الفصل السادس

الحلول العددية لنظام غير خطي من المعادلات الجبرية

NUMERICAL SOLUTIONS OF SYSTEM OF NONLINEAR EQUATIONS

مما لا شك فيه هو تعرضنا إلى نظم غير خطية في جميع فروع العلوم ويكون مطلوباً حل تلك النظم ، ولابد من استخدام طرق عددية للحل لأنه من الصعب إيجاد الحلول الحقيقية في الصورة المضبوطة ؛ ولذلك نستعرض في هذا الفصل بعض الطرق العددية لحل النظم غير الخطية.

(٦.١) النقطة الثابتة للدوال في أكثر من متغير
Fixed Point for Functions of Several Variables

بفرض أن نظاماً غير خطي على الصورة التالية :

$$\begin{aligned} &f_1(x_1,\ldots\ldots,x_n)=0,\\ &f_2(x_1,\ldots\ldots,x_n)=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &f_n(x_1,\ldots\ldots,x_n)=0, \end{aligned}$$

حيث إن :

$$f_i:\Re^n\to\Re,\ i=1,2,\ldots,n$$

ويمكن كتابة النظام على الصورة الاتجاهية :

$$\underline{F}(\underline{X}) = \underline{0}$$

حيث إن : $\underline{F} : \Re^n \to \Re^n$

مثال (٦,١)

نأخذ النظام غير الخطي التالي :

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2},$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06,$$
$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3},$$

الحل

$$\underline{F} : \Re^3 \to \Re^3$$

$$\underline{F}(\underline{x}) = \underline{F}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - 0.5 \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 \\ e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \dfrac{10\pi - 3}{3} \end{pmatrix}$$

وقبل حل هذا النظام نعطي بعض التعريفات المهمة.

تعريف (٦,١)

إذا كانت الدالة $f : D \subset \Re^n \to \Re$ فيقال أن لها النهاية L عند x_0 وتكتب كما يلي :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ موجود $\delta > 0$ حيث إن:

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

عندما تكون $|x - x_0| < \delta$ لكل $x \in D$.

تعريف (٦,٢)

الدالة $f : D \subseteq \Re^n \to \Re$ متصلة عند $x_0 \in D$ إذا كان $\lim_{x \to x_0} f(x)$ موجوداً وكذلك $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. وتكون الدالة $f(x)$ متصلة على المنطقة D إذا كانت متصلة عند جميع النقاط في D.

تعريف (٦,٣)

الدالة $\underline{F}$ حيث إن $\underline{F} : D \subseteq \Re^n \to \Re^n$ والتي له الصورة:

$$\underline{F}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_3) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

حيث إن $f_i : \Re^n \to \Re$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ ويكون:

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \underline{F}(\underline{x}) = \underline{L} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix}$$

وإذا كان $\lim_{x_i \to x_{0i}} f_i(x) = \ell_i$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$.

والدالـــة تكـــون متـــصلة $\underline{x}_0$ إذا كـــان $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} \underline{F}(\underline{X})$ موجـــوداً وأيـــضاً $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} \underline{F}(\underline{X}) = \underline{F}(\underline{X}_0)$ وتكـون الدالـة $\underline{F}(\underline{X})$ متـصلة علـى D إذا كانـت $\underline{F}(\underline{X})$ متصلة على جميع عناصر D.

نظرية (٦,١)

الدالـة $f : D \subseteq \Re^n \to \Re$ ، $x_0 \in D$ إذا وجـد ثابـت الدالـة $K > 0, \delta > 0$ بشرط:

$$\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right| \le k, \ \forall \ j = 1,2,\dots,n$$

عندما $\|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta$ لكل $\underline{x} \in D$ فإن f تكون متصلة $\underline{x}_0$.

تعريف (٦,٤)

الدالة $\underline{G} : D \subseteq \Re^n \to \Re^n$ لها نقطة ثابتة fixed point عند $\underline{p} \in D,$ إذا كان:

$$\underline{G}(\underline{p}) = \underline{p},$$

ونعطي شروط وجود وحدانية النقطة الثابتة في حالة $\underline{F}(\underline{X})$.

