

الحل العددي للمعادلات التفاضلية

NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

(٧،١) مقدمة

Introduction

تختلف المعادلات التفاضلية عن المعادلات الجبرية في كونها تحتوي على مشتقات الدالة. والصورة العامة لمعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى تكون كالتالي:

$$f(x, y, y') = 0$$

حيث إن f دالة في ثلاثة متغيرات x, y, y' والصورة العامة للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية هي:

$$f(x, y, y', y'') = 0$$

مثال (٧،١)

المعادلة $y' + y - x^2 = 0$ معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى، والمعادلة $2y'' + 3y' + xy' - e^x = 0$ معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية. بعض المعادلات التفاضلية تكون سهلة الحل، والحصول على حل مضبوط بطرق تحليلية، ومثال على ذلك المعادلة $y' - y = 0$ لها الحل العام $y = ce^x$ حيث إن c ثابت اختياري. ونلاحظ أن

الحل العام يعبر عن حلول لا نهائية العدد تبعاً أن c قيمة اختيارية ولكن إذا كان الشرط أن يحقق الحل ما يسمى بالشرط الابتدائي:

$$y(x_0) = y_0$$

يصبح الحل محدوداً وهو $y(x) = y_0 e^x$. وتسمى مسألة إيجاد حل معادلة تفاضلية مع شرط ابتدائي بمسألة القيمة الابتدائية Initial value problem. وسوف يتم دراسة طرق عديدة لحل هذه المسألة، منها ما يعتمد على التكامل ومنها ما يعتمد على التفاضل ذي الخطوة الواحدة ومنها ما يعتمد على التفاضل متعدد الخطوات.

(٧,٢) طريقة بيكارد

Picard Method

طريقة بيكارد طريقة لها أهميتها في حلول المعادلات التفاضلية وظهرت حديثاً طرق مثل طريقة الأدميان Adomian method تستخدم في حل المعادلات التفاضلية الجزئية ولها نفس الفكر مثل بيكارد بالنسبة للمعادلات التفاضلية العادية، ومن مميزات هذه الطريقة أنها تعطي حلاً تقريبياً دالياً وهذا خاصية غير متوفرة في الطرق الأخرى كما سنرى فيما بعد. نفرض معادلة على الصورة التالية:

$$y' = f(x, y)$$

حيث إن $f(x, y)$ دالة متصلة على $D = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ ولها مشتقة تفاضلية جزئية بالنسبة إلى y ومتصلة. نجد حل هذه المعادلة بالشرط الابتدائي $y(x_0) = y_0$ بالتكامل على الفترة D .

الحل العددي للمعادلات التفاضلية

$$\int_{y_0}^y dy = \int_{x_0}^x f(x, y) dx$$

$$\therefore y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx$$

ثم نجد التقريبات التالية :

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx,$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx,$$

.....

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx, \dots$$

ونجد أن لدينا متتابعة $y_0(x), y_1(x), \dots, y_n(x), \dots$ ومن النظرية التالية نجد أن هذه المتتابعة تكون تقاربيه مع شروط.

نظرية (٧.١) نظرية الوجود والوحدانية (نظرية بيكارد (Picard's theorem)

$$y' = f(x, y)$$

نفرض المعادلة التفاضلية

$$y(x_0) = y_0$$

والشرط الابتدائي

ونفرض أن الدالة $f(x, y)$ المعرفة في المنطقة المغلقة المحدودة :

$$D = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, a, b > 0\}$$

تحقق الشرطين الآتيين :

$$١ - \text{الدالة متصلة ومن ثم محدودة أي أن } M > 0, |f(x, y)| \leq M$$

$$٢ - \text{الدالة مشتقة جزئية بالنسبة إلى } y \text{ ومحدودة أي أن :}$$

$$.k > 0, \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq k$$

إذن سيكون للمعادلة التفاضلية حلاً وحيداً $y(x)$. وهذا الحل سيكون معرفاً ومتصلاً وقابلاً للتفاضل بجوار القيمة الابتدائية x_0 . وبالضبط يكون معرفاً في المنطقة $|x - x_0| < h$ حيث إن :

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

البرهان:

من طريقة بيكارد يمكن إيجاد التقريبات التالية :

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx,$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx,$$

.....

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx, \dots$$

- ثم نبرهن على أن الدوال $\{y_n\}$ معرفة ومتصلة في الفترة $|x - x_0| \leq h$

وذلك كما يلي حيث إن الدالة $f(x, y_0)$ متصلة في الفترة ولذلك تكون الدالة $y_1(x)$ موجودة ومتصلة في ذات الفترة.

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx \right| \leq M \left| \int_{x_0}^x dx \right| = M|x - x_0| = Mh \leq b$$

باستخدام الاستنتاج الرياضي نفرض صحة العلاقة في حالة k أي أن :

$$|y_k(x) - y_0| \leq b, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

ونحاول إثبات صحة العلاقة في حالة n

$$\begin{aligned} \therefore |y_n(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx \right| \leq \int_{x_0}^x |f(x, y_{n-1})| dx \\ &\leq M|x - x_0| \leq Mh \leq b \end{aligned}$$

إذن لقيم x في الفترة $|x - x_0| \leq h$ فإن $y_n(x)$ لا تخرج عن R ؛ ولذلك فإن $y_n(x)$ موجودة ومتصلة.

- ثبت أن المتتابعة $\{y_n\}$ تتقارب بانتظام في الفترة $|x - x_0| \leq h$ ونهايتها دالة متصلة في هذه :

$$|y_1(x) - y_0(x)| = \left| \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx \right| \leq \int_{x_0}^x |f(x, y_0)| dx \leq M(x - x_0),$$

$$\begin{aligned} |y_2(x) - y_1(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx - \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(x, y_1) - f(x, y_0)| dx \end{aligned}$$

ومن شرط ليبشتز نجد أن :

$$\begin{aligned} \therefore |y_2(x) - y_1(x)| &\leq k \int_{x_0}^x |y_1(x) - y_0| dx \\ &\leq K \int_{x_0}^x M(x - x_0) dx = \frac{KM}{2} (x - x_0)^2 \end{aligned}$$

وهكذا

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{MK^{n-1}(x - x_0)^n}{n!}, \quad n = 1, 2, \dots$$

ونأخذ المتسلسلة التالية :

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \dots + (y_n - y_{n-1}) + \dots$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة التالية :

$$y_0 + V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n + \dots$$

$$V_n(x) = y_n(x) - V_{n-1}(x)$$

حيث إن :

وإذا وجدنا المجموع الجزئي لهذه المتسلسلة هو $y_n(x)$ فإن المتتابعة $\{y_n\}$

تتقارب شرط أن المتسلسلة تتقارب فقط. إذن نجد أن التعويض بالعلاقة المستتجة

التالية :

$$\begin{aligned} y_0 + M(x - x_0) + \frac{MK}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{MK^{n-1}}{n!}(x - x_0)^n + \dots \\ = y_0 + M \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K^{m-1}}{m!} h^m \end{aligned}$$

ومن اختبار النسبة نجدتها تقاربية. إذن $\{y_n\}$ تتقارب تقارباً منتظماً في الفترة $|x - x_0| \leq h$.

- نثبت أن النهاية $y(x)$ لا تخرج عن R لقيم x في الفترة $|x - x_0| \leq h$ أي نثبت أن $|y(x) - y_0| \leq b, |x - x_0| \leq h$:

$$\therefore y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow \infty} f(x, y_{n-1}) dx$$

ومن تقارب واتصال $\{y_n\}$ فإن:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx$$

∴ الدالة $y(x)$ تحقق المعادلة التكاملية ومن ثم تحقق المعادلة التفاضلية.

