامج رقم (٥,١)

```
C*******************************************************************
C           SIMPSON'S COMPOSITE
C*******************************************************************
C    TO APPROXIMATE I = INTEGRAL(( F(X) DX)) FROM A TO B:
C    INPUT:  ENDPOINTS A, B; EVEN POSITIVE INTEGER N.
C    OUTPUT:  APPROXIMATION XI TO I.
      REAL A, B, XI0, XI1, XI2, H, XI, X
      INTEGER N, I, NN
      CHARACTER*1 AA
      LOGICAL OK
C    CHANGE FUNCTION F FOR A NEW PROBLEM
      F(XZ) =exp(XZ)
      OPEN(UNIT=5,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
      OPEN(UNIT=6,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
      WRITE(6,*) 'This is Simpsons Method.'
      WRITE(6,*) 'Has the function F been created in the program? '
      WRITE(6,*) 'Enter Y or N '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*)  AA
      IF(( AA .EQ. 'Y' ) .OR. ( AA .EQ. 'y' )) THEN
        OK = .FALSE.
10        IF (OK) GOTO 11
          WRITE(6,*) 'Input lower limit of integration and'
          WRITE(6,*) 'upper limit of integration separated'
          WRITE(6,*) 'by a blank.'
          WRITE(6,*) ' '
          READ(5,*) A, B
          IF (A.GE.B) THEN
            WRITE(6,*) 'lower limit must be less than upper limit'
            WRITE(6,*) ' '
          ELSE
            OK = .TRUE.
          ENDIF
        GOTO 10
11        OK = .FALSE.
14        IF (OK) GOTO 15
          WRITE(6,*) 'Input an even positive integer N.'
          WRITE(6,*) ' '
          READ(5,*) N
          IF((N.GT.0).AND.((N/2)*2.EQ.N)) THEN
            OK=.TRUE.
          ELSE
```

```
        WRITE(6,*) 'Input must be an even positive integer '
        WRITE(6,*) ' '
       ENDIF
      GOTO 14
15     CONTINUE
     ELSE
      WRITE(6,*) 'The program will end so that the function F '
      WRITE(6,*) 'can be created '
      OK = .FALSE.
     ENDIF
     IF (.NOT.OK) GOTO 040
C    STEP 1
     H = (B-A)/N
C    STEP 2
     XI0 = F(A) + F(B)
C    SUMMATION OF F(X(2*I-1))
     XI1 = 0.0
C    SUMMATION OF F(X(2*I))
     XI2 = 0.0
C    STEP 3
     MM=N-1
     DO 20 I=1,MM
C       STEP 4
        X = A+I*H
C       STEP 5
        IF (I.EQ.2*(I/2)) THEN
           XI2 = XI2+F(X)
        ELSE
           XI1 = XI1+F(X)
        END IF
20   CONTINUE
C    STEP 6
     XI = XI0+2*XI2+4*XI1
     XI = XI*H/3
C    STEP 7
C    OUTPUT
     WRITE(6,2) A,B,XI
040  CLOSE(UNIT=5)
     CLOSE(UNIT=6)
     STOP
2    FORMAT('1','INTEGRAL OF F FROM',3X,E15.8,3X,'TO',3X,E15.8,3X,'IS'
     *,/,3X,E15.8)
END
```

تمارين (٥,٢)

١- أوجد حداً أعلى لخطأ الصيغة في حساب $\int_1^2 e^x dx$ بطريقة شبه المنحرف :

أ) باستعمال ١٠ فترات.

ب) باستعمال ٢٠ فترة.

٢- احسب القيم التقريبية للتكاملات التالية بطريقة شبة المنحرف :

أ) باستعمال ٣ فترات.

ب) باستعمال ٦ فترة.

ثم احسب الخطأ في التقريب المحسوب.

$$\int_0^1 x^3 dx,\quad \int_0^1 x^2 dx,\quad \int_1^2 \frac{1}{1+x^2}dx,\quad \int_1^4 \ln x dx,\quad \int_1^2 e^{x^2} dx$$

٣- أوجد الحد الأعلى للخطأ في حساب $\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx$ بطريقة شبة المنحرف باستعمال ٨ فترات (١٢ فترة). كم عدد الفترات التي تحتاجها حتى لا يزيد الخطأ عن 10^{-5}.

٤- احسب التكامل $\int_1^{1.3} \sqrt{x} dx$ باستخدام طريقة سمسن.

