

مسائل القيم الحدية للمعادلات التفاضلية العادية

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

مقدمة (٨، ١)

Introduction

مسائل القيم الحدية هي تلك النوع من المسائل التي تتحدد فيه المعادلة التفاضلية وقيم المتغير y عند نقطتي الحدود boundary points فمثلاً:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a < x < b,$$

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b,$$

حيث إن: y_a, y_b قيم معلومة. وللحصول على حل لمسألة القيمة الحدية عددياً يعني إيجاد قيم تقريبية للمتغير y عند النقاط x_i حيث إن:

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad x_0 = a, \quad x_n = b$$

ومن ثم فإن عدد المجاهيل هو $n-1$ وهي:

$$y_1, y_2, \dots, y_{n-1},$$

حيث إن القيم الحدية تعتبر معلومة من الشروط الحدية أي أن:

$$y_0 = y(x_0) = y_a, \quad y_n = y(x_n) = y_b,$$

ولدراسة الوجود والوحدانية لمسألة القيمة الحدية نستعرض النظرية التالية.

نظرية (٨.١)

إذا كانت الدالة f في مسألة القيمة الحدية:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b,$$

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta,$$

متصلة على المنطقة:

$$D = \{(x, y, y') : a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty, -\infty < y' < \infty\}$$

و $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial y'}$ دالتان متصلتان أيضاً على D وإذا كان:

$$-1 \quad \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y} > 0 \quad \text{لكل } x, y, y' \in D.$$

$$-2 \quad \left| \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'} \right| \leq M \quad \text{لكل } x, y, y' \in D \quad \text{فإنه يوجد حل وحيد لمسألة}$$

القيمة الحدية.

نتيجة (٢)

مسائل القيم الحدية:

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b,$$

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta,$$

إذا كان:

$$-1 \quad r(x), q(x), p(x) \text{ دوال متصلة في } [a, b].$$

٢- $q(x) > 0$ في الفترة $[a, b]$.

فإن مسألة القيمة الحدية لها حل وحيد.

(٨,٢) طريقة التصويب

Shooting Method

تعتمد طريقة التصويب على تحويل مسألة القيمة الحدية إلى مسألة قيم ابتدائية

وذلك بإيجاد $y'(x_0)$ التي تحقق القيمة الحدية $y_b = \beta$. أي أنه إذا كان:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

وعندما نأخذ $y' = z$ فإننا نجد أن لدينا:

$$y' = z,$$

$$z' = f(x, y, y'),$$

$$y(a) = \alpha$$

مع الشرط

وبفرض أن $z(b) = z_0$ ثم نغير z_0 حتى نحصل على حل نصل به إلى $y(b) = \beta$.

مثال (٨,١)

باستخدام طريقة التصويب حل المسألة التالية:

$$y'' + y' + y = -2x^2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2$$

الحل

بوضع $y' = z$ نحصل على التالي:

$$y' = z,$$

$$z' = -z - y - 2x,$$

$$y(0) = 0, \quad z(0) = 2 \text{ (فرض)}$$

ونقوم بحل النظام كمسألة نظام من المعادلات التفاضلية، أولاً نستخدم طريقة أويلر المعدلة مع أخذ $h = 0.1$ لنحصل على:

$$y_{i+1}^* = y_i + hu_i, \quad u_{i+1}^* = u_i + h[-u_i - y_i - 2(ih)^2],$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[u_i + u_{i+1}^*],$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}[-u_i - y_i - 2(ih)^2 - u_{i+1}^* - y_{i+1}^* - 2[(i+1)h]^2],$$

وفي حالة $z(0) = 2$ نجد أن $y(1) = 0.931598 \neq 2$ ، إذن نغير إلى $z(0) = 6$ ونجد أن $y(1) = 3.06215$ ثم نختار قيمة جديدة ليست عشوائية ولكن y_n تعتمد على y'_0 أي أن:

$$y_n = \phi(y'_0),$$

$$y_n = m + s y'_0,$$

حيث إن s هو الميل ويساوي:

$$s = \frac{3.06215 - 0.931598}{6 - 2} = 0.532638,$$

$$m = \phi(6) - 6s = -0.133678,$$

والآن للحصول على قيمة y'_0 التي تجعل $y_n = 2$ من التالي:

$$y'_n = \frac{y_n - m}{s} = \frac{2 + 0.133678}{0.532638} = 4.00587,$$

وتلك هي القيمة التي تعطي $y(1) = 2$ كما هو موضح بالجدول رقم (٨،١).