نظرية (٦,٢)

إذا كانت المنطقة D كما يلي:

$$D = \{(x_1,\dots,x_n)^t : a_i \le x_i \le b_i, \ \ i = 1,2,\dots,n\}, \ \ a_i, b_i \in \Re$$

نفرض أن $\underline{G}: D \subseteq \Re^n \to \Re^n$ دالة متصلة وبشرط أن $\underline{G}(\underline{x}) \in D$ فإن $\underline{G}$ لها نقطة ثابتة في D. وإذا كان $k < 1$, $\frac{\partial g_i(\underline{x})}{\partial x_j}$ دوال متصلة وبشرط أن:

$$\left|\frac{\partial g_i(\underline{x})}{\partial x_j}\right| \le \frac{k}{n}, \quad \underline{x} \in D, \quad j = 1, \ldots, n, \quad \forall g_i$$

فإن المتتابعة $\left\{\underline{x}^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ ابتدائياً بأي نقطة اختيارية $\underline{x}^{(0)} \in D$ والناتجة من العلاقة التالية:

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{G}(\underline{x}^{(k)}), \quad k \ge 0$$

تتقارب إلى نقطة ثابتة وحيدة $\underline{p} \in D$. وأيضاً:

$$\left\|\underline{x}^{(k)} - \underline{p}\right\| \le \frac{k^k}{1-k}\left\|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\right\|_{\infty}$$

مثال (٦،٢)

يمكن كتابة النظام الموجود في المثال رقم (٦،١) بالصورة التالية:

$$x_1 = \frac{1}{3}\cos(x_2 x_3) + \frac{1}{6} = g_1(\underline{x}),$$

$$x_2 = \frac{1}{9}\sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06)} - 0.1 = g_2(\underline{x}),$$

$$x_3 = -\frac{1}{20}e^{-x_1 x_2} - \frac{10\pi - 3}{60} = g_3(\underline{x}),$$

$$\underline{G}: \Re^3 \to \Re^3, \ \underline{G}(\underline{x}) = \left(g_1(\underline{x}), g_2(\underline{x}), g_3(\underline{x})\right)^t$$

إذا كانت المنطقة D كما يلي:

$$D = \{(x_1, x_2, x_3)^t : \quad -1 \le x_i \le 1, \quad i = 1,2,3\}$$

نجد أن :

$$|g_1(x_1, x_2, x_3)| \le 0.5, \quad |g_2(x_1, x_2, x_3)| \le 0.09, \quad |g_3(x_1, x_2, x_3)| \le 0.61;$$

ونجد أن :

$$-1 \le |g_i(x_1, x_2, x_3)| \le 1, \qquad i = 1,2,3$$

و

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right| = 0, \quad \left|\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right| = 0, \quad \left|\frac{\partial g_3}{\partial x_3}\right| = 0;$$

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right| < 0.281, \quad \left|\frac{\partial g_1}{\partial x_3}\right| \le 0.281, \quad \left|\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\right| < 0.238,$$

$$\left|\frac{\partial g_2}{\partial x_3}\right| < 0.119, \quad \left|\frac{\partial g_3}{\partial x_1}\right| < 0.14, \quad \left|\frac{\partial g_3}{\partial x_2}\right| < 0.14$$

أيضاً

$$\left|\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}\right| \le \frac{k}{3}, \qquad k = 3(0.281) = 0.843$$

إذن من النظرية السابقة $\underline{G}$ لها نقطة ثابتة وحيدة في D والمتابعة تكون تقاريبية إلى $\underline{p}$ ونقوم بإجراء الحسابات كما يلي :

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{3}\cos\left(x_2^{(k)} x_3^{(k)}\right) + \frac{1}{6},$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{9}\sqrt{\left(x_2^{(k)}\right)^2 + \sin x_3^{(k)} + 1.06} - 0.1,$$

$$x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{2} e^{-x_1^{(k)} x_2^{(k)}} - \frac{10\pi - 3}{60},$$

مع أخذ $\underline{x}^{(0)} = (0.1, 0.1, 0.1)$ كما في الجدول رقم (٦،١) تكون النتائج تقاربية :

الجدول رقم (٦،١).

k	x_1	x_2	x_3
0	0.1	0.1	0.1
1	0.499983	0.00944115	-0.523101
2	0.499996	0.0000255677	-0.523363
3	0.5	0.0000123367	-0.523598
4	0.5	3.41697×10^{-8}	-0.523598
5	0.5	1.64875×10^{-8}	-0.523599
...	...	...	...