(٥,٣,٤) طريقة رومبرج- ستيفل Romberg- Steifel's method

تعتمد طريقة رومبرج- ستيفل للتكامل على استخدام طريقة شبه المنحرف مدمجة مع طريقة ريتشارد للتنبؤ، ولتطبيق هذه الطريقة يجب تحديد صورة عامة للخطأ

في قاعدة شبه المنحرف بتنصيف m من المرات بعدد فترات 2^m وعدد كلي للنقاط 2^m+1 فيمكن كتابة المساحة بطريقة شبه المنحرف المركبة على الصورة:

$$T_m^{(0)}=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{2^{m-1}-1}f(a+jh)]-c_1h^2-c_2h^4-c_3h^6.....$$

حيث إن $c_1, c_2, c_3,.....$ تعتمد على الدالة $f(x)$ ومشتقاتها ولكنها لا تعتمد على h والحدود التي تحتوي على قوى فردية من h تختفي من صورة الخطأ بسبب التماثل في المسافة ويفرض أن:

$$T_m^{(0)}=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{2^{m-1}-1}f(a+jh)]$$

أي أن:

$$T_m^{(0)}-I=c_1h^2+c_2h^4+c_3h^6+..... \qquad (١)$$

ويعتبر $T_m^{(0)}$ تقريب التكامل بقاعدة شبه المنحرف أي أن خطأ اقتطاع كلي في حدود $O(h^2)$. بتقسيم أي فترة إلى فترتين أي بوضع $\frac{h}{2}$ مكان h فتتضاعف عدد الفترات:

$$I_{m+1}^{(o)}-I=c_1\left(\frac{h}{2}\right)^2+c_2\left(\frac{h}{2}\right)^4+c_3\left(\frac{h}{2}\right)^6+..... \qquad (٢)$$

وبحذف c_1 من المعادلتين (١) و(٢) نحصل على التالي:

$$\frac{4I_{m+1}^{(o)}-I_m^{(o)}}{3}-I=d_2h^4+d_3h^6+.....$$

حيث إن $d_2,d_3,...$ لا تعتمد على h وبوضع:

$$T_m^{(1)}=\frac{4T_{m+1}^{(o)}-T_m^{(o)}}{3}$$

إذن :

$$T_m^{(1)} - I = d_2 h^4 + d_3 h^6 + \ldots.. \qquad (٣)$$

بوضع $\frac{h}{2}$ بدلاً من h نحصل على :

$$I_{m+1}^{(1)} - I = d_2\left(\frac{h}{2}\right)^4 + d_3\left(\frac{d}{2}\right)^6 + \ldots.. \qquad (٤)$$

بحذف d_2 من (٣) و(٤) نجد أن :

$$\frac{16T_{m+1}^{1} - T_m^{(1)}}{15} - I = e_3 h^6 + e_4 h^8 + \ldots..$$

حيث إن $e_3, e_4, \ldots.$ لا تعتمد على h وبوضع

$$T_m^{(2)} = \frac{16T_{m+1}^{(1)} - T_m^{(1)}}{15}$$

وهكذا.

وفي حالة التعميم نصل إلى الصورة العامة :

$$T_m^{(k+1)} = \frac{4^{k+1} T_{m+1}^{(k)} - T_m^{(k)}}{4^{k+1} - 1}, \qquad k = 0,1,2,\ldots.$$

وخطأ الاقتطاع $O(h^{2(k+2)})$, $T_m^{(0)}$ يعطى بالصورة :

$$T_m^{(0)} = \frac{\left(\frac{b-a}{2^{m-1}}\right)}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{j=1}^{2^{m-1}-1} f(a + 2^{\left(\frac{b-a}{2^{m-1}}\right)} j)\right]$$

مثال (٥،٥)

باستخدام طريقة رومبرج- ستيفل أوجد القيمة التقريبية للتكامل $\int_1^2 e^x dx$ ابدأ من $h=1$ واحسب $T_m^{(3)}$.