الجدول رقم (٨،١).

x	$z(0) = 2$ y	$z(0) = 6$ Y	$z(0) = 4.00587$ Y
0.0	0	0	0
0.2	0.359855	1.07996	0.720962
0.4	0.63787	1.92107	1.28135
0.6	0.830037	2.52751	1.68126
0.8	0.930395	2.90537	1.92078
1.0	0.931598 \neq 2	3.06215 \neq 2	2.0

ويمكن حل النظام السابق بطريقة رونج-كوتا من الرتبة الرابعة وفي حالة $z(0) = 2$ نجد أن $y(1) = 0.932988 \neq 2$ وفي حالة $z(0) = 6$ ونجد أن $y(1) = 3.06702$ كما هو مذكور في الفقرة السابقة.

$$y_n = m + sy'_0,$$

$$s = \frac{3.06702 - 0.932988}{6 - 2} = 0.533508,$$

$$m = 3.06720 - 6(0.533508) = -0.134027,$$

$$\therefore y'_0 = \frac{2 - m}{s} \approx 4.0$$

وكما هو موضح في الجدول رقم (٨،٢) فإننا نجد أن $y(1) = 2$.

الجدول رقم (٨،٢).

x	$z(0) = 2$ y	$z(0) = 6$ Y	$z(0) = 4.00587$ y
0.0	0	0	0
0.2	0.359872	1.08013	0.720001
0.4	0.638038	1.92197	1.28
0.6	0.830487	2.529527	1.68
0.8	0.931255	2.90875	1.92
1.0	0.932988 \neq 2	3.06702 \neq 2	2.0

مثال (٨.٢)

حل المعادلة التالية باستخدام طريقة التصويب :

$$y'' + y' + y^2 = 1, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2$$

الحل

$$y' = z$$

$$z' = 1 - xz - y^2,$$

من طريقة أويلر المعدلة نحصل على $z(0) = 1.91279$ و $y(0) = 1$ ومن طريقة رونج-كوتا من الرتبة الرابعة نحصل على $z(0) = 1.90617$ ونجد أن $y(1) = 2$ في كلتا الطريقتين وكما هو موضح في الجدول رقم (٨.٣).

الجدول رقم (٨.٣).

X	طريقة رونج-كوتا	
	طريقة أويلر المعدلة	y
0.0	1.0	1.0
0.2	1.37647	1.37321
0.4	1.70262	1.69684
0.6	1.93051	1.9242
0.8	2.03003	2.02584
1.0	2.0	2.0

مثال (٨.٣)

حل التالي باستخدام طريقة التصويب :

$$y''' = -\frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, \quad 1 \leq x \leq 2,$$

$$y(1) = 1, \quad y(2) = 2$$

وقارن نتيجة حلك مع الحل الصحيح التالي :

$$y = c_1x + \frac{c_2}{x^2} - \frac{3}{10}\sin(\ln(x)) - \frac{1}{10}\cos(\ln(x))$$

$$c_1 = 1.1392070132, \quad c_2 = -0.0392070132$$

الحل

بوضع $y' = z$ نحصل على النظام التالي :

$$y' = z$$

$$z' = -\frac{2}{x}z + \frac{2}{x^2}y + \frac{\sin(\ln x)}{x^2},$$

وفي حالة طريقة أويلر المعدلة نضع $z(1) = 0.91809$ بينما في حالة طريقة رونج-كوتا من الرتبة الرابعة نضع $z(1) = 0.91762$ ونتائج الحلين موضحة في الجدول رقم (٨،٤). وسوف نأخذ مثلاً غير خطي وتطبيق طريقة التصويب عليه حتى يتضح لنا أن هذه الطريقة ذات دقة عالية في المعادلات الخطية وغير الخطية.

الجدول رقم (٨،٤).

x	الحل الصحيح		
	طريقة أويلر المعدلة	طريقة رونج-كوتا	طريقة أويلر المعدلة
	y	y	y
0.0	1.0	1.0	1.0
1.1	1.09263	1.09263	1.09263
1.2	1.1871	1.18708	1.18708

تابع الجدول رقم (٨.٤).

x	طريقة أويلر المعدلة	طريقة رونج-كوتا	الحل الصحيح
	y	y	y
1.3	1.28341	1.28338	1.28338
1.4	1.38148	1.381445	1.381445
1.5	1.4812	1.48116	1.48116
1.6	1.58243	1.58239	1.58239
1.7	1.68504	1.68501	1.68501
1.8	1.78892	1.7889	1.7889
1.9	1.89394	1.89393	1.89393
2.0	2.0	2.0	2.0

