

دالة فاي لأويلر ومجموع القواسم

Euler's Phi Function and Sums of Divisors

عندما قمنا بدراسة الأعداد الكاملة في الفصل الخامس عشر، استخدمنا دالة سيجما $\sigma(n)$ ، حيث عُرِّفَت على أنها مجموع كل قواسم العدد n . نعتزم الآن تقديم ما قد يبدو تجربة غريبة. نأخذ كل قواسم n ، نطبق دالة فاي لأويلر على كل قاسم، نجمع جميع قيم دالة فاي لأويلر ونرى على ماذا حصلنا.

سنبدأ بمثال، ليكن $n = 15$. قواسم العدد 15 هي 1, 3, 5, 15. أولاً،

سنحسب قيمة دالة فاي لأويلر للأعداد 1, 3, 5, 15

$$\phi(1) = 1, \quad \phi(3) = 2, \quad \phi(5) = 4, \quad \phi(15) = 8$$

بعد ذلك نجمع النواتج لنحصل على:

$$\phi(1) + \phi(3) + \phi(5) + \phi(15) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$$

الناتج يساوي 15، وهو الرقم الذي بدأنا به، ولكن من المؤكد أنها مجرد

صدفة.

دعنا نحاول مع عدد كبير له الكثير من العوامل، وليكن $n = 315$. قواسم

العدد 315 هي:

1,3,5,7,9,15,21,35,45,63,105,315

وإذا حسبنا قيم دالة فاي لأويلر وجمعنا النواتج سنحصل على :

$$\begin{aligned} & \phi(1) + \phi(3) + \phi(5) + \phi(7) + \phi(9) + \phi(15) + \phi(21) \\ & + \phi(35) + \phi(45) + \phi(63) + \phi(105) + \phi(315) \\ & = 1 + 2 + 4 + 6 + 6 + 8 + 12 + 24 + 24 + 36 + 48 + 144 \\ & = 315 \end{aligned}$$

مرة أخرى ننتهي بالعدد الذي بدأنا به. إن هذا يبدو أكثر من كونه صدفة. هذا

يدفعنا لعمل التخمين التالي :

تخمين :

ليكن d_1, d_2, \dots, d_r أعداد تقسم n ، بما فيها 1 و n . فإن :

$$\phi(d_1) + \phi(d_2) + \dots + \phi(d_r) = n$$

ما هو الطريق الذي سنسلكه لإثبات أن تخميننا صحيح؟ أبسط حالة لاختبار صحة هذا التخمين تكون عندما يكون للعدد n قواسم قليلة جداً، فعلى سبيل المثال، افرض أننا أخذنا $n = p$ ، حيث p عدد أولي. قواسم p هي 1 و p ، ونعلم أن

$$\phi(1) = 1 \quad , \quad \phi(p) = p - 1 . \text{ جمع هاتين القيمتين يعطي :}$$

$$\phi(1) + \phi(p) = 1 + (p - 1) = p$$

وبهذا نكون قد أثبتنا صحة تخميننا عندما n أولي.

بعد ذلك نأخذ $n = p^2$. قواسم p^2 هي 1 ، p ، p^2 ، ونعلم من الفصل

$$11 \text{ أن } \phi(p^2) = p^2 - p \text{ ، لذلك نجد أن :}$$

$$\phi(1) + \phi(p) + \phi(p^2) = 1 + (p - 1) + (p^2 - p) = p^2$$

لاحظ كيف أن الحدود شُطِبت ما عدا p^2 .

بتشجيع من هذه النجاحات، دعنا نحاول التحقق من صحة تخميننا عندما $n = p^k$ أي قوة لعدد أولي. قواسم p^k هي $1, p, p^2, \dots, p^k$. في الفصل الحادي عشر أوجدنا صيغة لدالة فاي لأويلر عند قوى العدد الأولي: $\phi(p^i) = p^i - p^{i-1}$. يمكننا هذا القانون من حساب:

$$\begin{aligned} & \phi(1) + \phi(p) + \phi(p^2) + \dots + \phi(p^{k-1}) + \phi(p^k) \\ &= 1 + (p-1) + (p^2 - p) + \dots + (p^{k-1} - p^{k-2}) + (p^k - p^{k-1}) \\ &= p^k \end{aligned}$$

مرة أخرى، تلغى الحدود ما عدا p^k . يمكننا القول إننا برهنا أن تخميننا صحيح لأي n تمثل قوى عدد أولي.