ويمكن أيضاً حساب $\left\|\underline{x}^{(5)} - \underline{p}\right\|_\infty$ من النظرية السابقة حيث $K = 0.843$ بالصورة التالية :

$$\left\|\underline{x}^{(5)} - \underline{p}\right\|_\infty \le \frac{(0.843)^5}{1-0.843}(0.423) < 1.15$$

والحل الصحيح هو :

$$(0.5, 0, -0.5235987757)^t$$

ويمكن عمل تحسين للطريقة كما يلي :

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{3}\cos\left(x_2^{(k)} x_3^{(k)}\right) + \frac{1}{6},$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{9}\sqrt{\left(x_1^{(k+1)}\right)^2 + \sin x_3^{(k)} + 1.06} - 0.1,$$

$$x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{20} e^{-x_1^{(k+1)} x_2^{(k+1)}} - \frac{10\pi - 3}{60},$$

وتسمى هذه الطريقة بطريقة جاوس- سيدال وتبين أنها أحسن في التقارب كما هو موضح في الجدول رقم (٦,٢).

الجدول رقم (٦,٢).

k	x_1	x_2	x_3
0	0.1	0.1	0.1
1	0.499983	0.0222298	-0.523046
2	0.499996	0.0000281537	-0.523598
3	0.5	3.7622×10^{-8}	-0.523599
4	0.5	5.02803×10^{-11}	-0.523599
5	0.5	6.71962×10^{-14}	-0.523599
....	...	...	...

(٦,٢) طريقة التكرارات البسيطة

إذا كان لدينا المعادلات غير الخطية على الصورة التالية:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$
$$g(x_1, x_2, x_3) = 0,$$
$$h(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

وإن أمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$x_1^{(n+1)} = g_1(x_1^n, x_2^n, x_3^n)$$
$$x_2^{(n+1)} = g_2(x_1^n, x_2^n, x_3^n)$$
$$x_3^{(n+1)} = g_3(x_1^n, x_2^n, x_3^n)$$

فإن الطريقة في هذه الحالة تكون تقاربية إذا كان:

$$\left[\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_i}\right|+\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_2}\right|+\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_3}\right|\right]_D < 1, \quad i=1,2,3$$

حيث D المجال الموجود بداخله الحلول الصحيحة. ويمكننا اختيار الصور التالية لـ g_1, g_2, g_3 :

$$\begin{aligned}
x_1^{(n+1)} &= g_1(x_1^n, x_2^n, x_3^n) = x_1^{(n)} + a_1 f(x_1^n, x_2^n, x_3^n) + a_2 g(x_1^n, x_2^n, x_3^n) \\
&\quad + a_3 h(x_1^n, x_2^n, x_3^n), \\
x_2^{(n+1)} &= g_2(x_1^n, x_2^n, x_3^n) = x_2^{(n)} + b_1 f(x_1^n, x_2^n, x_3^n) + b_2 g(x_1^n, x_2^n, x_3^n) \\
&\quad + b_3 h(x_1^n, x_2^n, x_3^n), \\
x_3^{(n+1)} &= g_3(x_1^n, x_2^n, x_3^n) = x_3^{(n)} + c_1 f(x_1^n, x_2^n, x_3^n) + c_2 g(x_1^n, x_2^n, x_3^n) \\
&\quad + c_3 h(x_1^n, x_2^n, x_3^n),
\end{aligned}$$

ونعين المعاملات a_i, b_i, c_i و $i=1,2,3$ من المعادلات :

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_1}=0, \quad \frac{\partial g_i}{\partial x_2}=0, \quad \frac{\partial g_i}{\partial x_3}=0, \qquad i=1,2,3$$

مثال (٦,٣)

حل المعادلات في المثال رقم (٦,١) باستخدام طريقة التكرارات البسيطة.