البرنامج رقم (٨.١)

```

C*****
C      LINEAR SHOOTING
C*****
C      TO APPROXIMATE THE SOLUTION OF THE BOUNDARY-VALUE
cPROBLEM
C      -Y'' + P(X)Y' + Q(X)Y + R(X) = 0, A <= X <= B,
C      Y(A) = ALPHA, Y(B) = BETA
C      INPUT:  ENDPOINTS A,B; BOUNDARY CONDITIONS ALPHA,
BETA; cNUMBER OF
C      SUBINTERVALS N.
C      OUTPUT: APPROXIMATIONS W(1,I) TO Y(X(I)); W(2,I) TO Y'(X(I))
C      FOR EACH I=0,1,...N.
C      VECTORS WILL NOT BE USED FOR W1 AND W2
C      INITIALIZATION
DIMENSION U(2,25),V(2,25)
CHARACTER NAME1*30,AA*1
INTEGER OUP,FLAG
LOGICAL OK
C      CHANGE FUNCTIONS P, Q, AND R FOR A NEW PROBLEM.
P(X)=-2/X
Q(X)=2/X**2
R(X)=SIN(ALOG(X))/X**2
OPEN(UNIT=5,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
OPEN(UNIT=6,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')

```

```

WRITE(6,*) 'This is the Linear Shooting Method.'
WRITE(6,*) 'Have the functions P, Q and R been created? '
WRITE(6,*) 'Enter Y or N '
WRITE(6,*) ''
READ(5,*) AA
IF(( AA .EQ. 'Y' ) .OR. ( AA .EQ. 'y' )) THEN
  OK = .FALSE.
110  IF (OK) GOTO 11
      WRITE(6,*) 'Input left and right endpoints separated by'
      WRITE(6,*) 'a blank. '
      READ(5,*) A, B
      IF (A.GE.B) THEN
        WRITE(6,*) 'Left endpoint must be less'
        WRITE(6,*) 'than right endpoint'
      ELSE
        OK = .TRUE.
      ENDIF
      GOTO 110
11   OK = .FALSE.
      WRITE(6,*) 'Input Y(,A,)'
      WRITE(6,*) ''
      READ(5,*) ALPHA
      WRITE(6,*) 'Input Y(,B,)'
      WRITE(6,*) ''
      READ(5,*) BETA
12   IF (OK) GOTO 13
      WRITE(6,*) 'Input a positive integer for the number'
      WRITE(6,*) 'of subintervals '
      WRITE(6,*) ''
      READ(5,*) N
      IF ( N .LE. 0 ) THEN
        WRITE(6,*) 'Must be positive integer '
      ELSE
        OK = .TRUE.
      ENDIF
      GOTO 12
13   CONTINUE
      ELSE
        WRITE(6,*) 'The program will end so that the functions'
        WRITE(6,*) 'P, Q and R can be created '
        OK = .FALSE.
      ENDIF
      IF(.NOT.OK) GOTO 400
      WRITE(6,*) 'Select output destination: '

```

```

WRITE(6,*) '1. Screen '
WRITE(6,*) '2. Text file '
WRITE(6,*) 'Enter 1 or 2 '
WRITE(6,*) ''
READ(5,*) FLAG
IF ( FLAG .EQ. 2 ) THEN
  WRITE(6,*) 'Input the file name in the form - '
  WRITE(6,*) 'drive:name.ext'
  WRITE(6,*) 'with the name contained within quotes'
  WRITE(6,*) 'as example: "A:OUTPUT.DTA"'
  WRITE(6,*) ''
  READ(5,*) NAME1
  OUP = 3
  OPEN(UNIT=OUP,FILE=NAME1,STATUS='NEW')
ELSE
  OUP = 6
ENDIF
WRITE(OUP,*) 'LINEAR SHOOTING METHOD'
C STEP 1
H=(B-A)/N
C U1=U(1,0), U2=U(2,0), V1=V(1,0), V2=V(2,0)
U1=ALPHA
U2=0.0
V1=0.0
V2=1.0
C STEP 2
C RUNGE-KUTTA METHOD FOR SYSTEMS IS USED IN STEPS 3, 4
C THE INDEX I IS SHIFTED BY 1
DO 10 I=1,N
C STEP 3
X=A+(I-1)*H
C STEP 4
T=X+H/2
XK11=H*U2
XK12=H*(P(X)*U2+Q(X)*U1+R(X))
XK21=H*(U2+XK12/2)
XK22=H*(P(T)*(U2+XK12/2)+Q(T)*(U1+XK11/2)+R(T))
XK31=H*(U2+XK22/2)
XK32=H*(P(T)*(U2+XK22/2)+Q(T)*(U1+XK21/2)+R(T))
XK41=H*(U2+XK32)
XK42=H*(P(X+H)*(U2+XK32)+Q(X+H)*(U1+XK31)+R(X+H))
U1=U1+(XK11+2*XK21+2*XK31+XK41)/6
U2=U2+(XK12+2*XK22+2*XK32+XK42)/6
XK11=H*V2