إذا لم تكن n قوة عدد أولي، فإن الوضع يزداد تعقيداً. وكالعادة، سنبدأ مع أبسط حالة. افرض أن $n = pq$ هو حاصل ضرب عددين أوليين مختلفين. إذاً قواسم n هي $1, p, q, pq$ لذلك نحن بحاجة للمجموع:

$$\phi(1) + \phi(p) + \phi(q) + \phi(pq)$$

لقد بينا في الفصل الحادي عشر أن دالة فاي لأويلر تحقق صيغة الضرب بشرط أن يكون m, n أوليين نسبياً. وكحالة خاصة، p و q أوليان نسبياً، لذلك $\phi(pq) = \phi(p) \cdot \phi(q)$. وهذا يعني أن:

$$\begin{aligned}
\phi(1) + \phi(p) + \phi(q) + \phi(pq) \\
&= 1 + \phi(p) + \phi(q) + \phi(p)\phi(q) \\
&= (1 + \phi(p))(1 + \phi(q)) \\
&= pq
\end{aligned}$$

وهذا بالضبط ما نريده.

باستخدام هذا المثال كمفتاح ، فنحن الآن مستعدون للتعامل مع الحالة العامة.

لأي عدد n ، سنعرف الدالة $F(n)$ بالصيغة التالية :

$$F(n) = \phi(d_1) + \phi(d_2) + \dots + \phi(d_r)$$

حيث d_1, d_2, \dots, d_r قواسم n .

هدفنا الآن هو إثبات أن $F(n) = n$ لأي عدد n . الخطوة الأولى هي فحص

فيما إذا كانت الدالة F تحقق صيغة الضرب.

الادعاء (١, ٢٠)

إذا كان $\gcd(m, n) = 1$ ، فإن $F(mn) = F(m) \cdot F(n)$.

التحقق : ليكن

d_1, d_2, \dots, d_r قواسم n .

e_1, e_2, \dots, e_s قواسم m .

بما أن m, n أوليان نسبياً. فإن قواسم mn هي :

$d_1e_1, d_1e_2, \dots, d_1e_s, d_2e_1, d_2e_2, \dots, d_2e_s, \dots, d_re_1, d_re_2, \dots, d_re_s$

الآن ، كل d_i هو أولي نسبياً مع كل e_j ، لذلك $\phi(d_i e_j) = \phi(d_i)\phi(e_j)$.

بالاعتماد على هذه الحقائق نستطيع حساب :

$$\begin{aligned}
F(nm) &= \phi(d_1 e_1) + \dots + \phi(d_1 e_s) + \phi(d_2 e_1) + \dots + \phi(d_2 e_s) \\
&\quad + \dots + \phi(d_r e_1) + \dots + \phi(d_r e_s) \\
&= \phi(d_1) \phi(e_1) + \dots + \phi(d_1) \phi(e_s) + \phi(d_2) \phi(e_1) + \dots + \phi(d_2) \phi(e_s) \\
&\quad + \dots + \phi(d_r) \phi(e_1) + \dots + \phi(d_r) \phi(e_s) \\
&= (\phi(d_1) + \phi(d_2) + \dots + \phi(d_r)) \cdot (\phi(e_1) + \phi(e_2) + \dots + \phi(e_s)) \\
&= F(m) F(n)
\end{aligned}$$

وبذلك نكون قد أكملنا التحقق من ادعائنا.

باستخدام الادعاء السابق ، تصبح الآن المهمة سهلة لإثبات صيغة المجموع التالية لدالة فاي لأويلر.

نظرية (٢٠, ٢) (صيغة مجموع دالة فاي لأويلر)

ليكن d_1, d_2, \dots, d_r قواسم n ، فإن :

$$\phi(d_1) + \phi(d_2) + \dots + \phi(d_r) = n$$

البرهان

لنفرض أن $F(n) = \phi(d_1) + \phi(d_2) + \dots + \phi(d_r)$ ونريد أن نبين أن $F(n)$ دائماً تساوي n . برهنا سابقاً أن $F(p^k) = p^k$ لقوى عدد أولي. حلل n الآن إلى قوى أولية ، وليكن $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}$. القوى الأولية المختلفة كلٌّ منها يكون أولياً نسبياً للآخر ؛ لذلك نستطيع استخدام صيغة الضرب على F لحساب :

$$F(n) = F(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r})$$

$$\begin{aligned}
 & (\text{من صيغة الضرب}) = F(p_1^{k_1}) F(p_2^{k_2}) \dots F(p_r^{k_r}) \\
 & \text{، لأن } F(p^k) = p^k \text{ للقوى الأولية،} \\
 & = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r} \\
 & = n
 \end{aligned}$$