الحل

$$T_1^{(0)} = \frac{1}{2}[f(1)+f(2)] = 5.053669,$$

$$T_2^{(0)} = \frac{1}{4}[f(1)+2f(1.5)+f(2)] = 4.767679,$$

$$T_3^{(0)} = \frac{1}{8}[f(1)+2f(1.25)+2f(1.5)+2f(1.75)+f(2)] = 4.695076,$$

$$T_4^{(0)} = \frac{1}{13}[f(1)+2(f(1.25)+f(1.25)+f(1.75)+f(1.5)+f(1.625)$$
$$+f(1.75)+f(1.875))+f(2)] = 4.676855,$$

$$\therefore T_1^{(1)} = \frac{4T_2^{(0)} - T_1^{(0)}}{3} = 4.6762349,$$

$$T_2^{(1)} = \frac{4T_3^{(0)} - T_2^{(0)}}{3} = 4.670875,$$

$$T_3^{(1)} = \frac{4T_4^{(0)} - T_3^{(0)}}{3} = 4.670781,$$

$$T_1^{(1)} = \frac{16T_2^{(1)} - T_1^{(1)}}{15} = 4.67077,$$

$$T_2^{(2)} = \frac{16T_3^{(1)} - T_{21}^{(1)}}{15} = 4.67077,$$

$$T_1^{(3)} = \frac{64T_2^{(3)} - T_1^{(2)}}{63} = 4.670779$$

$$\therefore \int_1^2 e^x dx \approx 4.670778$$

ويمكن وضع النتائج في الجدول التالي :

$$
\begin{array}{llll}
T_1^{(0)} = 5.053669 & & & \\
 & T_1^{(1)} = 4.672349 & & \\
T_2^{(0)} = 4.767679 & & T_1^{(2)} = 4.67077 & \\
 & T_2^{(1)} = 4.670875 & & T_1^{(3)} = 4.67077 \\
T_3^{(0)} = 4.695076 & & T_2^{(2)} = 4.67077 & \\
 & T_3^{(3)} = 4.670781 & & \\
T_4^{(0)} = 4.676855 & & &
\end{array}
$$

البرنامج رقم (٢,٥)

```
C*******************************************************************
C                  ROMBERG ALGORITHM
C*******************************************************************
C    TO APPROXIMATE I = INTEGRAL((F(X) DX)) FROM A TO B:
C    INPUT:  ENDPOINTS A, B; INTEGER N.
C    OUTPUT:  AN ARRAY R. ( R(2,N) IS THE APPROXIMATION TO I.)
C    R IS COMPUTED BY ROWS; ONLY 2 ROWS SAVED IN STORAGE
C    DEFINE STORAGE FOR TWO ROWS OF THE TABLE
      DIMENSION R(2,15)
      CHARACTER*1 AA
      LOGICAL OK
C    CHANGE FUNCTION F FOR A NEW PROBLEM
      F(XZ) =exp(XZ)
      OPEN(UNIT=5,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
      OPEN(UNIT=6,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
      WRITE(6,*) 'This is Romberg Integration.'
      WRITE(6,*) 'Has the function F been created in the program? '
      WRITE(6,*) 'Enter Y or N '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*)  AA
      IF(( AA .EQ. 'Y' ) .OR. ( AA .EQ. 'y' )) THEN
        OK = .FALSE.
10      IF (OK) GOTO 11
        WRITE(6,*) 'Input lower limit of integration and'
        WRITE(6,*) 'upper limit of integration separated'
        WRITE(6,*) 'by a blank.'
        WRITE(6,*) ' '
        READ(5,*) A, B
```

```
      IF (A.GE.B) THEN
      WRITE(6,*) 'lower limit must be less than upper limit'
      WRITE(6,*) ' '
      ELSE
      OK = .TRUE.
      ENDIF
      GOTO 10
11    OK = .FALSE.
14    IF (OK) GOTO 15
      WRITE(6,*) 'Input the number of rows - no decimal point.'
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) N
      IF(N.GT.0) THEN
      OK=.TRUE.
      ELSE
      WRITE(6,*) 'Must be positive integer '
      WRITE(6,*) ' '
      ENDIF
      GOTO 14
15    CONTINUE
      ELSE
      WRITE(6,*) 'The program will end so that the function F '
      WRITE(6,*) 'can be created '
      OK = .FALSE.
      ENDIF
      IF (.NOT.OK) GOTO 400
C     STEP 1
      H = B-A
      R(1,1) = (F(A)+F(B))/2*H
C     STEP 2
      WRITE(6,2) R(1,1)
C     STEP 3
      DO 20 I=2,N
C       STEP 4
C       APPROXIMATION FROM TRAPEZOIDAL METHOD
        SUM = 0.0
        M = 2**(I-2)
        DO 30 K=1,M
30        SUM = SUM+F(A+(K-.5)*H)
        R(2,1) = (R(1,1)+H*SUM)/2
C       STEP 5
C       EXTRAPOLATION
        DO 40 J=2,I
          L = 2**(2*(J-1))
```

```
40       R(2,J) = R(2,J-1)+(R(2,J-1)-R(1,J-1))/(L-1)
C        STEP 6
C        OUTPUT
        WRITE(6,2) (R(2,K),K=1,I)
C        STEP 7
        H = H/2
C        STEP 8
C        SINCE ONLY TWO ROWS ARE KEPT IN STORAGE, THIS STEP
C        IS TO PREPARE FOR THE NEXT ROW.
C        UPDATE ROW 1 OF R
        DO 20 J=1,I
20    R(1,J) = R(2,J)
C     STEP 9
400   CLOSE(UNIT=5)
      CLOSE(UNIT=6)
      STOP
2     FORMAT(1X,(6(3X,E15.8)))
      END
```