```

```

XK12=H*(P(X)*V2+Q(X)*V1)
XK21=H*(V2+XK12/2)
XK22=H*(P(T)*(V2+XK12/2)+Q(T)*(V1+XK11/2))
XK31=H*(V2+XK22/2)
XK32=H*(P(T)*(V2+XK22/2)+Q(T)*(V1+XK21/2))
XK41=H*(V2+XK32)
XK42=H*(P(X+H)*(V2+XK32)+Q(X+H)*(V1+XK31))
V1=V1+(XK11+2*XK21+2*XK31+XK41)/6
V2=V2+(XK12+2*XK22+2*XK32+XK42)/6
U(1,D)=U1
U(2,D)=U2
V(1,D)=V1
V(2,D)=V2
10 CONTINUE
WRITE(OUP,1)
C STEP 5
W1= ALPHA
Z=(BETA-U(1,N))/V(1,N)
X=A
I=0
WRITE(OUP,2) I,X,W1,Z
C STEP 6
DO 20 I=1,N
  X=A+I*H
  W1=U(1,D)+Z*V(1,D)
  W2=U(2,D)+Z*V(2,D)
C OUTPUT IS X(I), W(1,D), W(2,D)
20 WRITE(OUP,2) I,X,W1,W2
C STEP 7
C PROCESS IS COMPLETE
400 CLOSE(UNIT=5)
CLOSE(UNIT=OUP)
IF(OUP.NE.6) CLOSE(UNIT=6)
STOP
1 FORMAT(1X,'OUTPUT: I,X(I),W(1,D),W(2,D),/')
2 FORMAT(1X,I2,3(3X,E15.8))
END

```

(٨، ٤) مثال

حل المعادلة التفاضلية غير الخطية التالية باستخدام طريقة التصويب:

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), \quad 1 \leq x \leq 2,$$

$$y(1) = 17, \quad y(3) = \frac{43}{3}$$

الحل

بوضع $z = y'$ نحصل على النظام التالي:

$$y' = z$$

$$z' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yz)$$

$$y(1) = 17$$

نضع $z(1) = -14.0183$ في حالة طريقة أويلر المعدلة، بينما نضع $z(1) = -14.0002$ في حالة طريقة رونج-كوتا من الرتبة الرابعة. تم تسجيل النتائج مع

الحل الصحيح $y = x^2 - \frac{16}{x}$ في الجدول رقم (٨،٥).

الجدول رقم (٨،٥).

X	طريقة أويلر المعدلة	طريقة رونج-كوتا	الحل الصحيح
	y	Y	y
1.1	17	17	17
1.4	13.4109	13.3886	13.3886
1.8	12.1454	12.1289	12.1289
2.2	12.1217	12.1127	12.1127
2.6	12.9172	12.9138	12.9138
3.0	14.3333	14.3333	14.3333

البرنامج رقم (٨.٢)

```

C*****
C      NONLINEAR SHOOTING
C*****
C      TO APPROXIMATE THE SOLUTION OF THE NONLINEAR
BOUNDARY-VALUE PROBLEM
C      Y'' = F(X,Y,Y'), A<=X<=B, Y(A)=ALPHA, Y(B)=BETA:
C      INPUT:  ENDPOINTS A,B; BOUNDARY CONDITIONS ALPHA, cBETA;
NUMBER OF
C      SUBINTERVALS N; TOLERANCE TOL; MAXIMUM NUMBER cOF
C      ITERATIONS M.
C      OUTPUT: APPROXIMATIONS W(1,I) TO Y(X(I)); W(2,I) TO Y'(X(I))
C      FOR EACH I=0,1,...,N OR A MESSAGE THAT THE MAXIMUM
C      NUMBER OF ITERATIONS WAS EXCEEDED.
C      INITIALIZATION
      DIMENSION W1(26),W2(26)
      CHARACTER NAME1*30,AA*1
      INTEGER OUP,FLAG
      LOGICAL OK
C      CHANGE FUNCTIONS F, FY, AND FYP FOR A NEW PROBLEM.
      F(X,Y,Z)=(32+2*X**3-Y*Z)/8
C      FY(X,Y,Z) REPRESENTS PARTIAL OF F WITH RESPECT TO Y
      FY(X,Y,Z)=-Z/8
C      FYP(X,Y,Z) REPRESENTS PARTIAL OF F WITH RESPECT TO Y'
      FYP(X,Y,Z)=-Y/8
      OPEN(UNIT=5,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
      OPEN(UNIT=6,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
      WRITE(6,*) 'This is the Nonlinear Shooting Method.'
      WRITE(6,*) 'Have the functions F, FY (partial of F'
      WRITE(6,*) 'with respect to y) and FYP (partial of
      WRITE(6,*) 'F with respect to y") been created? '
      WRITE(6,*) 'Enter Y or N '
      WRITE(6,*) ''
      READ(5,*) AA
      IF((AA.EQ.'Y').OR.(AA.EQ.'y')) THEN
      OK = .FALSE.
110 IF (OK) GOTO 11
      WRITE(6,*) 'Input left and right endpoints separated by'
      WRITE(6,*) 'blank'
      WRITE(6,*) ''
      READ(5,*) A, B
      IF (A.GE.B) THEN
      WRITE(6,*) 'Left endpoint must be less'