تمارين

(٢٠، ١) دالة لامبدا ليوفيل Liouville's lambda function $\lambda(n)$ تُعرف بتحليل n إلى

مضروب عوامله الأولية، $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$ ، ثم نضع

$\lambda(n) = (-1)^{k_1+k_2+\dots+k_r}$. فمثلاً لحساب

$\lambda(1728)$ ، نحلل $1728 = 2^6 \cdot 3^3$ ، وممن ثم

$$\lambda(1728) = (-1)^{6+3} = (-1)^9 = -1$$

(a) احسب القيم التالية لدالة ليوفيل:

$$\lambda(30) \quad , \quad \lambda(504) \quad , \quad \lambda(60750)$$

(b) نستخدم دالة لامبدا ليوفيل لنعرف دالة جديدة $G(n)$ بالصيغة التالية:

$$G(n) = \lambda(d_1) + \lambda(d_2) + \dots + \lambda(d_r)$$

حيث d_1, d_2, \dots, d_r هي قواسم n . احسب قيمة $G(n)$ لكل

$$1 \leq n \leq 18$$

(c) استخدم حساباتك في (b) والحسابات الإضافية إذا تطلب الأمر، لعمل

تخمين لقيمة $G(n)$. جرب تخمينك لقيم أكثر للعدد n . استخدم تخمينك

$$\text{ لإيجاد قيمة } G(60119483) \quad , \quad G(62141689)$$

(d) برهن أن تخمينك في (c) صحيح.

(٢٠٢) الدالة $f(n)$ التي تحقق صيغة الضرب $f(mn) = f(m)f(n)$ لكل الأعداد m, n عندما $\gcd(m, n) = 1$ تسمى دالة مضاعفة multiplicative function. فمثلاً، رأينا أن دالة فاي لأويلر $\phi(n)$ هي دالة مضاعفة (الفصل الحادي عشر) ومجموع دالة القواسم $\sigma(n)$ هي دالة مضاعفة (الفصل 15).

(a) بيّن أن دالة لامبدا ليوفيل $\lambda(n)$ المعرفة في تمرين 20.1 هي دالة مضاعفة.

(b) افرض الآن أن $f(n)$ أي دالة مضاعفة، وعرف دالة جديدة:

$$g(n) = f(d_1) + f(d_2) + \dots + f(d_r)$$

حيث d_1, d_2, \dots, d_r قواسم n . برهن أن $g(n)$ دالة مضاعفة.

(٢٠٣) ليكن d_1, d_2, \dots, d_r هي أعداد تقسم n تحوي 1 و n . دالة سيجمما للقوة t

$\sigma_t(n)$ تساوي مجموع القوى t^{th} لقواسم n .

$$\sigma_t(n) = d_1^t + d_2^t + \dots + d_r^t$$

على سبيل المثال، $\sigma_2(10) = 1^2 + 2^2 + 5^2 + 10^2 = 130$ ، طبعاً،

$\sigma_1(n)$ هي دالتنا القديمة، دالة سيجمما $\sigma(n)$.

(a) احسب القيم $\sigma_0(18)$ ، $\sigma_3(10)$ ، $\sigma_2(12)$.

(b) بيّن أنه إذا كان $\gcd(m, n) = 1$ ؛ فإن $\sigma_t(mn) = \sigma_t(m) \cdot \sigma_t(n)$.

بكلمات أخرى، بيّن أن σ_t دالة مضاعفة. هل هذه الصيغة تبقى صحيحة إذا كان m, n ليسا أوليين نسبياً.

(c) يَبِّنا في الفصل الخامس عشر أن $\sigma(p^k) = (p^{k+1} - 1)/(p - 1)$

أوجد صيغة مشابهة للدالة $\sigma_t(p^k)$ ، واستخدمها لحساب $\sigma_4(2^6)$.

(d) الدالة $\sigma_0(n)$ تُحْصِي قواسم n المختلفة.

هل صيغتك في (c) تعمل مع الدالة σ_0 ؟ إذا كان الجواب لا ، أعط صيغة

صحيحة للدالة $\sigma_0(p^k)$. استخدم صيغتك و(b) لإيجاد قيمة

$\sigma_0(42336000)$.