- والآن نحاول إثبات أن الدالة $y(x)$ وحيدة، ولذا نفرض عكس ذلك وهو أنها ليست وحيدة! أي أن:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx,$$

$$y^*(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y^*) dx$$

بطرح المعادلتين السابقتين نحصل على:

$$\begin{aligned}
 |y(x) - y^*(x)| &\leq \int_{x_0}^x |f(x, y) - f(x, y^*)| dx \\
 &\leq K \int_{x_0}^x |y(x) - y^*(x)| dx
 \end{aligned}$$

ويوضع $|y(x) - y^*(x)| = w(x)$

$$\therefore e^{-K(x-x_0)}(w(x) - K \int_{x_0}^x w(x) dx) \leq 0$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \left[e^{-K(x-x_0)} \int_{x_0}^x w(x) dx \right] \leq 0$$

$$\therefore e^{-K(x-x_0)} \int_{x_0}^x w(x) dx \leq 0$$

$$\therefore \int_{x_0}^x w(x) dx \leq 0$$

$$\therefore w(x) \leq 0$$

ولكن $w(x) \geq 0$ من الفرض :

إذن $w(x) = 0$ ومنها نحصل على $y(x) = y^*(x)$

إذن الحل يكون وحيداً وهذا هو المطلوب إثباته.

نظرية (٧.٢)

إن الخطأ في طريقة بيكارد يُحدد بالقيمة التالية :

$$|y - y_n| \leq K^n M \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$

حيث إن $M = \max|f(x, y)|$ و K هو ثابت لبشتز.

$$K = \max|f_y(x, y)|$$

البرهان:

من طريقة بيكارڊ نجد أن:

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx,$$

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx$$

$$\begin{aligned} \therefore |y - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x (f(x, y) - f(x, y_0)) dx \right| \leq \int_{x_0}^x |f(x, y) - f(x, y_0)| dx \\ &\leq K \int_{x_0}^x |y - y_0| dx = KM(x - x_0)^2 = KMh \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |y - y_1| &= \left| \int_{x_0}^x (f(x, y) - f(x, y_1)) dx \right| \leq \int_{x_0}^x |f(x, y) - f(x, y_1)| dx \\ &\leq K \int_{x_0}^x |y - y_1| dx \leq \frac{KM}{2} (x - x_0)^2 = KM \frac{h^2}{2!} \end{aligned}$$

وهكذا، بالاستنتاج الرياضي نجد أن:

$$|y - y_n| \leq K^n M \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$

وهذا هو المطلوب.

مثال (٧.٢)

حل المعادلة التفاضلية التالية باستخدام طريقة بيكارڊ.

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0$$

الحل

$$y_1(x) = \int_0^x (x^2 + y_0^2) dx = \frac{x^3}{3},$$

$$y_2(x) = \int_0^x (x^2 + \frac{x^6}{9}) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7,$$

$$y_3(x) = \int_0^x (x^2 + (\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63})^2) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{16}}{59535}$$

.....

وإذا أخذنا المنطقة وهي :

$$R = \{|x - x_0| \leq \frac{1}{2}, |y - y_0| \leq 1\}$$

$$\therefore M = \max|f(x, y)| = 1.25, \quad K = \max|f_y(x, y)| = 2,$$

$$h = \min(a, \frac{b}{M}) = \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

ويكون الحد الأعلى للخطأ هو :

$$|y - y_n| \leq 2^n (1.25) \frac{(0.5)^{n+1}}{(n+1)!}$$

وبوضع $n = 3$ نحصل على التالي :

$$|y - y_3| \leq 0.026041666$$

ونتطرق الآن إلى استخدام طريقة بيكاردي لحل نظام من المعادلات التفاضلية ذات

الصورة التالية:

$$y' = f(x, y, z),$$

$$z' = g(x, y, z),$$

ومن الشرطين الابتدائيين $z(x_0) = z_0$ ، $y(x_0) = y_0$. وحل هذا النظام بطريقة بيكاردي يكون على الصورة :

$$\left. \begin{aligned} y_{n+1} &= y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_n, z_n) dx, \\ z_{n+1} &= z_0 + \int_{x_0}^x g(x, y_n, z_n) dx, \end{aligned} \right\} n \geq 0$$

ثم يتم تكون متابعتان $\{y_n\}$ ، $\{z_n\}$ تتقاربان إلى الحل الصحيح.

مثال (٧،٣)

حل نظام المعادلات التفاضلية التالي باستخدام طريقة بيكاردي:

$$y' = -4y + 3z + 6,$$

$$z' = -2.4y + 1.6z + 3.6,$$

باستخدام الشرطين الابتدائيين $z(0) = 0$ ، $y(0) = 0$.

الحل

$$y_{n+1} = \int_0^x (-4y_n + 3z_n + 6) dx,$$

$$z_{n+1} = \int_0^x (-2.4y_n + 1.6z_n + 3.6) dx,$$

ومنها نحصل على التالي:

$$\begin{aligned} y_0 &= 0, & z_0 &= 0, \\ y_1 &= 6x, & z_1 &= 3.6x, \\ y_2 &= 6x - 6.6x^2, & z_2 &= 3.6x - 4.32x^2, \end{aligned}$$

.....

$$y_6 = 6x - 6.6x^2 + 4.48x^3 - 2.248x^4 + 0.89984x^5 - 0.299989x^6,$$

$$z_6 = 3.6x - 4.32x^2 + 2.976x^3 - 1.4976x^4 + 0.599808x^5 - 0.199987x^6,$$

وهكذا كلما زاد عدد التكرارات حصلنا على حل أقرب إلى الحل الصحيح ونقارن في الجدول رقم (٧.١) التقريب السادس مع الحل الصحيح عند بعض النقاط.

الجدول رقم (٧.١).

x	y_6	$y(x)$	z_6	$z(x)$
0.0	0	0	0	0
0.1	0.538264	0.538264	0.319632	0.319632
0.2	0.968512	0.968513	0.568791	0.568792
0.3	1.31072	1.31074	0.760733	0.760745
0.4	1.58116	1.58128	0.906248	0.906333
0.5	1.79293	1.79353	1.01402	1.01442

مثال (٧.٤)

حل نظام المعادلات التفاضلية التالي باستخدام طريقة بيكارڊ:

$$y'(x) = z(x),$$

$$z'(x) = e^{2x} \sin x - 2y(x) + 2z'(x),$$

بالشرطين الابتدائيين : $y(0) = -0.4, z(0) = 0.6$.

الحل

$$y_{n+1} = y_0 + \int_0^x z_n dx,$$

$$z_{n+1} = z_0 + \int_0^x (e^{2x} \sin x - 2y_n + 2z_n) dx,$$

وقمنا بإيجاد عدد ١٥ تقريباً في الجدول رقم (٧.٢) وتم عمل مقارنة بالحل

الصحيح التالي :

$$y(x) = 0.2e^{2x}[\sin x - 2 \cos x],$$

$$z(x) = 0.2e^{2x}[4 \sin x - 3 \cos x],$$

ونلاحظ هنا أن الخطأ المطلق بين الحلول العددية والصحيحة صغير جداً.

الجدول رقم (٧.٢).

x	y_{15}	$y(x)$	z_{15}	$z(x)$
0.0	-0.4	-0.4	-0.6	-0.6
0.2	-0.525559	-0.525559	-0.640149	-0.640149
0.4	-0.64661	-0.64661	-0.536582	-0.536582
0.6	-0.721148	-0.721148	-0.144383	-0.144383
0.8	-0.669707	-0.669707	-0.771984	-0.771984
1.0	-0.353394	-0.353394	2.57875	2.57875

ومن المثالين السابقين نلاحظ أهمية ودقة طريقة بيكارد التي يهملها بعض المحاضرين والباحثين ، وعندما تكون n كبيرة نحصل على دقة عالية.