```

```

WRITE(6,*) 'than right endpoint'
ELSE
OK = .TRUE.
ENDIF
GOTO 110
11 OK = .FALSE.
WRITE(6,*) 'Input Y('A,')'
WRITE(6,*) ''
READ(5,*) ALPHA
WRITE(6,*) 'Input Y('B,')'
WRITE(6,*) ''
READ(5,*) BETA
12 IF (OK) GOTO 13
WRITE(6,*) 'Input an integer > 1 for the number'
WRITE(6,*) 'of subintervals '
WRITE(6,*) ''
READ(5,*) N
IF ( N .LE. 1 ) THEN
WRITE(6,*) 'Integer must exceed 1.'
ELSE
OK = .TRUE.
ENDIF
GOTO 12
13 OK=.FALSE.
14 IF (OK) GOTO 15
WRITE(6,*) 'Input tolerance '
WRITE(6,*) ''
READ(5,*) TOL
IF (TOL.LE.0.0) THEN
WRITE(6,*) 'Tolerance must be positive '
WRITE(6,*) ''
ELSE
OK = .TRUE.
ENDIF
GOTO 14
15 OK = .FALSE.
16 IF (OK) GOTO 17
WRITE(6,*) 'Input maximum number of iterations '
WRITE(6,*) ''
READ(5,*) M
IF ( M .LE. 0 ) THEN
WRITE(6,*) 'Must be positive integer '
WRITE(6,*) ''
ELSE

```

```

    OK = .TRUE.
    ENDIF
    GOTO 16
17  CONTINUE
    ELSE
    WRITE(6,*) 'The program will end so that the functions'
    WRITE(6,*) 'F, FY and FYP can be created '
    OK = .FALSE.
    ENDIF
    IF(.NOT.OK) GOTO 400
    WRITE(6,*) 'Select output destination: '
    WRITE(6,*) '1. Screen '
    WRITE(6,*) '2. Text file '
    WRITE(6,*) 'Enter 1 or 2 '
    WRITE(6,*) ''
    READ(5,*) FLAG
    IF ( FLAG.EQ. 2 ) THEN
    WRITE(6,*) 'Input the file name in the form - '
    WRITE(6,*) 'drive:name.ext'
    WRITE(6,*) 'with the name contained within quotes'
    WRITE(6,*) 'as example: "A:OUTPUT.DTA"'
    WRITE(6,*) ''
    READ(5,*) NAME1
    OUP = 3
    OPEN(UNIT=OUP,FILE=NAME1,STATUS='NEW')
    ELSE
    OUP = 6
    ENDIF
    WRITE(OUP,*) 'NONLINEAR SHOOTING METHOD'
C   STEP 1
    H=(B-A)/N
    K=1
    TK=(BETA-ALPHA)/(B-A)
    WRITE(6,*) 'TK = ',TK
    WRITE(6,*) 'Change TK? Enter Y or N (within quotes)'
    READ(5,*) AA
    IF((AA.EQ.'Y').OR.(AA.EQ.'y')) THEN
    WRITE(6,*) 'Input TK'
    READ(5,*) TK
    ENDIF
C   STEP 2
100 IF (K.GT.M) GOTO 200
C   STEP 3
C   W1(1)=W(1,0), W2(1)=W(2,0), U1=U(1), U2=U(2)