(٥,٤) التكامل الثنائي

Double Integral

من الموضوعات ذات الأهمية في الرياضيات التكاملات المتعددة وندرس الحل العددي للتكامل الثنائي:

$$I = \iint_R f(x,y)\,dA$$

حيث إن:

$$R = \{(x,y):\ a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$$

نقسم المنطقة R إلى مستطيلات عددها nm وطول كل منها h وعرضها k حيث إن:

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad k = \frac{d-c}{m}$$

$$\therefore I=\int_a^b[\int_c^d f(x,y)dy]dx=\int_a^b I(y)dx$$

ونستخدم قاعدة شبه المنحرف لإيجاد $I(y)$.

$$I(y)=\int_c^d f(x,y)dy=\frac{k}{2}[f(x,y_0)+2\sum_{j=1}^{m-1}f(x,y_j)+f(x,y_m)]$$
$$-\frac{(d-c)}{12}k^2 f_{yy}(x,\mu),\qquad c<\mu<d$$

ثم نستخدم قاعدة شبه المنحرف مرة ثانية لنحصل على التكامل I :

$$I=\frac{k}{2}[\int_a^b f(x,y_0)dx+2\sum_{j=1}^{m-1}\int_a^b f(x,y_j)dx+\int_a^b f(x,y_m)dx]-\frac{(d-c)}{12}k^2\int_a^b f_{yy}(x,\mu)dx$$

$$\int_a^b f(x,y_j)dx=\frac{h}{2}[f(x_0,y_j)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i,y_j)+f(x_n,y_i)]-\frac{(b-a)}{12}h^2 f_{xx}(\eta,y_j)$$

$$a<\eta<b$$

$$\therefore I=\frac{kh}{4}[f(x_0,y_0)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i,y_0)+2\sum_{j=1}^{m-1}f(x_0,y_j)+4\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i,y_i)$$
$$+2\sum_{j=1}^{m-1}f(x_n,y_j)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i,y_m)+f(x_n,y_0)+f(x_0,y_m)$$
$$+f(x_n,y_m)]+E(x,y)$$

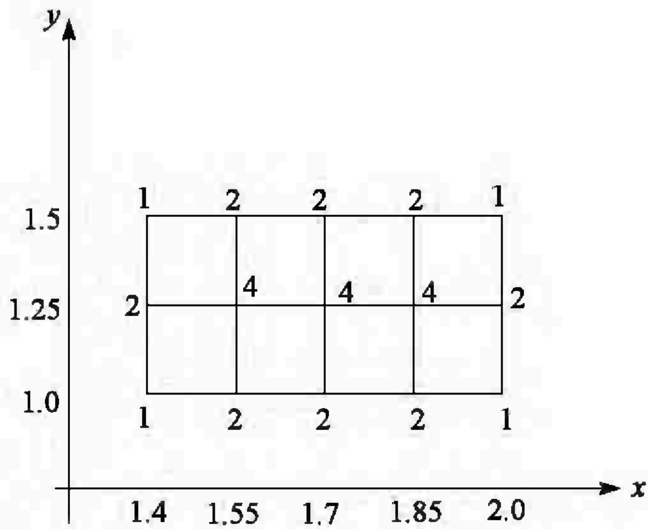
حيث إن $E(x,y)$ الخطأ له الصورة التالية :

$$E(x,y)=\frac{K}{2}[-\frac{(b-a)}{12}h^2 f_{xx}(\eta,y_0)-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{b-a}{6}h^2 f_{xx}(\eta,y_j)$$
$$-\frac{(b-a)}{12}h^2 f_{xx}(\eta,y_m)+\frac{d-c}{12}k^2\cdot\frac{b-a}{12}h^2 f_{yyxx}(\eta,\mu)$$