الحل

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2}$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 81(x_2+0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06$$

$$h(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{60},$$

وبوضع :

$$g_1 = x_1 + a_1 f + a_2 g + a_3 h,$$

$$g_2 = x_2 + b_1 f + b_2 g + b_3 h,$$

$$g_3 = x_3 + c_1 f + c_2 g + c_3 h,$$

وللحصول على قيم المعاملات a_i, b_i, c_i من المعادلات :

$$1 + a_1 f_{x_1} + a_2 g_{x_1} + a_3 h_{x_1} = 0,$$

$$0 + a_1 f_{x_2} + a_2 g_{x_2} + a_3 h_{x_2} = 0,$$

$$0 + a_1 f_{x_3} + a_2 g_{x_3} + a_3 h_{x_3} = 0,$$

$$0 + b_1 f_{x_1} + b_2 g_{x_1} + b_3 h_{x_1} = 0,$$

$$1 + b_1 f_{x_2} + b_2 g_{x_2} + b_3 h_{x_2} = 0,$$

$$0 + b_1 f_{x_3} + b_2 g_{x_3} + b_3 h_{x_3} = 0,$$

$$0 + c_1 f_{x_1} + c_2 g_{x_1} + c_3 h_{x_1} = 0,$$

$$0 + c_1 f_{x_2} + c_2 g_{x_2} + c_3 h_{x_2} = 0,$$

$$1 + c_1 f_{x_3} + c_2 g_{x_3} + c_3 h_{x_3} = 0,$$

وبالحل نحصل على التالي :

$$a_1 = \frac{g_{x_3} h_{x_2} - g_{x_2} h_{x_3}}{f_{x_3} g_{x_2} h_{x_1} - f_{x_2} g_{x_3} h_{x_1} - f_{x_3} g_{x_1} h_{x_2} + f_{x_1} g_{x_3} h_{x_2} + f_{x_2} g_{x_1} h_{x_3} - f_{x_1} g_{x_2} h_{x_3}},$$

وكذلك $a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$.

وتكون الصورة التكرارية هي :

$$x_1^{(n+1)} = x_1^{(n)} + a_1 f(x_1^n, x_2^n, x_3^n) + a_2 g(x_1^n, x_2^n, x_3^n) + a_3 h(x_1^n, x_2^n, x_3^n),$$
$$x_2^{(n+1)} = x_2^{(n)} + b_1 f(x_1^n, x_2^n, x_3^n) + b_2 g(x_1^n, x_2^n, x_3^n) + b_3 h(x_1^n, x_2^n, x_3^n),$$
$$x_3^{(n+1)} = x_3^{(n)} + c_1 f(x_1^n, x_2^n, x_3^n) + c_2 g(x_1^n, x_2^n, x_3^n) + c_3 h(x_1^n, x_2^n, x_3^n),$$

ونتائج هذه الطريقة موضحة في الجدول رقم (٦,٣).

الجدول رقم (٦,٣).

k	x_1	x_2	x_3
0	0.1	0.1	0.1
1	0.49987	0.0194668	-0.52152
2	0.500014	0.00158859	-0.523557
3	0.5	0.0000124448	-0.523598
4	0.5	7.75786×10^{-10}	-0.523599
5	0.5	-5.26826×10^{-18}	-0.523599
...	...	...	...

ومن الملاحظ أن الطريقة أسرع في التقارب من طريقة النقطة الثابتة.

مثال (٦,٤)

حل نظام المعادلات التالي باستخدام طريقة التكرارات البسيطة:

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2$$
$$g(x_1, x_2) = x_1x_2^3 - x_1^3x_2 + 10x_1^2 - 7x_2^2$$

وخذ $x_1^{(0)} = 3,\ x_2^{(0)} = 2$.