تمارين (٧,١)

١- أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية التالية باستخدام طريقة بيكارد:

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

٢- أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية التالية باستخدام طريقة بيكارد:

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1$$

٣- استخدم طريقة بيكارد في إيجاد ثلاثة تقريبات لحل التالي:

$$y' = 4y(1+x), \quad y(0) = 1 \quad (\text{أ})$$

$$y' = x - y, \quad y(0) = 1 \quad (\text{ب})$$

(٧,٣) طريقة تايلور

Taylor Method

لحل المعادلة $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ باستخدام طريقة تايلور يكون على

الصورة التالية:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

حيث إن $|x-x_0| < h$.

مثال (٧,٥)

أوجد حل المعادلات التفاضلية التالية بطريقة تايلور:

$$y' = y - 4x + 3, \quad y(0) = 3$$

الحل

$$y' = y - 4x + 3, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 6$$

$$y'' = y' - 4, \quad y''(0) = 2,$$

$$y''' = y'', \quad y'''(0) = 2,$$

.....

إذن الحل:

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + y''(0)\frac{x^2}{2} + \dots$$

$$y(x) = 3 + 6x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 2\left(\frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots\right)$$

$$\therefore y(x) = 3 + 6x + x^2 + 2\left(\sum_{r=3}^{\infty} \frac{x^r}{r!}\right),$$

ولعمل مقارنة مع الحل الصحيح $y = 2e^x + 4x + 1$ كما في الجدول رقم

(٧,٣) التالي:

الجدول رقم (٧,٣).

x	$y(x)$	y
0	3	3
0.1	3.61034	3.60034
0.2	4.24281	4.20281
0.3	4.89972	4.80972
0.4	5.58365	5.42364
0.5	6.29744	6.0474

ومن الممكن استخدام طريقة تايلور في حل نظام من المعادلات التفاضلية العادية
ونأخذ المثال التالي لتوضيح ذلك.

مثال (٧.٦)

استخدم طريقة تايلور لحل النظام التالي :

$$y'(x) = y \cos x - z \sin x,$$

$$z'(x) = y \sin x + z \cos x,$$

$$y(0) = 1, \quad z(0) = 0$$

الحل

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + \frac{y'''(0)}{6}x^3 + \dots$$

$$z(x) = z(0) + z'(0)x + \frac{z''(0)}{2}x^2 + \frac{z'''(0)}{6}x^3 + \dots$$

ويأخذ الحل الصورة التالية :

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots, \quad = e^x$$

$$z(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots, \quad = \frac{x^2}{2} \sum 1 + x + x^2 + \dots = \frac{x^2}{2(1-x)}$$

تمارين (٧.٢)

حل باستخدام طريقة تايلور :

$$y' = z, \quad z' = x^2 y, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 0 \quad - ١$$

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1 \quad -٢$$

$$y' = z, \quad -٣$$

$$z' = -(1 + 0.1x)y - 0.1z^2,$$

$$y(0) = 1, \quad z(0) = 2$$

$$y' = 4y(1 + x), \quad y(0) = 1 \quad -٤$$

(٧, ٤) طريقة إويلر

Euler's Method

نفرض مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

في الفترة $[a, b]$ نقسم الفترة $[a, b]$ إلى النقاط x_0, x_1, \dots, x_n حيث إن:

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

ومن مفكوك تايلور:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h y'(x_i) + \frac{1}{2} h^2 y''(\xi_i), \quad x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1},$$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h y'(x_i) + \frac{1}{2} h^2 y''(x_i + \theta_i h), \quad 0 \leq \theta_i \leq 1$$

وحيث إن $y(x)$ تحقق المعادلة التفاضلية، إذن نحصل على التالي:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h f(x_i, y_i) + \frac{1}{2} h^2 y''(x_i + \theta_i h)$$

$$\therefore y(x_{i+1}) \cong y(x_i) + h f(x_i, y_i)$$

$$w_{i+1} = w_i + h f(x_i, y_i)$$

$$w_0 = y(x_0) = y_0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

وتسمى هذه بصيغة الفروق المقابلة لطريقة أويلر.

مثال (٧.٧)

أوجد الحل التقريبي لمسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = -y + x + 1, \quad y(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

الحل

بوضع $h = 0.1$ $n = 10$, $x_i = ih$ نحصل على التالي:

$$w_{i+1} = w_i + h[-w_i + x_i + 1], \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$w_{i+1} = 0.9w_i + 0.01i + 0.1$$

وباستخدام الشرط الابتدائي $w_0 = 1$ وعمل مقارنة بين الحل التقريبي والحل

الصحيح في الجدول رقم (٧.٤).

الجدول رقم (٧.٤).

x	w_i	$y(x_i)$
0	1.0	1.0
0.1	1.0	1.004837
0.2	1.01	1.018731
0.3	1.029	1.040818
0.4	1.0561	1.070320
0.5	1.09049	1.106532
0.6	1.13144	1.148812
0.7	1.1783	1.196585
0.8	1.23047	1.249329
0.9	1.28742	1.306570
1.0	1.34868	1.367897

البرنامج رقم (٧.١)

```

C*****
C      EULER'S ALGORITHM
C*****
C      TO APPROXIMATE THE SOLUTION OF THE INITIAL VALUE
PROBLEM
C      Y' = F(T,Y), A <= T <= B, Y(A) = ALPHA,
C      AT N+1 EQUALLY SPACED POINTS IN THE INTERVAL [A,B].
C      INPUT:  ENDPPOINTS A,B; INITIAL CONDITION ALPHA; INTEGER N.
C      OUTPUT: APPROXIMATION W TO Y AT THE (N+1) VALUES OF T.
      CHARACTER NAME1*30,AA*1
      INTEGER OUP,FLAG
      LOGICAL OK
C      CHANGE FUNCTION F FOR A NEW PROBLEM
      F(TZ,WZ)=-WZ+TZ+1
      OPEN(UNIT=5,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
      OPEN(UNIT=6,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
      WRITE(6,*) 'This is the Euler Method.'
      WRITE(6,*) 'Has the function F been created in the program? '
      WRITE(6,*) 'Enter Y or N '
      WRITE(6,*) ''
      READ(5,*) AA
      IF(( AA .EQ. 'Y' ) .OR. ( AA .EQ. 'y' )) THEN
      OK = .FALSE.
10 IF (OK) GOTO 11
      WRITE(6,*) 'Input left and right endpoints separated by'
      WRITE(6,*) 'blank '
      WRITE(6,*) ''
      READ(5,*) A, B
      IF (A.GE.B) THEN
      WRITE(6,*) 'Left endpoint must be less'
      WRITE(6,*) 'than right endpoint'
      ELSE
      OK = .TRUE.
      ENDIF
      GOTO 10
11 OK = .FALSE.
      WRITE(6,*) 'Input the initial condition.'
      WRITE(6,*) ''
      READ(5,*) ALPHA
12 IF (OK) GOTO 13
      WRITE(6,*) 'Input a positive integer for the number'
      WRITE(6,*) 'of subintervals '