مثال (٥,٦)

احسب التكامل $\int_{1.4}^{2}\int_{1}^{1.5}\ln(x+2y)dydx$ باستخدام قاعدة شبه المنحرف $.h=0.15,\ k=0.25$

الحل



$$\therefore I \cong \frac{(0.25)(0.15)}{4}[1.2233775432+2(1.266947603+1.30833282$$
$$+1.348073148+1.515127233+1.547562509+1.578978705$$
$$+1.360976553+1.50407739)+4(1.398716881+1.435084525$$
$$+1.470175845)+1.481604541+1.386294361+1.609437912]$$
$$\therefore I \cong 0.429160998$$

وبالمثل يمكن اشتقاق قاعدة سمسن في إيجاد التكامل $\int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f(x,y)dA$ ونحصل على الصيغة :

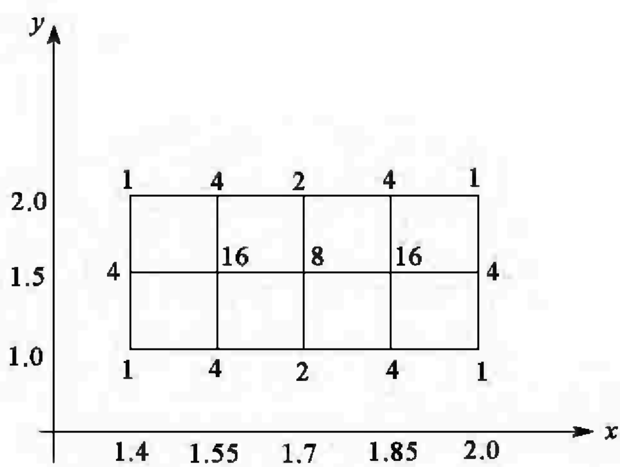
$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx \cong \frac{kh}{9}[f(x_0,y_0)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i},y_0)+2\sum_{j=1}^{m-1}f(x_0,y_{2j})$$
$$+2\sum_{j=1}^{m-1}f(x_{2n},y_{2j})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2j},y_{2m})+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i-1},y_0)$$
$$+4\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i},y_{2j})+4\sum_{j=1}^{m}f(x_0,y_{2j-1})+4\sum_{j=1}^{m}f(x_{2n},y_{2j-1})$$
$$+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i-1},y_{2m})+8\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i-1},y_{2j})+8\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i},y_{2j-1})$$
$$+16\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i-1},y_{2j-1})+f(x_{2n},y_0)+f(x_0,y_{2m})+f(x_{2n},y_{2m})]$$

ويمكن الحصول على التكامل $\int_a^b\int_c^d f(x,y)dA$ باستخدام قاعدة $\frac{3}{8}$ سمسن.

مثال (٥,٧)

احسب التكامل $\int_{1.4}^{2}\int_{1}^{1.5}\ln(x+2y)dydx$ باستخدام قاعدة سمسن مع أخذ $k=0.25$ و $h=0.15$.