الحل

$$g_1(x_1, x_2) = x_1 + a_1 f(x_1, x_2) + a_2 g(x_1, x_2),$$
$$g_2(x_1, x_2) = x_2 + b_1 f(x_1, x_2) + b_2 g(x_1, x_2),$$

وبحل المعادلات التالية:

$$1+a_1 f_{x_1} + a_2 g_{x_1} = 0,$$
$$0+a_1 f_{x_2} + a_2 g_{x_2} = 0,$$
$$1+b_1 f_{x_2} + b_2 g_{x_2} = 0,$$
$$0+b_1 f_{x_1} + b_2 g_{x_1} = 0,$$

نحصل على التالي:

$$a_1 = \frac{g_{x_2}}{f_{x_2} g_{x_1} - f_{x_1} g_{x_2}}, \qquad a_2 = \frac{-f_{x_2}}{f_{x_2} g_{x_1} - f_{x_1} g_{x_2}},$$
$$b_1 = \frac{-g_{x_1}}{f_{x_2} g_{x_1} - f_{x_1} g_{x_2}}, \qquad b_2 = \frac{-f_{x_1}}{f_{x_2} g_{x_1} - f_{x_1} g_{x_2}},$$

كما نحصل على الصورة التكرارية التالية:

$$x_1^{(n+1)} = x_1^{(n)} + a_1 f(x_1^n, x_2^n) + a_2 g(x_1^n, x_2^n),$$
$$x_2^{(n+1)} = x_2^{(n)} + b_1 f(x_1^n, x_2^n) + b_2 g(x_1^n, x_2^n),$$

ومنها نحصل على حل يتقارب كما هو موضح في الجدول رقم (٦،٤).

الجدول رقم (٦،٤).

k	x_1	x_2
0	3	2
1	3.0951	2.07190
2	3.08905	2.06646
3	3.08902	2.06644
4	3.08902	2.06644
...	...	...

تمارين (٦،١)

١- وضح أن الدالة $\underline{F}:\Re^3 \to \Re^3$ المعرفة كالتالي:

$$\underline{F}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3,\ x_1 \cos x_2,\ x_2^2 + x_3)^t$$

تكون متصلة على $\Re^3$.

٢- حل النظام غير الخطي التالي:

$$-x_2(x_1 + 1) + 2x_2 = 18$$

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 6)^2 = 25$$

٣- النظام غير الخطي التالي:

$$x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 = 0,$$

$$x_1 x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 = 0,$$

من الممكن تحويله إلى صورة النقطة الثابتة التالية:

$$g_1(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 8}{10}, \qquad g_2(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2^2 + x_1 + 8}{10}$$

أ) وضح أن $\underline{G}:D \subset |R^2 \to |R^2$ و $\underline{G} = (g_1, g_2)^t$ لها نقطة ثابتة وحيدة في المنطقة $D = \{(x_1, x_2, x_3)^t :\ 0 \le x_i \le 1.5,\ i = 1,2\}$.

ب) استخدم طريقة التكرار البسيطة لإيجاد حل تقاربي.

ج) هل طريقة جاوس- سيدال تكون أسرع في التقارب؟

٤- حل النظم غير الخطية التالية :

أ) $x_1 + x_2^2 = 5,\ x_1^2 + x_2 = 3,\ (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = (2,-2),\ (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = (-3,-3)$

ب) $x_1^2 + x_2^2 = 1,\ \ x_1^3 - x_2^3 = 0,\ \ (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = (0.8, 0.55)$.

(٦،٣) طريقة نيوتن

بفرض أن نظام المعادلات غير الخطية في x_1, x_2, x_3 على الصورة التالية :

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$
$$g(x_1, x_2, x_3) = 0,$$
$$h(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

وإذا كان الحل الصحيح هو (α, β, γ) فإن :

$$\begin{aligned}
f(\alpha,\beta,\gamma) &= f(x_1^n, x_2^n, x_3^n) + e_1 f_{x_1}(x_1^n, x_2^n, x_3^n) + e_2 f_{x_2}(x_1^n, x_2^n, x_3^n) \\
&\quad + e_3 f_{x_3}(x_1^n, x_2^n, x_3^n) = 0, \\
g(\alpha,\beta,\gamma) &= g(x_1^n, x_2^n, x_3^n) + e_1 g_{x_1}(x_1^n, x_2^n, x_3^n) + e_2 g_{x_2}(x_1^n, x_2^n, x_3^n) \\
&\quad + e_3 g_{x_3}(x_1^n, x_2^n, x_3^n) = 0, \\
h(\alpha,\beta,\gamma) &= h(x_1^n, x_2^n, x_3^n) + e_1 h_{x_1}(x_1^n, x_2^n, x_3^n) + e_2 h_{x_2}(x_1^n, x_2^n, x_3^n) \\
&\quad + e_3 h_{x_3}(x_1^n, x_2^n, x_3^n) = 0
\end{aligned}$$