```

```

WRITE(6,*) ''
READ(5,*) N
IF ( N .LE. 0 ) THEN
WRITE(6,*) 'Must be positive integer '
ELSE
OK = .TRUE.
ENDIF
GOTO 12
13 CONTINUE
ELSE
WRITE(6,*) 'The program will end so that the function F '
WRITE(6,*) 'can be created '
OK = .FALSE.
ENDIF
IF(.NOT.OK) GOTO 400
WRITE(6,*) 'Select output destination: '
WRITE(6,*) '1. Screen '
WRITE(6,*) '2. Text file '
WRITE(6,*) 'Enter 1 or 2 '
WRITE(6,*) ''
READ(5,*) FLAG
IF ( FLAG .EQ. 2 ) THEN
WRITE(6,*) 'Input the file name in the form - '
WRITE(6,*) 'drive:name.ext'
WRITE(6,*) 'with the name contained within quotes'
WRITE(6,*) 'as example: "A:OUTPUT.DTA"'
WRITE(6,*) ''
READ(5,*) NAME1
OUP = 3
OPEN(UNIT=OUP,FILE=NAME1,STATUS='NEW')
ELSE
OUP = 6
ENDIF
WRITE(OUP,*) 'EULER"S METHOD'
WRITE(OUP,2)
2 FORMAT(14X,'t(i)',14X,'w(i)')
C STEP 1
H=(B-A)/N
T=A
W=ALPHA
WRITE(OUP,1) T,W
C STEP 2
DO 110 I =1,N
C STEP 3

```

```

C COMPUTE W(I)
  W=W+H*F(T,W)
C COMPUTE T(I)
  T=A+I*H
C STEP 4
110 WRITE(OUT,1) T,W
C STEP 5
400 CLOSE(UNIT=5)
  CLOSE(UNIT=OUT)
  IF(OUT.NE.6) CLOSE(UNIT=6)
  STOP
1 FORMAT(3X,E15.8,3X,E15.8)
END
    
```

نظرية (٧.٣)

لكل $m \in \mathbb{Z}^+$, $x \geq -1$ فإن:

$$0 \leq (1+x)^m \leq e^{mx}$$

البرهان:

نبرهن النظرية بالاستنتاج الرياضي على m في حالة $m = 1$ فإن

$0 \leq 1+x \leq e^x$. العلاقة صحيحة. نفرض صحة العلاقة في حالة $m = k$ أي أن:

$$0 \leq (1+x)^k \leq e^{kx}$$

ونحاول إثبات صحة العلاقة في حالة $m = k+1$

$$\therefore 0 \leq (1+x)^{k+1} = (1+x)^k (1+x)$$

$$\leq e^{kx} (1+x) \leq e^{kx} \left(1+x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)$$

$$\leq e^{(k+1)x}$$

$$\therefore 0 \leq (1+x)^{k+1} \leq e^{(k+1)x}$$

إذن العلاقة صحيحة في حالة $m = k+1$.

إذن العلاقة صحيحة لكل $m \in \mathbb{Z}^+$.

نظرية (٧.٤)

إذا كانت $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ متتابعة تحقّق $a_0 \geq -\frac{n}{m}$ و

فإن $i = 0, 1, \dots, k$ لكل $a_{i+1} \leq (1+m)a_i + n$

$$a_{i+1} \leq e^{(i+1)m} \left[\frac{n}{m} + a_0 \right] - \frac{n}{m}$$

البرهان:

$$\begin{aligned} \therefore a_{i+1} &\leq (1+m)a_i + n \\ &\leq (1+m)[(1+m)a_{i-1} + n] + n \\ &\leq (1+m)[(1+m)\{(1+m)a_{i-2} + n\} + n] + n \\ &\quad \vdots \\ a_{i+1} &\leq (1+m)^{i+1}a_0 + [1 + (1+m) + (1+m)^2 + \dots + (1+m)^i]n \end{aligned}$$

ولكن

$$1 + (1+m) + (1+m)^2 + \dots + (1+m)^i = \frac{1 - (1+m)^{i+1}}{1 - (1+m)} - \frac{(1+m)^{i+1} - 1}{m}$$

$$\therefore a_{i+1} \leq (1+m)^{i+1}a_0 + \frac{(1+m)^{i+1} - 1}{m}n$$

$$a_{i+1} \leq (1+m)^{i+1} \left[a_0 + \frac{n}{m} \right] - \frac{n}{m}$$

من النظرية السابقة نجد أن:

$$a_{i+1} \leq e^{(i+1)m} \left(\frac{n}{m} + a_0 \right) - \frac{n}{m}$$

وهو المطلوب.

نظرية (٧.٥) نظرية أويلر Euler theorem

إذا كان حل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

بطريقة أويلر هو: $w_0, w_1, w_2, \dots, w_n \quad n \in \mathbb{Z}^+$

ويشروط أن $f(x, y)$ تحقق الشرطين:

$$1 - f(x, y) \text{ تحقق شرط لبشتز وثابتة } L.$$

$$2 - \text{ يوجد عدد } M \text{ بحيث } |f_y(x, y)| \leq M \text{ لكل } x \in [a, b].$$

فإن:

$$|y(x_i) - w_i| \leq \frac{hM}{2L} (e^{L(t_i - a)} - 1), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

البرهان:

في حالة $i = 0$ فإن العلاقة صحيحة.

$$\therefore y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2} y''(x_i + \theta_i h);$$

$$w_{i+1} = w_i + hf(x_i, w_i)$$

وبالطرح نجد أن:

$$|y_{i+1} - w_{i+1}| \leq |y_i - w_i| + h|f(x_i, y_i) - f(x_i, w_i)| + \frac{h^2}{2} |y''(x_i + \theta_i h)|$$

وحيث إن $f(x, y)$ تحقق شرط لبشتز.

$$\therefore |y_{i+1} - w_{i+1}| \leq |y_i - w_i|(1 + hL) + \frac{Mh^2}{2},$$

ومن نظرية (٧,٤) مع وضع $n = \frac{Mh^2}{2}$ نجد أن $m = hL$:

$$|y_{i+1} - w_{i+1}| \leq \frac{Mh^2}{2} (e^{L(x_{i+1}-a)} - 1), \quad |y_0 - w_0| = 0$$

وهو المطلوب.

مثال (٧,٨)

في حل المسألة $y(0) = 1$, $y' = -y + x + 1$, $0 \leq x \leq 1$.

$$f(x, y) = -y + x + 1 \quad \therefore \frac{\partial f}{\partial y} = -1$$

$\therefore f(x, y)$ تحقق شرط ليبنتز $L = 1$, $f_y(x, y) = -1$, إذن $M = -1$.

ومن نظرية (٧,٥) نحصل على التالي:

$$|y_i - w_i| \leq 0.05(e^{x_i} - 1)$$

وفي الجدول رقم (٧,٤) نعرض الخطأ في الحالتين النظري والعددي.

الجدول رقم (٧,٤).

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
الخطأ العددي	0.00484	0.00873	0.01182	0.01422	0.01604	0.01737	0.01829	0.01886	0.01915	0.01920
الخطأ النظري	0.00526	0.1107	0.01749	0.02459	0.03244	0.04111	0.05069	0.01628	0.07298	0.08591

ويمكن استخدام طريقة أويلر لحل نظام المعادلات التفاضلية العادية ونفرض أن لدينا نظاماً من المعادلات التفاضلية العادية على الصورة:

$$y' = f(x, y, z)$$

$$z' = g(x, y, z)$$

مع الشرطين الابتدائيين $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$

وتصبح لصورة أويلر الصيغة التالية:

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n, z_n)$$

$$z_{n+1} = z_n + h g(x_n, y_n, z_n)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

مثال (٧,٩)

أوجد الحل العددي لنظام المعادلات التفاضلية التالي باستخدام طريقة أويلر.

$$y' = x(z - y)$$

$$z' = x(z + y), \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 1$$

الحل

صورة أويلر لهذا النظام تأخذ الصورة

$$y_{n+1} = y_n + h x_n (z_n - y_n),$$

$$z_{n+1} = z_n + h x_n (z_n + y_n),$$

بأخذ $h = 0.1$ و $z_0 = y_0 = 1$ نحصل على النتائج كما هي موضحة في الجدول رقم

(٧,٥).