```

```

W1(1)=ALPHA
W2(1)= TK
U1=0
U2=1
C STEP 4
C RUNGE-KUTTA METHOD FOR SYSTEMS IS USED IN STEPS 5, 6
DO 10 I=1,N
C STEP 5
X=A+(I-1)*H
T=X+H/2
C STEP 6
XK11=H*W2(I)
XK12=H*F(X,W1(I),W2(I))
XK21=H*(W2(I)+XK12/2)
XK22=H*F(T,W1(I)+XK11/2,W2(I)+XK12/2)
XK31=H*(W2(I)+XK22/2)
XK32=H*F(T,W1(I)+XK21/2,W2(I)+XK22/2)
XK41=H*(W2(I)+XK32)
XK42=H*F(X+H,W1(I)+XK31,W2(I)+XK32)
W1(I+1)=W1(I)+(XK11+2*XK21+2*XK31+XK41)/6
W2(I+1)=W2(I)+(XK12+2*XK22+2*XK32+XK42)/6
YK11=H*U2
YK12=H*(FY(X,W1(I),W2(I))*U1+FYP(X,W1(I),W2(I))*U2)
YK21=H*(U2+YK12/2)
YK22=H*(FY(T,W1(I),W2(I))*(U1+YK11/2)
* +FYP(T,W1(I),W2(I))*(U2+YK21/2))
YK31=H*(U2+YK22/2)
YK32=H*(FY(T,W1(I),W2(I))*(U1+YK21/2)
* +FYP(T,W1(I),W2(I))*(U2+YK22/2))
YK41=H*(U2+YK32)
YK42=H*(FY(X+H,W1(I),W2(I))*(U1+YK31)+FYP(X+H,W1(I),
* W2(I))*(U2+YK32))
U1=U1+(YK11+2*YK21+2*YK31+YK41)/6
U2=U2+(YK12+2*YK22+2*YK32+YK42)/6
10 CONTINUE
C TEST FOR ACCURACY
C STEP 7
IF(ABS(W1(N+1)-BETA).LE.TOL) THEN
C PROCESS IS COMPLETE
C W1(J), W2(J) ARE THE APPROXIMATIONS FOR Y AND Y'
WRITE(OUT,2) K
C STEP 8
WRITE(OUT,1) A,W1(1),W2(1)
DO 20 I=1,N

```

```

J=I+1
X=A+I*H
20 WRITE(OUT,1) X,W1(J),W2(J)
C STEP 9
GOTO 400
END IF
C STEP 10
C NEWTON'S METHOD APPLIED TO IMPROVE TK
TK=TK-(W1(N+1)-BETA)/U1
K=K+1
GOTO 100
C STEP 11
C METHOD FAILED
200 WRITE(OUT,3) M
400 CLOSE(UNIT=5)
CLOSE(UNIT=OUT)
IF(OUT.NE.6) CLOSE(UNIT=6)
STOP
1 FORMAT(1X,3(E15.8,3X))
2 FORMAT(1X,'ORDER OF OUTPUT - X(I),W1(I),W2(I)',1X,I3,1X,'ITERATIONS')
3 FORMAT(1X,'METHOD FAILED AFTER ITERATION NO.',I4)
END

```

تمارين (٨.١)

باستخدام طريقة التصويب حل مسائل القيم الحدية التالية :

$$.y'' + x y' + y^2 = 1, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 3 \quad -١$$

$$.y'' = 4(y - x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2 \quad -٢$$

$$.y'' = y' + 2y + \cos x, \quad y(0) = -0.3, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0.1 \quad -٣$$

$$.y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad -٤$$

$$. y'' = 100y, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e^{-10} \quad -٥$$

$$. y'' = y^{12} - y + \ln(x), \quad y(1) = 0, \quad y(2) = \ln(2) \quad -٦$$

$$. y'' = 3y^3, \quad y(1) = \frac{1}{4}, \quad y(2) = \frac{1}{5} \quad -٧$$

$$. y'' = 2y^3 - 6y - 2x^3, \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad y(2) = \frac{5}{2} \quad -٨$$

(٨.٣) طريقة الفروق المنتهية

Finite Difference Method

على الرغم من أن طريقة التصويب تصلح للمسائل الخطية وغير الخطية إلا أننا سوف نستعرض في هذه الفقرة طريقة ذات دقة أعلى ألا وهي طريقة الفروق المنتهية. في هذه الطريقة نستبدل استخدام التفاضلات باستخدام الفروق. ومن مفكوك تايلور:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(\xi_i^+), \quad x_i \leq \xi_i^+ \leq x_{i+1}$$

وأيضاً:

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) - \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(\xi_i^-), \quad x_{i-1} \leq \xi_i^- \leq x_i$$

وبجمع المعادلتين السابقتين نحصل على الصيغة التالية:

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{24} [y^{(4)}(\xi_i^+) + y^{(4)}(\xi_i^-)]$$

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi_i), \quad x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_{i+1}$$

وتسمى هذه بصيغة الفروق الوسطية $\text{Centered-difference formula}$ لـ $y''(x_i)$.

والصيغة بالنسبة لـ $y'(x_i)$ تكون كالتالي :

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} - \frac{h^2}{6} y'''(\eta_i), \quad x_{i-1} \leq \eta_i \leq x_{i+1}$$

وإذا افترضنا أن لمعادلة الشروط الحدية الصورة التالية :

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x)$$

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b$$

فإن معادلة الفروق سوف تكون على الصورة التالية :

$$w_0 = y_a, \quad w_{n+1} = y_b$$

$$\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} + p(x_i) \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} + q(x_i)w_i = r(x_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

ومنها نحصل على نظام في الصورة $A\mathbf{w} = \mathbf{b}$ حيث إن A مصفوفة ثلاثية القطر

من النظام $n \times n$ Tri-diagonal matrix .