وبحل المعادلات السابقة نحصل على القيم e_1, e_2, e_3 ومنها نحصل على العلاقات التكرارية التالية :

$$x_1^{n+1} = x_1^n + (e_1)^n, \quad x_2^{n+1} = x_2^n + (e_2)^n, \quad x_3^{n+1} = x_3^n + (e_3)^n$$

مثال (٦,٥)

حل معادلات المثال رقم (٦,١) بطريقة نيوتن.

الحل

$$e_1 f_{x_1} + e_2 f_{x_2} + e_3 f_{x_3} + f = 0,$$
$$e_1 g_{x_1} + e_2 g_{x_2} + e_3 g_{x_3} + g = 0,$$
$$e_1 h_{x_1} + e_2 h_{x_2} + e_3 h_{x_3} + h = 0,$$

بالحل نحصل على القيم e_1, e_2, e_3 ثم نعوض في العلاقة التكرارية والنتائج معروضة في الجدول رقم (٦,٥).

الجدول رقم (٦,٥).

k	x_1	x_2	x_3
0	0.1	0.1	0.1
1	0.490718	0.0312378	-0.519661
2	0.509011	0.00349785	-0.521634
3	0.500928	0.000755719	-0.523391
4	0.500227	0.000075645	-0.52355
5	0.500019	0.0000179774	-0.523594
6	0.500005	1.52263×10^{-6}	-0.523598
8	0.5	2.87105×10^{-8}	-0.523599
...	...	...	...