الجدول رقم (٧.٥).

n	x_n	y_n	z_n
0	0.0	1.0	1.0
1	0.1	1.0	1.0
2	0.2	1.0	1.02
3	0.3	1.0004	1.0604
4	0.4	1.0022	1.12222
5	0.5	1.007	1.2072
6	0.6	1.01701	1.31791

مثال (٧.١٠)

حل النظام التالي باستخدام طريقة أويلر.

$$y' = z,$$

$$z' = -\frac{1}{x}z - y,$$

$$y(1) = 0.77, \quad z(1) = -0.44 \text{ بالشروط الابتدائي للنظام}$$

الحل

بأخذ $h = 0.1$, $z_0 = -0.44$, $y_0 = 0.77$ نحصل على التالي

$$y_{n+1} = y_n + h z_n,$$

$$z_{n+1} = z_n + h \left(-\frac{1}{x_n} z_n - y_n \right),$$

$$x_n = 1 + nh, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ونعرض النتائج في الجدول رقم (٧.٦).

الجدول رقم (٧.٦).

n	x_n	y_n	z_n
0	1.0	0.77	-0.44
1	1.1	0.726	-0.473
2	1.2	0.6787	-0.5026
3	1.3	0.62844	-0.528587
4	1.4	0.575581	0.55077

وهناك تعديل لطريقة أويلر (تسمى طريقة أويلر المعدلة) Modified Euler's Method لحل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

وتوجد على الصورة التالية:

$$y_{n+1}^* = y_n + h f(x_n, y_n),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

وطريقة أويلر المعدلة تعطي نتائج أفضل من طريقة أويلر كما في المثال التالي.

مثال (٧,١١)

حل مسألة القيمة الابتدائية التالية باستخدام طريقة أويلر المعدلة:

$$y' = x - y, \quad y(0) = 1.5, \quad 0 \leq x \leq 1$$

الحل

بأخذ $h = 0.05$ إذن العلاقة التكرارية لطريقة أويلر المعدلة سوف تأخذ

الصورة التالية:

$$x_n = nh,$$

$$y_{n+1}^* = y_n + h[y_n - x_n],$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[y_n - x_n + y_{n+1}^* - x_{n+1}],$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

والنتائج العددية معروضة في الجدول رقم (٧.٧).

الجدول رقم (٧.٧).

n	x_n	y_n
0	0.0	1.5
1	0.25	1.89195
2	0.50	2.3242
3	0.70	2.70639
4	1.0	3.3586
5	1.25	3.9943
6	1.5	4.7395

ومن الممكن استخدام طريقة أويلر المعدلة لحل نظام المعادلات العادية:

$$y' = f(x, y, z)$$

$$z' = g(x, y, z), \quad y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0$$

وتأخذ الصورة التالية:

$$y_{n+1}^* = y_n + hf(x_n, y_n, x_n),$$

$$z_{n+1}^* = z_n + hg(x_n, y_n, x_n),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n, z_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*, z_{n+1}^*)],$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2} [g(x_n, y_n, z_n) + g(x_{n+1}, y_{n+1}^*, z_{n+1}^*)],$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

مثال (٧.١٢)

في حالة حل النظام الموجود في المثال رقم (٧.٣) بطريقة أويلر وأيضاً بطريقة أويلر المعدلة فإننا وجدنا أن نتائج طريقة أويلر المعدل هي الأفضل كما هو موضح في الجدول رقم (٧.٨).

الجدول رقم (٧.٨).

طريقة أويلر المعدلة		طريقة أويلر المعدلة		
x_n	y_n	z_n	y_n	z_n
0	0	0	0	0
0.1	0.534	0.3168	0.6	0.36
0.2	0.961531	0.564157	1.068	0.6336
0.3	1.30216	0.755059	1.43088	0.838656
0.4	1.57193	0.900134	1.71012	0.98943
0.5	1.7839	1.00808	1.9229	1.09731

(٧.٥) طرق رونج - كوتا

Runge-Kutta Methods

إذا كانت الدالة $f(x, y)$ والدوال $f^{(n+1)}(x, y)$ متصلة في المنطقة D

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

فإنه لأي نقطة $(x, y) \in D$ يوجد $\xi \in (x_0, x)$ و $\mu \in (y_0, y)$ حيث إن:

$$f(x, y) = P_n(x, y) + R_n(x, y)$$

حيث إن :

$$P_n(x, y) = f(x_0, y_0) + [(x - x_0)f_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f_y(x_0, y_0)] \\ + \frac{1}{2!} [(x - x_0)^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2(x - x_0)(y - y_0)f_{xy}(x_0, y_0) + (y - y_0)^2 f_{yy}(x_0, y_0)] \\ + \dots + \frac{1}{n!} \left[\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (x - x_0)^{n-j} (y - y_0)^j \frac{\partial^n f(x_0, y_0)}{\partial x^{n-j} \partial y^j} \right]$$

والحد الباقي هو :

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (x - x_0)^{n+1-j} (y - y_0)^j \frac{\partial^{n+1} f(\xi, \mu)}{\partial x^{n+1-j} \partial y^j}$$

مع العلم أن $P_n(x, y)$ هو مفكوك تايلور من الدرجة n في متغيرين حول (x_0, y_0) و $R_n(x, y)$ هو الحد الباقي. وحتى يمكن اشتقاق طريقة رونج - كوتا نبدأ بتحديد القيم $\alpha_1, \alpha_1, \beta_1$ من الخاصية $a_1 f(x + \alpha_1, y + \beta_1)$ تقريباً للمفكوك :

$$T^{(2)}(x, y) = f(x, y) + \frac{h}{2} f_x(x, y) + \frac{h}{2} f_y(x, y) f(x, y)$$

وبفك $a_1 f(x + \alpha_1, y + \beta_1)$ حول (x, y) نحصل على التالي :

$$a_1 f(x + \alpha_1, y + \beta_1) = a_1 [f(x, y) + \alpha_1 f_x(x, y) + \beta_1 f_y(x, y) + R_1]$$

وبالمقارنة نجد أن :

$$a_1 = 1, \quad \alpha_1 = \frac{h}{2}, \quad \beta_1 = \frac{h}{2} f(x, y)$$

$$\therefore T^{(2)}(x, y) \approx f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x, y)) - R_1$$

ونلاحظ أن هذه الطريقة من الرتبة الثانية ($O(h^2)$). وهنا نذكر بعض الحالات الخاصة من طريقة رونج-كوتا كالتالي.