مثال (٨,٥)

حل المعادلة التالية باستخدام طريقة الفروق المنتهية :

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{x^2} \sin(\ln x), \quad 1 \leq x \leq 2$$

$$y(1) = 1, \quad y(2) = 2$$

الحل

$$w_0 = 1, w_{11} = 2, h = 0.1$$

باستخدام العلاقات السابقة نحصل على النظام:

$$\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} + \frac{2(w_{i+1} - w_{i-1})}{x_i} - \frac{2}{x_i^2} w_i = \frac{\sin \ln x_i^2}{x_i^2}, i = 1, 2, \dots, 10$$

وبوضع $i = 1$ نحصل على:

$$\left(\frac{-2}{h^2} - \frac{2}{x_1^2}\right)w_1 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{2}{hx_1}\right)w_2 = \frac{\sin \ln x_1}{x_1^2} - \frac{w_0}{h^2} + \frac{w_0}{x_1 h}$$

وفي حالة $2 \leq i \leq 9$ نحصل على:

$$\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{hx_i}\right)w_{i-1} + \left(-\frac{2}{h^2} + \frac{2}{x_i^2}\right)w_i + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{hx_i}\right)w_{i+1} = \frac{\sin \ln x_i}{x_i^2}$$

أما في حالة $i = 10$ فنحصل على التالي:

$$\left(\frac{1}{h^2} - \frac{2}{hx_{10}}\right)w_9 + \left(-\frac{2}{h^2} + \frac{2}{x_{10}^2}\right)w_{10} = \frac{\sin \ln x_{10}}{x_{10}^2} - \frac{w_{10}}{h^2} + \frac{w_{10}}{x_{10} h}$$

البرنامج رقم (٨.٣)

```

C*****
C      LINEAR FINITE-DIFFERENCE
C*****
C      TO APPROXIMATE THE SOLUTION OF THE BOUNDARY-VALUE
C      PROBLEM
C      Y'' = P(X)Y' + Q(X)Y + R(X), A <= X <= B
C      Y(A) = ALPHA, Y(B) = BETA:
C
C      INPUT:  ENDPOINTS A,B; BOUNDARY CONDITIONS ALPHA, BETA;
C              INTEGER N.
C
C      OUTPUT: APPROXIMATIONS W(I) TO Y(X(I)) FOR EACH
C              I=0,1,...N+1.
C      INITIALIZATION
C      DIMENSION A(24),B(24),C(24),D(24),XL(24),XU(24),Z(24),W(24)
C      CHARACTER NAME1*30,AAA*1
C      INTEGER OUP,FLAG
C      LOGICAL OK
C      CHANGE FUNCTIONS P, Q, AND R FOR A NEW PROBLEM.
C      P(X)=-2/X
C      Q(X)=2/X**2
C      R(X)=SIN(ALOG(X))/X**2
C      OPEN(UNIT=5,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
C      OPEN(UNIT=6,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
C      WRITE(6,*) 'This is the Linear Finite Difference Method.'
C      WRITE(6,*) 'Have the functions P, Q and R been created?'
C      WRITE(6,*) 'Enter Y or N'
C      WRITE(6,*) ''
C      READ(5,*) AAA
C      IF(( AAA .EQ. 'Y' ) .OR. ( AAA .EQ. 'y' )) THEN
C      OK = .FALSE.
110  IF (OK) GOTO 11
      WRITE(6,*) 'Input left and right endpoints separated by'
      WRITE(6,*) 'blank. '
      READ(5,*) AA, BB
      IF (AA.GE.BB) THEN
      WRITE(6,*) 'Left endpoint must be less'
      WRITE(6,*) 'than right endpoint'
      ELSE
      OK = .TRUE.
      ENDIF
      GOTO 110