الحل



$$\therefore \int_{1.4}^{2.0}\int_{1.0}^{1.5} \ln(x+2y)dydx \cong 0.429552438'$$

البرنامج رقم (٥.٣)

```
C*************************************************************
C             DOUBLE INTEGRAL ALGORITHM
C*************************************************************
C    TO APPROXIMATE I = DOUBLE INTEGRAL (( F(X,Y) DY DX )) WITH
LIMITS
C       OF INTEGRATION FROM A TO B FOR X AND FROM C(X) TO D(X)
FOR Y:
C    INPUT:   ENDPOINTS A,B; POSITIVE INTEGERS M, N.
C
C    OUTPUT:  APPROXIMATION J TO I.
     CHARACTER*1 AA
     LOGICAL OK
C    CHANGE FUNCTIONS F, C, D FOR A NEW PROBLEM
C    LIMITS OF INTEGRATION
C    C IS THE LOWER LIMIT OF Y
     C(XZ)=1.
C    D IS THE UPPER LIMIT OF Y
     D(XZ)=1.5
C    DEFINE INTEGRAND FUNCTION F(X,Y)
     F(XZ,YZ)=Log(XZ+2.*yz)
     OPEN(UNIT=5,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
     OPEN(UNIT=6,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
     WRITE(6,*) 'This is Simpsons Method for double integrals.'
     WRITE(6,*) 'Have the functions F, C, and D been created?'
     WRITE(6,*) 'Enter Y or N '
     WRITE(6,*) ' '
     READ(5,*)  AA
     IF(( AA .EQ. 'Y' ) .OR. ( AA .EQ. 'y' )) THEN
       OK = .FALSE.
10      IF (OK) GOTO 11
        WRITE(6,*) 'Input lower limit of integration and'
        WRITE(6,*) 'upper limit of integration separated'
        WRITE(6,*) 'by a blank.'
        WRITE(6,*) ' '
        READ(5,*) A, B
        IF (A.GE.B) THEN
          WRITE(6,*) 'lower limit must be less than upper limit'
```

```
          WRITE(6,*) ' '
        ELSE
          OK = .TRUE.
        ENDIF
      GOTO 10
11      OK = .FALSE.
14      IF (OK) GOTO 15
        WRITE(6,*) 'Input two positive integers M, N.'
        WRITE(6,*) 'There will be 2M subintervals for the outer'
        WRITE(6,*) 'integral and 2N subintervals for the inner'
        WRITE(6,*) 'integral - separate with blank.'
        WRITE(6,*) ' '
        READ(5,*) N,M
        IF((N.GT.0).AND.(M.GT.0)) THEN
          OK=.TRUE.
        ELSE
          WRITE(6,*) 'Must be positive integers '
          WRITE(6,*) ' '
        ENDIF
      GOTO 14
15      CONTINUE
    ELSE
      WRITE(6,*) 'The program will end so that the functions'
      WRITE(6,*) 'F, C and D can be created '
      OK = .FALSE.
    ENDIF
    IF (.NOT.OK) GOTO 400
    NN=2*N+1
    MM=2*M-1
C    STEP 1
    H=(B-A)/(2*N)
C    USE AN, AE, AO FOR J(1), J(2), J(3) RESP.
C    END TERMS
    AN=0
C    EVEN TERMS
    AE=0
C    ODD TERMS
    AO=0
C    STEP 2
C    TO AVOID A ZERO SUBSCRIPT THE INDEX HAS BEEN SHIFTED BY ONE
    DO 20 I=1,NN
C      STEP 3
C      COMPOSITE SIMPSON'S METHOD FOR X
      X=A+(I-1)*H
```

```
      YA = C(X)
      YB = D(X)
      HX=(YB-YA)/(2*M)
C      USE BN, BE, BO FOR K(1), K(2), K(3)
C
C      END TERMS
      BN=F(X,YA)+F(X,YB)
C      EVEN TERMS
      BE=0
C      ODD TERMS
      BO=0
C      STEP 4
      DO 30 J=1,MM
C        STEP 5
        Y=YA+J*HX
        Z=F(X,Y)
C        STEP 6
        IF(J.EQ.2*(J/2)) THEN
          BE=BE+Z
        ELSE
          BO=BO+Z
        END IF
30      CONTINUE
C    STEP 7
C    USE A1 FOR L, WHICH IS THE INTEGRAL OF F(X(I),Y) FROM C(X(I))
C      TO D(X(I)) BY COMPOSITE SIMPSON'S METHOD
    A1=(BN+2*BE+4*BO)*HX/3
C    STEP 8
    IF( I.EQ.1 .OR. I.EQ.NN ) THEN
      AN=AN+A1
    ELSE
      IF(I.EQ.2*(I/2)) THEN
        AO=AO+A1
      ELSE
        AE=AE+A1
      END IF
    END IF
20   CONTINUE
C    STEP 9
C    USE AC FOR J
    AC=(AN+2*AE+4*AO)*H/3
C    STEP 10
C    OUTPUT
    WRITE(6,1) A,B
```

```
      WRITE(6,2) AC
      WRITE(6,3) N,M
400   CLOSE(UNIT=5)
      CLOSE(UNIT=6)
      STOP
1     FORMAT(1X,'The integral of F from ',E15.8,' to ',E15.8,' is')
2     FORMAT(1X,E15.8)
3     FORMAT(1X,'obtained with N = ',I3,' and M = ',I3)
      END
```

تمارين (٥,٣)

١- أوجد القيمة التقريبية للتكامل $\int_4^{4.6}\int_2^{2.6}\frac{1}{xy}dydx$ باستخدام قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمسن مع أخذ $h = 0.2, k = 0.3$.

٢- احسب التكامل الثنائي $\int_{-0.2}^{0.6}\int_{0.1}^{0.7} e^x \sin\, y\, dy\, dx$ باستخدام قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمسن مع أخذ $h = k = 0.1$.