١- طريقة نقطة المنتصف Mid point method

$$w_0 = y_0$$

$$w_{i+1} = w_i + hf\left(x_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}f(x_i, w_i)\right)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

نلاحظ أن هذه الطريقة تنتج من وجود ثلاثة مجاهيل $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ ، ولكن إذا أخذنا أربعة مجاهيل $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \delta_2$ ونحاول بنفس الأسلوب تقريب

$$T^{(3)}(x, y) = f(x, y) + \frac{h}{2}f'(x, y) + \frac{h}{6}f''(x, y)$$

$$a_1 f(x, y) + a_2 (x + \alpha_2, y + \delta_2 f(x, y)) \quad \text{يكون:}$$

نجد أن

$$\text{ونحصل على: } a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \delta_2 = h$$

٢- طريقة أويلر المعدلة Modified Euler method

$$w_0 = y_0$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[f(x_i, w_i) + f(x_{i+1}, w_{i+1} + hf(x_i, w_i))]$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

وفي هذه الحالة نحصل على:

$$a_1 = \frac{1}{4}, a_2 = \frac{3}{4}, \quad \alpha_2 = \delta_2 = \frac{2}{3}h$$

٣- طريقة هين Heun's method

$$w_0 = y_0$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{4} \left[f(x_i, w_i) + 3f\left(x_{i+1}, \frac{2}{3}h\right)w_{i+1} + \frac{2h}{3} f(x_i, w_i) \right]$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

وكل الحالات السابقة تعتبر رونغ-كوتا من الرتبة الثانية.

مثال (٧،١٣)

استخدم طرق رونغ-كوتا من الرتبة الثانية في حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y' = y - x^2 + 1, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad y(0) = 0.5$$

باستخدام $w_0 = 0.5, h = 0.2, N = 10$ فإن :

طريقة نصف النقط Mid pint method :

$$w_{i+1} = 1.22w_i - 0.0088i^2 - 0.008i + 0.218;$$

Modified Euler Method

طريقة أويلر المعدلة

$$w_{i+1} = 1.22w_i - 0.0088i^2 - 0.008i + 0.216;$$

طريقة هين Heun's Method

$$w_{i+1} = 1.22w_i - 0.0088i^2 - 0.008i + 0.2173;$$

ويوضح الجدول رقم (٧،٩) مقدار الخطأ في كل طريقة.

الجدول رقم (٧,٨).

x_i	طريقة نصف النقط	طريقة أويلر المعدلة	طريقة هين
0.0	0	0	0
0.2	0.0012986	0.0032986	0.0019653
0.4	0.0027277	0.0071677	0.0042077
0.6	0.0042814	0.0116982	0.0067537
0.8	0.0059453	0.0169938	0.0096281
1.0	0.0076923	0.0231751	0.0128521
1.2	0.0094781	0.0303627	0.0164396
1.4	0.0112346	0.0387138	0.0203944
1.6	0.0128620	0.0483866	0.0247035
1.8	0.0142177	0.0595577	0.0293310
2.0	0.0151025	0.0724173	0.0342074

طريقة رونج - كوتا من الرتبة الرابعة Fourth - Order Runge - Kutta method

هي الأكثر شيوعاً في الاستخدام:

$$w_0 = y_0$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

$$k_1 = hf(x_i, w_i),$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_1}{2}),$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_2}{2}),$$

$$k_4 = hf(x_i + h, w_i + k_3)$$

وهذه الطريقة من الرتبة الرابعة $O(h^4)$.

مثال (٧.١٤)

أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية التالية باستخدام طرق رونج-كوتا من الرتبة

الرابعة:

$$y' = y - x^2 + 1, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad y(0) = 0.5$$

$$x_i = 0.2i, \quad w_0 = 0.5, \quad h = 0.2,$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

$$k_1 = h[w_i - x_i^2 + 1],$$

$$k_2 = h[w_i + \frac{k_1}{2} - (x_i + \frac{h}{2})^2 + 1],$$

$$k_3 = h[w_i + \frac{k_2}{2} - (x_i + \frac{h}{2})^2 + 1],$$

$$k_4 = h[w_i + k_3 - (x_i + h)^2 + 1] \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

ونعرض مقدار الخطأ المطلق بطريقة رونج-كوتا من الرتبة الرابعة في الجدول

رقم (٧.١٥).

الجدول رقم (٧.١٥).

x_i	Exact	4 RK	Error
0.0	0	0	0
0.2	0.8292986	0.8292933	0.0000053
0.4	1.2140877	1.2140762	0.0000114
0.6	1.6489406	1.6489220	0.0000186
0.8	2.1272295	2.1272027	0.0000269
1.0	2.6408591	2.6408227	0.0000364
1.2	3.1799415	3.1798942	0.0000474
1.4	3.7324000	3.7323401	0.0000599
1.6	4.2834838	4.2834095	0.0000743
1.8	4.8151763	4.8150857	0.0000906
2.0	5.3054720	5.3053630	0.0001089

البرنامج رقم (٧.٢)

```

C*****
C      RUNGE-KUTTA (ORDER 4)
C*****
C  TO APPROXIMATE THE SOLUTION TO THE INITIAL VALUE
C  PROBLEM
C  Y' = F(T,Y), A <= T <= B, Y(A) = ALPHA,
C  AT (N+1) EQUALLY SPACED NUMBERS IN THE INTERVAL [A,B].
C  INPUT:  ENDPOINTS A,B; INITIAL CONDITION ALPHA; INTEGER
C  N.
C  OUTPUT: APPROXIMATION W TO Y AT THE (N+1) VALUES OF T.
          CHARACTER NAME1*30,AA*1
          INTEGER OUP,FLAG
          LOGICAL OK
C  CHANGE FUNCTION F FOR A NEW PROBLEM
          F(TZ,WZ)=WZ-TZ*TZ+1
          OPEN(UNIT=5,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
          OPEN(UNIT=6,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
          WRITE(6,*) 'This is the Runge-Kutta Order Four Method.'
          WRITE(6,*) 'Has the function F been created in the program? '
          WRITE(6,*) 'Enter Y or N '
          WRITE(6,*) ''
          READ(5,*) AA
          IF(( AA .EQ. 'Y' ) .OR. ( AA .EQ. 'y' )) THEN
              OK = .FALSE.
10  IF (OK) GOTO 11
              WRITE(6,*) 'Input left and right endpoints separated by'
              WRITE(6,*) 'blank '
              WRITE(6,*) ''
              READ(5,*) A, B
              IF (A.GE.B) THEN
                  WRITE(6,*) 'Left endpoint must be less'
                  WRITE(6,*) 'than right endpoint'
              ELSE
                  OK = .TRUE.
              ENDIF
              GOTO 10
11  OK = .FALSE.
              WRITE(6,*) 'Input the initial condition.'
              WRITE(6,*) ''
              READ(5,*) ALPHA
12  IF (OK) GOTO 13
              WRITE(6,*) 'Input a positive integer for the number'

```

```

WRITE(6,*) 'of subintervals '
WRITE(6,*) ''
READ(5,*) N
IF ( N .LE. 0 ) THEN
WRITE(6,*) 'Must be positive integer '
ELSE
OK = .TRUE.
ENDIF
GOTO 12
13 CONTINUE
ELSE
WRITE(6,*) 'The program will end so that the function F '
WRITE(6,*) 'can be created '
OK = .FALSE.
ENDIF
IF(.NOT.OK) GOTO 400
WRITE(6,*) 'Select output destination: '
WRITE(6,*) '1. Screen '
WRITE(6,*) '2. Text file '
WRITE(6,*) 'Enter 1 or 2 '
WRITE(6,*) ''
READ(5,*) FLAG
IF ( FLAG .EQ. 2 ) THEN
WRITE(6,*) 'Input the file name in the form - '
WRITE(6,*) 'drive:name.ext'
WRITE(6,*) 'with the name contained within quotes'
WRITE(6,*) 'as example: "A:OUTPUT.DTA"'
WRITE(6,*) ''
READ(5,*) NAME1
OUP = 3
OPEN(UNIT=OUP,FILE=NAME1,STATUS='NEW')
ELSE
OUP = 6
ENDIF
WRITE(OUP,*) 'RUNGE-KUTTA FOURTH ORDER METHOD'
C STEP 1
H = (B-A)/N
T=A
W=ALPHA
WRITE(OUP,2)
I=0
WRITE(OUP,3) I,T,W
C STEP 2
DO 110 I=1,N