البرنامج رقم (٦.١)

```
C*******************************************************************
C         NEWTON'S METHOD FOR SYSTEMS ALGORITHM
C*******************************************************************
C    TO APPROXIMATE THE SOLUTION OF THE NONLINEAR SYSTEM C
F(X)=0 GIVEN
C    AN INITIAL APPROXIMATION X:
C
C      INPUT:   NUMBER n OF EQUATIONS AND UNKNOWNS; INITIAL
APPROXIMATION
C          X=(X(1),...,X(n)); TOLERANCE TOL; MAXIMUM NUMBER OF
C          ITERATIONS N.
C
C          OUTPUT:   APPROXIMATE SOLUTION X=(X(1),...,X(n)) OR A
MESSAGE
C          THAT THE NUMBER OF ITERATIONS WAS EXCEEDED.
C
C    INITIALIZATION
     DIMENSION AA(3,4),Y(3),X(3)
C    USE AA FOR J;  NN FOR MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS N
     CHARACTER NAME1*30,AAA*1
     INTEGER OUP,FLAG
     LOGICAL OK
     OPEN(UNIT=5,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
     OPEN(UNIT=6,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
     WRITE(6,*) 'This is the Newton Method for Nonlinear Systems.'
     WRITE(6,*) 'Has the function F been defined and has the'
     WRITE(6,*) 'Jacobian of partial derivatives been defined'
     WRITE(6,*) 'at lines 105 and 115 respectively.'
     WRITE(6,*) 'Enter Y or N '
     WRITE(6,*) ' '
     READ(5,*)  AAA
     IF(( AAA .EQ. 'Y' ) .OR. ( AAA .EQ. 'y' )) THEN
       OK = .FALSE.
101     IF (OK) GOTO 11
        WRITE(6,*) 'Input the number n of equations.'
        WRITE(6,*) ' '
        READ(5,*) N
        IF (N.GE.2) THEN
          OK = .TRUE.
        ELSE
```

```
        WRITE(6,*) 'N must be greater than 1.'
      ENDIF
    GOTO 101
11    OK = .FALSE.
14    IF (OK) GOTO 15
       WRITE(6,*) 'Input tolerance '
       WRITE(6,*) ' '
       READ(5,*) TOL
       IF (TOL.LE.0.0) THEN
         WRITE(6,*) 'Tolerance must be positive '
       ELSE
         OK = .TRUE.
       ENDIF
    GOTO 14
15    OK=.FALSE.
12    IF (OK) GOTO 13
       WRITE(6,*) 'Input the maximum number of iterations.'
       WRITE(6,*) ' '
       READ(5,*) NN
       IF ( NN .LE. 0 ) THEN
        WRITE(6,*) 'Must be positive integer '
       ELSE
        OK = .TRUE.
       ENDIF
    GOTO 12
13    DO 16 I=1,N
       WRITE(6,*) 'Input initial approximation X(',I,')'
       WRITE(6,*) ' '
       READ(5,*) X(I)
16    CONTINUE
   ELSE
    WRITE(6,*) 'The program will end so that the functions'
    WRITE(6,*) 'F(X) and J(X) can be created '
    OK = .FALSE.
   ENDIF
   IF(.NOT.OK) GOTO 400
   WRITE(6,*) 'Select output destination: '
   WRITE(6,*) '1. Screen '
   WRITE(6,*) '2. Text file '
   WRITE(6,*) 'Enter 1 or 2 '
   WRITE(6,*) ' '
   READ(5,*) FLAG
   IF ( FLAG .EQ. 2 ) THEN
    WRITE(6,*) 'Input the file name in the form - '
```

```
      WRITE(6,*) 'drive:name.ext'
      WRITE(6,*) 'with the name contained within quotes'
      WRITE(6,*) 'as example:   "A:OUTPUT.DTA" '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*) NAME1
      OUP = 3
      OPEN(UNIT=OUP,FILE=NAME1,STATUS='NEW')
    ELSE
      OUP = 6
    ENDIF
    WRITE(OUP,*) 'NEWTON METHOD FOR NONLINEAR SYSTEMS'
    PI = 4*ATAN(1.)
C   STEP 1
    K=1
C   STEP 2
100  IF (K.GT.NN) GOTO 200
C      STEP3
C      COMPUTE J(X)
       AA(1,1)=3.0
       AA(1,2)=X(3)*SIN(X(2)*X(3))
       AA(1,3)=X(2)*SIN(X(2)*X(3))
       AA(2,1)=2*X(1)
       AA(2,2)=-162*(X(2)+.1)
       AA(2,3)=COS(X(3))
       AA(3,1)=-X(2)*EXP(-X(1)*X(2))
       AA(3,2)=-X(1)*EXP(-X(1)*X(2))
       AA(3,3)=20
C      COMPUTE -F(X)
       AA(1,4)=-(3*X(1)-COS(X(2)*X(3))-.5)
       AA(2,4)=-(X(1)**2-81*(X(2)+.1)**2+SIN(X(3))+1.06)
       AA(3,4)=-(EXP(-X(1)*X(2))+20*X(3)+(10*PI-3)/3)
C      STEP 4
C      SOLVES THE N X N LINEAR SYSTEM J(X) Y = -F(X)
       CALL LIN(N,N+1,AA,Y)
C      STEPS 5 AND 6
C      R = INFINITY NORM OF Y
       R=0
       DO 10 I=1,N
       IF(ABS(Y(I)).GT.R) R=ABS(Y(I))
10     X(I)=X(I)+Y(I)
       WRITE(OUP,3) K,(X(I),I=1,N),R
C      STEP 6
       IF(R.LT.TOL) THEN
C      PROCESS IS COMPLETE
```

```
      WRITE(OUP,4)
      GOTO 400
       END IF
C        STEP 7
       K=K+1
      GOTO 100
C      STEP 8
C      DIVERGENCE
200    WRITE(OUP,5) NN
400    CLOSE(UNIT=5)
       CLOSE(UNIT=OUP)
       IF(OUP.NE.6) CLOSE(UNIT=6)
       STOP
3   FORMAT(1X,'ITER.=',1X,I2,1X,'APPROX. SOL. IS',1X,3(1X,E15.8),/,1X,
   *'APPROX. ERROR IS',1X,E15.8)
4   FORMAT(1X,'SUCCESS WITHIN TOLERANCE 1.0E-05')
5   FORMAT(1X,'DIVERGENCE - STOPPED AFTER ITER.',1X,I2)
    END
C
       SUBROUTINE LIN(N,M,A,X)
C        LIN SOLVES THE LINEAR SYSTEM: J(X) Y = -F(X) USING PARTIAL
C        PIVOTING
       DIMENSION A(N,M),X(N)
       ZERO = 1.0E-20
       K=N-1
       DO 10 I=1,K
       Y=ABS(A(I,I))
        IR=I
        IA=I+1
        DO 20 J=IA,N
        IF(ABS(A(J,I)).GT.Y) THEN
        IR=J
        Y=ABS(A(J,I))
        END IF
20      CONTINUE
        IF(Y.LE.ZERO) THEN
        WRITE(6,1)
        STOP
        END IF
       IF(IR.NE.I) THEN
       DO 30 J=I,M
       C=A(I,J)
       A(I,J)=A(IR,J)
30     A(IR,J)=C
```

```
      END IF
      DO 40 J=IA,N
      C=A(J,I)/A(I,I)
      IF(ABS(C).LE.ZERO) C=0
      DO 40 L=I,M
40    A(J,L)=A(J,L)-C*A(I,L)
10    CONTINUE
      IF(ABS(A(N,N)).LT.1.0E-20) THEN
      WRITE(6,1)
      STOP
      END IF
      X(N)=A(N,M)/A(N,N)
      DO 50 I=1,K
      J=N-I
      JA=J+1
      C=A(J,M)
      DO 60 L=JA,N
60     C=C-A(J,L)*X(L)
50    X(J) = C/A(J,J)
      RETURN
1      FORMAT(1X,'LINEAR SYSTEM HAS NO SOLUTION')
      END
```