```

```

11  OK = .FALSE.
    WRITE(6,*) 'Input Y(',AA,')'
    WRITE(6,*) ''
    READ(5,*) ALPHA
    WRITE(6,*) 'Input Y(',BB,')'
    WRITE(6,*) ''
    READ(5,*) BETA
12  IF (OK) GOTO 13
    WRITE(6,*) 'Input an integer > 1 for the number'
    WRITE(6,*) 'of subintervals. note: h = (b-a)/(n+1) '
    WRITE(6,*) ''
    READ(5,*) N
    IF ( N .LE. 1 ) THEN
    WRITE(6,*) 'Integer must exceed 1.'
    ELSE
    OK = .TRUE.
    ENDIF
    GOTO 12
13  CONTINUE
    ELSE
    WRITE(6,*) 'The program will end so that the functions'
    WRITE(6,*) 'P, Q and R can be created '
    OK = .FALSE.
    ENDIF
    IF(.NOT.OK) GOTO 400
    WRITE(6,*) 'Select output destination: '
    WRITE(6,*) '1. Screen '
    WRITE(6,*) '2. Text file '
    WRITE(6,*) 'Enter 1 or 2 '
    WRITE(6,*) ''
    READ(5,*) FLAG
    IF ( FLAG .EQ. 2 ) THEN
    WRITE(6,*) 'Input the file name in the form - '
    WRITE(6,*) 'drive:name.ext'
    WRITE(6,*) 'with the name contained within quotes'
    WRITE(6,*) 'as example: "A:OUTPUT.DTA"'
    WRITE(6,*) ''
    READ(5,*) NAME1
    OUP = 3
    OPEN(UNIT=OUP,FILE=NAME1,STATUS='NEW')
    ELSE
    OUP = 6
    ENDIF
    WRITE(OUP,*) 'LINEAR FINITE DIFFERENCE METHOD'

```

```

C STEP 1
H=(BB-AA)/(N+1)
X=AA+H
A(1)=2+H*H*Q(X)
B(1)=-1+H*P(X)/2
D(1)=-H*H*R(X)+(1+H*P(X)/2)*ALPHA
M=N-1
C STEP 2
DO 10 I=2,M
X=AA+I*H
A(I)=2+H*H*Q(X)
B(I)=-1+H*P(X)/2
C(I)=-1-H*P(X)/2
10 D(I)=-H*H*R(X)
C STEP 3
X=BB-H
A(N)=2+H*H*Q(X)
C(N)=-1-H*P(X)/2
D(N)=-H*H*R(X)+(1-H*P(X)/2)*BETA
C STEP 4
C STEPS 4 THROUGH 8 SOLVE A TRIDIAGONAL LINEAR SYSTEM
C USING
C ALGORITHM 6.7
C USE XL, XU FOR L, U RESP.
XL(1)=A(1)
XU(1)=B(1)/A(1)
Z(1)=D(1)/XL(1)
C STEP 5
DO 20 I=2,M
XL(I)=A(I)-C(I)*XU(I-1)
XU(I)=B(I)/XL(I)
Z(I)=(D(I)-C(I)*Z(I-1))/XL(I)
20 CONTINUE
C STEP 6
XL(N)=A(N)-C(N)*XU(N-1)
Z(N)=(D(N)-C(N)*Z(N-1))/XL(N)
C STEP 7
W(N)=Z(N)
C STEP 8
DO 40 J=1,M
I=N-J
40 W(I)=Z(I)-XU(I)*W(I+1)
C STEP 9
WRITE(OUT,1)

```

```

WRITE(OUT,2) AA,ALPHA
DO 50 I=1,N
X=AA+I*H
50 WRITE(OUT,2) X,W(I)
WRITE(OUT,2) BB,BETA
C STEP 10
C PROCEDURE IS COMPLETE
400 CLOSE(UNIT=5)
CLOSE(UNIT=OUT)
IF(OUT.NE.6) CLOSE(UNIT=6)
STOP
1 FORMAT(1X,'ORDER OF OUTPUT - X(I),W(I)')
2 FORMAT(1X,2(E15.8,3X))
END

```

مثال (٨,٦)

حل المعادلة التالية باستخدام طريقة الفروق المنتهية:

$$y'' - y' + \frac{1}{2}y = \frac{4 - x^2}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

وقارن مع الحل الصحيح: $y(x) = x^2 + 4x$

الحل

معادلة الفروق للمعادلة التفاضلية تكون على الصورة التالية:

$$\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} - \left(\frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} \right) + \frac{1}{2}w_i = \frac{4 - x_i^2}{2}$$

$$w_0 = 0, \quad w_{11} = 12$$

ويأخذ $h = 0.1$ نحصل على النتائج كما هي موضحة في الجدول رقم (٨,٧).

الجدول رقم (٨.٧).

X	w_x	y_0	$ w_x y_0 $
0	0	0	0
0.4	1.76	1.76	1.99E-15
0.8	3.84	3.84	6.66E-15
1.2	6.24	6.24	8.88E-15
1.6	8.96	8.96	7.10E-15
2.0	12	12	0

تمارين (٨.٢)

حل المعادلات التفاضلية باستخدام طريقة الفروق المنتهية:

$$١- \quad y'' = 4(y - x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2$$

$$٢- \quad y'' = y' + 2y + \cos x, \quad y(0) = -0.3, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0.1$$

$$٣- \quad y'' - 3y' + 2y - x + 3x, \quad y(0) = 2, \quad y(1) = 1$$