```

```

C   STEP 3
C   USE XK1,XK2,XK3,XK4 FOR K(1),K(2),K(3),K(4) RESP.
      XK1 = H*F(T,W)
      XK2 = H*F(T+H/2, W+XK1/2)
      XK3 = H*F(T+H/2, W+XK2/2)
      XK4 = H*F(T+H, W+XK3)
C   STEP 4
C   COMPUTE W(I)
      W = W + (XK1+2*(XK2+XK3)+XK4)/6
C   COMPUTE T(I)
      T=A+I*H
C   STEP 5
110  WRITE(OUT,3) I, T, W
C   STEP 6
400  CLOSE(UNIT=5)
      CLOSE(UNIT=OUT)
      IF(OUT.NE.6) CLOSE(UNIT=6)
      STOP
2    FORMAT(1X,7X,'T',12X,'T',19X,'W')
3    FORMAT(1X,5X,I3,5X,E15.8,5X,E15.8)
      END
    
```

والآن نحاول تطبيق طريقة رونج - كوتا من الرتبة الرابعة على نظام من

المعادلات التفاضلية على الصورة:

$$\begin{aligned}
 y' &= f(x, y, z) \\
 z' &= g(x, y, z), \quad y(x_0) = 0.5, \quad z(x_0) = z_0
 \end{aligned}$$

نجد أن:

$$\begin{aligned}
 w_0 &= y_0, \quad s_0 = z_0 \\
 w_{i+1} &= w_i + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \\
 s_{i+1} &= s_i + \frac{1}{6}[\ell_1 + 2\ell_2 + 2\ell_3 + \ell_4]
 \end{aligned}$$

حيث إن:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(x_i, w_i, s_i), \quad \ell_1 = hg(x_i, w_i, s_i) \\
 k_2 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_1}{2}, s_i + \frac{\ell_1}{2}\right), \ell_2 = hg\left(x_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_1}{2}, s_i + \frac{\ell_1}{2}\right),
 \end{aligned}$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_2}{2}, s_i + \frac{l_2}{2}), l_3 = hg(x_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_2}{2}, s_i + \frac{l_2}{2}),$$

$$k_4 = hf(x_i + h, w_i + k_3, s_i + l_3), l_4 = hg(x_i + h, w_i + k_3, s_i + l_3),$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

مثال (٧.١٥)

حل نظام المعادلات التفاضلية التالي :

$$y' = -4y + 3z + 6,$$

$$z' = -2.4y + 1.6z + 3.6, \quad y(x_0) = z(x_0) = 0$$

باستخدام طريقة رونج-كوتا من الرتبة الرابعة نحصل على النتائج المعروضة في الجدول رقم (٧.١١).

الجدول رقم (٧.١١).

x_i	w_i	s_i
0.0	0.0	0.0
0.1	0.538255	0.319626
0.2	0.968499	0.568782
0.3	1.31072	0.760733
0.4	1.58127	0.906321
0.5	1.79351	1.0144

وبمقارنة الحلول مع الحلول المضبوطة نعلم دقة طريقة رونج-كوتا من

الرتبة الرابعة.

البرنامج رقم (٧,٣)

```

C*****
C RUNGE-KUTTA FOR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS
C*****
C TO APPROXIMATE THE SOLUTION OF THE MTH-ORDER SYSTEM
OF FIRST-
C ORDER INITIAL-VALUE PROBLEMS
C  $U' = FJ(T, U_1, U_2, \dots, U_M)$ ,  $J=1, 2, \dots, M$ 
C  $A \leq T \leq B$ ,  $UJ(A) = \text{ALPHA}J$ ,  $J=1, 2, \dots, M$ 
C AT (N+1) EQUALLY SPACED NUMBERS IN THE INTERVAL [A,B].
C INPUT ENDPOINTS A,B; NUMBER OF EQUATIONS M; INTIAL
C CONDITIONS ALPHA1, ..., ALPHAM; INTEGER N.
C OUTPUT APPROXIMATIONS WJ TO UJ(T) AT THE (N+1) VALUES
COF T.
CHARACTER NAME1*30, AA*1
INTEGER OUP, FLAG
LOGICAL OK
C CHANGE FUNCTIONF F1 AND F2 FOR A NEW PROBLEM
F1(T,X1,X2) = -4*X1+3*X2+6
F2(T,X1,X2) = -2.4*X1+1.6*X2+3.6
OPEN(UNIT=5, FILE='CON', ACCESS='SEQUENTIAL')
OPEN(UNIT=6, FILE='CON', ACCESS='SEQUENTIAL')
C DEFINE FUNCTIONS F1, ..., FM
WRITE(6,*) 'This is the Runge-Kutta Method for systems with m=2.'
WRITE(6,*) 'Have the functions F1 and F2 been defined?'
WRITE(6,*) 'Enter Y or N'
WRITE(6,*) ''
READ(5,*) AA
IF(( AA .EQ. 'Y' ) .OR. ( AA .EQ. 'y' )) THEN
OK = .FALSE.
10 IF (OK) GOTO 11
WRITE(6,*) 'Input left and right endpoints separated by'
WRITE(6,*) 'blank'
WRITE(6,*) ''
READ(5,*) A, B
IF (A.GE.B) THEN
WRITE(6,*) 'Left endpoint must be less'
WRITE(6,*) 'than right endpoint'
ELSE
OK = .TRUE.
ENDIF
GOTO 10
11 OK = .FALSE.

```

```

WRITE(6,*) 'Input the two initial conditions.'
WRITE(6,*) ''
12 READ(5,*) ALPHA1, ALPHA2
   IF (OK) GOTO 13
   WRITE(6,*) 'Input a positive integer for the number'
   WRITE(6,*) 'of subintervals '
   WRITE(6,*) ''
   READ(5,*) N
   IF ( N .LE. 0 ) THEN
   WRITE(6,*) 'Must be positive integer '
   ELSE
   OK = .TRUE.
   ENDIF
   GOTO 12
13 CONTINUE
   ELSE
   WRITE(6,*) 'The program will end so that the functions'
   WRITE(6,*) 'F1 and F2 can be created '
   OK = .FALSE.
   ENDIF
   IF(.NOT.OK) GOTO 400
   WRITE(6,*) 'Select output destination: '
   WRITE(6,*) '1. Screen '
   WRITE(6,*) '2. Text file '
   WRITE(6,*) 'Enter 1 or 2 '
   WRITE(6,*) ''
   READ(5,*) FLAG
   IF ( FLAG .EQ. 2 ) THEN
   WRITE(6,*) 'Input the file name in the form - '
   WRITE(6,*) 'drive:name.ext'
   WRITE(6,*) 'with the name contained within quotes'
   WRITE(6,*) 'as example: "A:OUTPUT.DTA"'
   WRITE(6,*) ''
   READ(5,*) NAME1
   OUP = 3
   OPEN(UNIT=OUP,FILE=NAME1,STATUS='NEW')
   ELSE
   OUP = 6
   ENDIF
   WRITE(OUP,*) 'RUNGE-KUTTA METHOD FOR SYSTEMS'
   WRITE(OUP,6)
6   FORMAT(12X,'t(i)',11X,'w1(i)',11X,'w2(i)')
C   STEP 1
   H=(B-A)/N