مثال (٦،٦)

أوجد نقطة تقاطع المنحنيين

$$x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2 = 0, \qquad x_1x_2^3 - x_1^3x_2 + 10x_1^2 - 7x_2^2 = 0$$

وخذ $x_1^{(0)} = 3, \quad x_2^{(0)} = 2$.

الحل

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2, \quad g(x_1, x_2) = x_1x_2^3 - x_1^3x_2 + 10x_1^2 - 6x_2^3,$$

$$f_{x_1}(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 6x_2, \qquad g_{x_1}(x_1, x_2) = x_2^3 - 3x_1^2x_2 - 20x_1$$

$$f_{x_2}(x_1, x_2) = 3x_2^2 - 6x_1, \qquad g_{x_2}(x_1, x_2) = 3x_1x_2^2 - x_1^3 - 21x_2^2$$

إذن

$$e_1f_{x_1} + e_2f_{x_2} + f = 0,$$

$$e_1 g_{x_1} + e_2 g_{x_2} + g = 0,$$

وبحل المعادلتين السابقتين نحصل على التالي :

$$(e_1)^n = -\left(\frac{f g_{x_2} - g f_{x_2}}{f_{x_1} g_{x_2} - g_{x_1} f_{x_2}}\right)_n, (e_2)^n = -\left(\frac{f_{x_1} g - g_{x_1} f}{f_{x_1} g_{x_2} - g_{x_1} f_{x_2}}\right)_n$$

وتصبح المعادلات التكرارية على الصورة :

$$x_1^{n+1} = x_1^n + (e_1)^n, \qquad x_2^{n+1} = x_2^n + (e_2)^n$$

والنتائج الموضحة في الجدول رقم (٦،٦) تقاربية :

الجدول رقم (٦،٦).

k	x_1	x_2
0	3	2
1	3.0951	2.0709
2	3.08905	2.06646
3	3.08902	2.06644
4	3.08902	2.06644
...	...	...

تمارين (٦،٢)

١ - باستخدام طريقة نيوتن حل النظم التالية مع $\underline{x}^{(0)} = \underline{0}$

أ) $$4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0$$

$$\frac{1}{2}x_1 x_2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0$$

ب)
$$x_1^2 + x_2 - 37 = 0$$
$$x_1 - x_1^2 - 5 = 0$$
$$x_1 + x_1 + x_3 - 3 = 0$$

٢- حل النظام غير الخطي بطريقة نيوتن:

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0,$$
$$x_1^3 - x_2^2 = 0,$$
$$(x_1^0, x_2^0) = (0.8, 0.55)$$