```

```

T=A
C STEP 2
W1=ALPHA1
W2=ALPHA2
C STEP 3
WRITE(OUT,1) T,W1,W2
C STEP 4
DO 110 I=1,N
C STEP 5
X11=H*F1(T,W1,W2)
X12=H*F2(T,W1,W2)
C STEP 6
X21=H*F1(T+H/2,W1+X11/2,W2+X12/2)
X22=H*F2(T+H/2,W1+X11/2,W2+X12/2)
C STEP 7
X31=H*F1(T+H/2,W1+X21/2,W2+X22/2)
X32=H*F2(T+H/2,W1+X21/2,W2+X22/2)
C STEP 8
X41=H*F1(T+H,W1+X31,W2+X32)
X42=H*F2(T+H,W1+X31,W2+X32)
C STEP 9
W1=W1+(X11+2*X21+2*X31+X41)/6
W2=W2+(X12+2*X22+2*X32+X42)/6
C STEP 10
T=T+H
C STEP 11
WRITE(OUT,1) T,W1,W2
110 CONTINUE
C STEP 12
400 CLOSE(UNIT=5)
CLOSE(UNIT=OUT)
IF(OUT.NE.6) CLOSE(UNIT=6)
STOP
1 FORMAT(3(1X,E15.8))
END

```

(مثال ٧.١٦)

حل نظام المعادلات التفاضلية التالي :

$$y' = \frac{2y - x}{z},$$

$$z' = \frac{2y}{z + x}, \quad y(0.5) = z(0.5) = 1$$

الحل

بطريقة رونج-كوتا من الرتبة الرابعة تمحصل على النتائج المعروضة في الجدول

رقم (٧.١٢).

الجدول رقم (٧.١٢).

x_i	w_i	s_i
0.5	1	1
0.6	1.15002	1.3301
0.7	1.30011	1.2655
0.8	1.45034	1.39763
0.9	1.60073	1.52951
1.0	1.75128	1.6612

تمارين (٧.٣)

١- استخدم طريقة رونج-كوتا من الرتبة الثانية في حل المعادلة التفاضلية :

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(2) = -1, \quad h = 0.1$$

٢- استخدم طريقة رونج-كوتا من الرتبة الرابعة في حل المعادلة التفاضلية :

$$y' = y - x, \quad y(0) = 2, \quad h = 0.2$$

٣- استخدم طريقة رونج-كوتا من الرتبة الرابعة في حل نظام المعادلات

التفاضلية :

$$y' = y + 2z,$$

$$z' = 3y + 2z \quad y(0) = 6, \quad z(0) = 4, \quad h = 0.02$$

ونلاحظ أن الطرق السابقة تسمى ذات الخطوة الواحدة لأنها تعتمد على نقطة واحدة فقط، ولكن لتحسين الحل نستعرض طرقاً ذات خطوات متعددة وهي طرق ذات دقة أعلى، ونذكر منها:

١- طريقة آدمز-باشفورث ذات الخطوتين Adams-Boshforth two steps

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2} [3f(x_i, w_i) - f(x_{i-1}, w_{i-1})], \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$\frac{15}{12} y'''(\mu_i) h^3, \quad \mu_i \in (x_{i-1}, w_{i+1}) \text{ خطأ الاقتطاع الموضوعي هو}$$

٢- طريقة آدمز-باشفورث ذات الثلاث خطوات Adams-Boshforth three steps

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2,$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12} [23f(x_i, w_i) - 16f(x_{i-1}, w_{i-1}) + 5f(x_{i-2}, w_{i-2})],$$

$$i = 2, 3, \dots, N-1$$

$$\frac{3}{8} y^{(4)}(\mu_i) h^3, \quad \mu_i \in (x_{i-2}, w_{i+1}) \text{ خطأ الاقتطاع الموضوعي هو}$$

٣- طريقة آدمز-باشفورث ذات الأربع خطوات Adams-Boshforth four steps

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \quad w_3 = \alpha_3$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{25} [55f(x_i, w_i) - 59f(x_{i-1}, w_{i-1}) + 37f(x_{i-2}, w_{i-2}) - 9f(x_{i-3}, w_{i-3})],$$

$$i = 3, 4, \dots, N-1$$

خطأ الاقتطاع الموضوعي هو $\frac{251}{720} y^{(5)}(\mu_i) h^4, \mu_i \in (x_{i-3}, w_{i+1})$

٤- طريقة آدمز-باشفورث ذات الخمس خطوات Adams-Boshforth five steps

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \quad w_3 = \alpha_3, \quad w_4 = \alpha_4$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{720} [1901f(x_i, w_i) - 2774f(x_{i-1}, w_{i-1}) + 2616f(x_{i-2}, w_{i-2}) - 1274f(x_{i-3}, w_{i-3}) + 251f(x_{i-4}, w_{i-4})],$$

$$i = 4, 5, 6, \dots, N-1$$

خطأ الاقتطاع الموضوعي هو $\frac{95}{288} y^{(6)}(\mu_i) h^5, \mu_i \in (x_{i-3}, w_{i+1})$

٥- طريقة آدمز-مولتون ذات الخطوتين Adams-Moulton two steps

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12} [15f(x_{i+1}, w_{i+1}) + 8f(x_i, w_i) - f(x_{i-1}, w_{i-1})],$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, N-1$$

خطأ الاقتطاع الموضوعي هو $\frac{-1}{24} y^{(4)}(\mu_i) h^3, \mu_i \in (x_{i-1}, w_{i+1})$

٦- طريقة آدمز-مولتون ذات الثلاث خطوات Adams-Moulton three steps

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2,$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24} [9f(x_{i+1}, w_{i+1}) + 19f(x_i, w_i) - 5f(x_{i-1}, w_{i-1}) + f(x_{i-2}, w_{i-2})],$$

$$i = 2, 3, \dots, N-1$$

$$-\frac{19}{720} y^{(5)}(\mu_i) h^4, \mu_i \in (x_{i-2}, w_{i+1}) \text{ خطأ الاقتطاع الموضوعي هو}$$

٧- طريقة آدمز-مولتون ذات الأربع خطوات Adams-Moulton four steps

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \quad w_3 = \alpha_3,$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{720} [251f(x_{i+1}, w_{i+1}) + 646f(x_i, w_i) - 264f(x_{i-1}, w_{i-1}) + 10f(x_{i-3}, w_{i-3})],$$

$$i = 3, 4, \dots, N-1$$

$$-\frac{3}{160} y^{(6)}(\mu_i) h^5, \mu_i \in (x_{i-3}, w_{i+1}) \text{ خطأ الاقتطاع الموضوعي هو}$$

تمارين (٧.٤)

١- استخدم طريقة آدمز-باشفورت ذات الخطوات الأربع في حل المعادلة

التفاضلية:

$$y' = y - x^2 + 1, \quad y(0) = 0.5, \quad h = 0.2, \quad 0 \leq x \leq 2$$

في كل حالة استخدم قيم انطلاق حقيقية.

٢- استخدم طريقة آدمز-مولتون ذات الخطوات الثلاث في حل المعادلة التفاضلية:

$$y' = y - x^2 + 1, \quad y(0) = 0.5, \quad h = 0.2, \quad 0 \leq x \leq 2$$

في كل حالة استخدم قيم انطلاق حقيقية.

٣- استخدم جميع طرائق آدمز-باشفورث في حل المعادلة التفاضلية:

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(2) = -1, \quad h = 0.1$$

في كل حالة استخدم قيم انطلاق حقيقية.

٤- استخدم جميع طرائق آدمز-باشفورث في حل المعادلة التفاضلية:

$$y' = y - x, \quad y(0) = 2, \quad h = 0.2$$

في كل حالة استخدم قيم انطلاق حقيقية.